高 等 学 校 教 材

数学教学论

■ 刘咏梅 编



高等教育出版社

高等学校教材

数学教学论

刘咏梅　编

高等教育出版社

内容简介

本书由作者自编使用多年的教学讲义改编而成，具有独特的构思，形成了比较完整的理论体系。本书对数学教师的素质、数学文化、数学教育理论进行了专题讨论，对于中学数学教学中的一些实际问题也进行了研究。本书收集了较多的教学案例及点评，对提高数学教师的实际教学水平具有帮助。本书适合作为高等院校师范类数学专业本科"数学教学论"、"数学教育学"等课程的教材，或研究生教育的参考资料和教师继续教育的教材，也可以作为自学考试数学教育专业的选用教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学教学论/刘咏梅编．—北京：高等教育出版社，2008．10

ISBN 978-7-04-024909-5

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学教学-教学研究　Ⅳ．O1-4

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第150792号

策划编辑　马　丽　**责任编辑**　李　陶　**封面设计**　张申申　**责任绘图**　郝　林
版式设计　陆瑞红　**责任校对**　胡晓琪　**责任印制**　尤静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京京科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2008年10月第1版
印　　张	29.25	**印　　次**	2008年10月第1次印刷
字　　数	550 000	**定　　价**	36.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24909-00

前　言

随着社会的发展,数学已经突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献。数学不仅应用范围在不断扩大,而且越来越影响人们的思维和行为,因而数学已经成为现代社会的一种文化,数学的观念在众多不同层次上影响着我们的生活方式和工作方式。数学教育作为整个教育的一个组成部分,在发展人、发展社会方面有着极为重要的作用。作为数学教育的主要部分,数学教师的状况直接影响了数学教育的情况,也就直接影响学生的发展,从而影响社会的发展,因而培养符合教育发展需要的中学数学教师就成为师范教育的一项重要任务。

"中学数学教学论"课程是高等师范院校数学教育专业的一门重要的专业必修课,是师范院校学生转变为数学教师的重要学习课程。这门课程的主要任务,就是从理论和实践两个方面讨论数学教师的工作性质、特点、意义、方法等问题,它在培养合格中学数学教师方面具有重要的作用。

"数学教学"一词的使用频率很高,但对于什么是数学教学、数学教学的意义是什么、数学教学的目的是什么、如何体现数学教学的价值、如何实现数学教学的目的、数学教师必须具备什么条件、在数学教学过程中教师的作用是什么、在数学教学中学生的地位是什么、数学教学有哪些已经成熟的教学方法、有哪些新的教学模式、数学的本质是什么、学生是怎样理解数学的、学生学习数学的过程是怎样的、数学与文化的关系是怎样的等一系列问题,却并不是每个人都了解的。而作为一名数学教师对这些问题却必须认真思考,对这些问题进行回答,这就是数学教学论建立理论体系的目的,也是本书试图探讨的问题。

中学数学教学的目的是提高学生的数学素质,但对于什么是数学素质目前却有许多不同的理解,这一方面说明数学素质这一概念具有多方面的意义,另一方面也说明在认识上还存在一些混乱,正确理解素质,并在教学中努力提高学生数学素质就成为数学教师教学的根本目的。本书希望能在这方面给读者一些启发。

本书力图从理论高度对数学教学中的教师、学生和教学内容等进行分析,阐

述各自在数学教学中的地位、作用，因而本书特别增加了中学数学教师、数学教育的一些理论基础两章内容。这一做法与提高教师理论水平，促进教师专业化发展的要求是相符的，也符合新课程改革的基本理念。另外，由于对数学的理解和认识是数学教师从事数学教育的前提，而从文化的角度分析数学，是对数学本质的认识的起点，因而本书增加了数学文化一章。

相比过去的中学数学教学论理论体系，本书有两个基本特点。首先，突出了对数学的全面认识，主要希望解决目前许多中学数学教师和师范院校的学生对数学缺乏认识，没有形成自身的数学观念，因而难免出现教学中的盲目现象的问题。本教材对几种数学观念进行了介绍，也论述了作者对数学的一些理解，力争引导读者对数学有一个全面的分析和认识。另外，强调了教育学、心理学理论与数学教育的联系。主要希望解决目前中学部分数学教师和师范院校的部分学生，虽然学习了教育学和心理学的一些理论，也具有一定的实践，但却难以将理论与实践结合起来，不能借助于理论对实践进行分析，也不能从理论的高度认识理解实践，因而很难运用理论解决实践中的问题，从而难免使部分教师坠入一个单一"教书匠"的行列，对教师的成长不利的问题。本书突出了理论研究和理论在实践中的运用研究，希望对教师成为专家型和研究型教学人员能有一定的帮助。

本书的理论依据有两个方面，一个是教育学和心理学以及数学的相关理论，另一个是目前师范(数学)类学生的知识结构分析。而实践依据是目前正在开展的基础教育改革对数学教师提出的要求。本书力求引导读者形成和强化两个基本观点，也就是突出两个中心思想，一个是数学文化观念，另一个是素质教育观念。

编写本书的重要目的，就是希望使读者能从理论和实践两个方面对中学数学教学有一个全面了解，更新对数学的认识和对数学教育的认识，并使读者对中学数学的教学规律，教育目的有较深刻的认识，通过既学习理论，又分析实际的过程，为从事的数学教育打下基础。具体地说本书的编写目的为以下几个方面：

1．使读者了解一位中学数学教师应该具有的基本素质，并通过自身努力将自己塑造成一位优秀的数学教师；

2．使读者对数学的发展过程有足够的了解，便于读者树立正确的数学观和数学教育观，并用其指导自己的教学实践；

3．对中学数学的教学目的进行研究，使读者正确认识数学教育的意义，明确数学教育的目的，并使自己的数学教育目的与社会和学生个人的发展相适应；

4．对数学教学规律进行研究，使读者能够树立用数学教学理论指导数学教学实践的思想和意识；

5．对现行中学数学的教学内容及相关的教学方法进行研究，使读者从理论

高度认识中学数学教学的基本内容和方法的意义和作用；

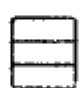
6. 对学习理论在数学教学中的运用进行研究，为使读者提高理论水平，成为学者或研究型教师奠定基础。

本书可以供师范(数学)类师生作为教学用书，也可以作为中学数学教师的继续教育教学用书或研究生的教学参考资料。

在本书的编写过程中，得到江西师范大学及江西省教育厅相关部门的大力支持，高等教育出版社的编辑为本书的出版付出了很多努力，本书还参考了许多专家学者的观点，在此一并感谢，由于作者水平有限，本书还存在不少不足之处，希望得到读者的指正。

编　者

2008 年 5 月



录

绪论

数学教学论课程的地位和作用以及理论系统

数学教学论是师范院校数学专业的必修课，是教师教育类的主要课程，是师范生了解中学数学教育的重要途径，也是师范生由大学生过渡到中学数学教师的重要桥梁，还是师范生形成教育观念的基础课程。在师范院校向中学输送的人才能否成为优秀教师方面，有重要的作用。数学教学论课程的教学必须始终坚持为基础教育的发展服务，为学生成为优秀的数学教师服务。从这个意义上说，数学教学论课程直接关系到基础教育中的数学教学的状况，从而关系到教育发展的状况。

1．数学教学论对数学教师的意义

（1）教育改革对数学教师提出的挑战

随着基础教育改革的不断深入，对数学教师的要求也越来越高，主要体现在三个方面，一是对教师知识水平的要求，二是对教师理论研究水平的要求，三是对教师培养学生非智力因素的要求，为了达到这些要求，教师需要更新自身的教学观念，形成更适合于学生和社会发展的观念。

在知识方面，过去我们主要是对教师知识的量的关注，而现在不仅要关注教师知识量的状况，而且还要关注教师知识的结构状况。

关于知识量的问题，我们注意到新课程在高中开设了一系列的选修课程，如开关线路与布尔代数、分形几何选讲、信息安全与密码、球面上的几何、对称与群等，这些内容的教学需要教师不仅要掌握高中的传统知识内容，还要有所专长。实际上，高中新课程设置的选修课中有一些是目前部分师范类大学也未开设的课程，通过数学教学论课程这一窗口，学生可以对高中教学内容有比较全面的了解，并依此决定自己在知识方面应补充的部分，为学生选修大学的数学课程或自主学习提供明确的目标，也为他们将来从事中学的数学教学提供基础。

对于知识的结构，则要求教师要有合理和全面的知识。这些知识包括使教师形成与基础教育发展方向相适应的观念，也就是应具备一些哲学知识；也包括教师的自我调节心理的知识，也就是应具备一些心理学（不仅是教育心理学）知识；要成为研究型教师，教师还必须具备一些教育理论知识等。这就决定了教师的知识应具有合理的结构，应充分和全面。

在教师的理论研究水平方面,近年来人们逐步发现并不断验证了一条规律,那就是教师的研究能力和研究水平对教师的成长、教师个人价值的实现和教师的工作都具有重要的意义,因而提出了教师应向学者型发展的观点。所谓学者型教师,是以自己的学科性质特点为基础,结合自己的个性,形成自己独特的实践操作体系、教学思想或教育理论,以及完整的教学体系、教学风格和流派。[1]要成为学者并发展为专家,教师必须以自己对教学的研究作为教育工作的出发点和归属。这就对教师的理论研究水平提出了更高的要求。不仅要求教师能够进行教学,给予学生知识,而且要求教师成为研究者,对学生、自身、教学等方面进行全面研究。

(2) 教师所面临的问题

目前教师的理论方面有两个比较突出的问题,一个是教师的理论知识的不足。再一个是教师对理论与实践的关系的认识不足,教师虽然掌握了一些基础的教育学和心理学等方面的知识,但在教学实践中,却不能有意识地将这些知识运用于分析和解决问题,理论由于不能对实践起指导作用并在实践中得到检验和完善而失去了其价值。因此,教师这两方面的问题可以概括为知识少而且无用的问题。

现在部分教师的教学在很大程度上还停留在经验性上,教学缺乏教育科学、心理科学等方面的基础,自觉将自己的教育活动建立在一定理论基础上的情况较少。如当新教师在教学中遇到困难时,总是更乐意请教有经验的教师,而从理论上寻找解决问题的方法和依据的情况很少。究其原因,有两方面,一方面,由于目前的教育还停留在应试教育阶段,教师的教育无须理论的指导也能顺利进行,只要模仿过去的一些做法就能完成教学任务;另一方面,目前的数学教育学、数学教育心理学等方面的论著虽然很多,但还未真正将数学与教育学、心理学等理论融为一体来进行研究,理论研究的结论在教学实践中显得苍白无力,对教师的指导意义不大,而且与教师的期望有较大的距离,教师无法将理论与实践联系起来。因此一方面是教师缺乏理论指导,另一方面是不愿接受那些教条式的空洞理论。

教师运用知识开展教学研究,也存在一些问题。实际上,面对教育改革的趋势,部分教师已经认识到理论研究的重要性,因而大胆尝试,摸着石头过河,走出了一条研究之路。但大多数教师虽然具有研究的想法,但依然觉得真正的"研究"离自己还比较远,或者说,对于怎样开展研究还比较茫然。

一些研究表明教师的知识结构还存在一些问题,如只有18.6%的教师自评较好地掌握了数学史知识,只有35.7%的教师自评较好地掌握了有关培养学生

① 刘清华.教师知识的模型建构研究.北京:中国社会科学出版社,2004.5(33).

创新意识和能力方面的知识，只有23.9%的教师自评较好地掌握了了解学生在数学学习上一般心理特点方面的知识。[①] 由这一结果，可以认为教师的知识结构还是有待于完善的。

在教师的教育观念方面，随着人们对"教学"认识的不断深入，对"教"与"学"的关系更加明确，人们已普遍认识到教师教学的目的不仅是为了学生的学，而且也是为了实现自己的价值，而且教师自身价值的实现在很大程度上依赖学生的学习状况。从这一思想出发，教师一方面必须认识到学生对教学的意义，理解教师的价值应体现在学生的发展上，必须对学生进行全面分析，对知识与学生的发展的关系、知识对学生素质的影响、知识对学生的价值等问题都必须重新思考。另外，作为数学专业的教师，对数学的认识也必须与时俱进。也就是说，教师必须形成与时代相适应的学生观、教育观、教师观、数学观等。

(3) 数学教学论课程学习的意义

数学教学论课程的学习对师范院校数学专业学生来说意义是多方面的，这里从以下几个方面来说明。

第一，学习数学教学论课程，可以使学生了解中学数学对教师的要求，在教师的知识状况上教学论课程通过对中学数学教学的研究，对中学数学教师素质的研究，引导学生对自己的知识状况进行反省，从而确定自己的知识发展目标和计划。

第二，学习数学教学论课程，可以使即将入职的教师了解数学教学的基本原则、基本方法、基本内容和基本内容教学的要求，并从理论上对这些问题进行研究，形成教育观念。

第三，数学教学论课程是为未来的数学教师服务的，因而具有面向未来的特点，对先进的教育理论和数学教育的发展方向的研究也是其一个重要的内容，学生可以以教学论为窗口了解数学教育的发展趋势和前沿问题，并参与问题的研究，形成创新意识。

第四，数学教学论课程在注意理论研究的同时，又注意对实际教学进行指导，而且这种指导是建立在一定的理论基础上的，因而，能引导学生对数学教育中的实际问题进行深入分析，将理论与实际有机结合起来。

由于上述数学教学论课程对师范院校数学专业的学生的意义，我们也就可以确定数学教学论课程的主体部分，也就是形成教学论课程的基本任务。上述四个方面应成为课程研究的主要内容，而研究的结果和对问题的解决状况，便成为其意义体现的状况。

---

① 李渺，等. 中小学数学教师知识调查研究. 数学教育学报，2007.4(33).

2. 学科的特点

理解了数学教学论课程的地位和作用,我们从其特点、性质、教学目的以及与数学教育的关系等方面来分析,可以得出数学教学论学科具有以下特点。

(1) 综合性

数学教学论是一门与哲学、数学、教育学、心理学、思维科学等学科相关的学科,因而具有综合性的特点。数学教学论以这些学科的为基础,运用这些学科的思想解决数学教育中的问题,并依据数学教育的特点将这些学科进行重新整合,形成数学教学论学科的原则、观念、理论等,对数学教育起到引领的作用和指导的作用。

第一,数学教学论依赖于哲学的指导,我们知道哲学是研究自然界最基本问题的科学。对于每一门学科,都有其最基本的问题需要解决,数学教育也不例外,基本的问题如数学是怎样的、数学教育的对象是怎样的、数学教育的目的是怎样的、数学教师是怎样的等,这些问题是数学教学论需要研究的,然而解决这些问题就必须依赖哲学的思想和方法。数学教学论研究也还有许多基本问题未解决,如数学教学论与数学教学的关系如何,数学教学论是研究微观的教学方法,还是研究宏观的教学思想等,对这些问题的回答也是对数学教学论课程的理解和认识,而这一认识只有运用哲学,从哲学的角度对其进行分析,才能理解得深刻一些。

第二,数学教育的内容是数学,离开了数学,数学教育也就不存在了,因此,数学是数学教育的基础和内涵,也是数学教学论研究的对象和研究基础。

第三,数学教育是关于数学的教育,而不是简单地对数学的研究,因而出发点和落脚点都是教育,如何将教育理论运用于数学教学实践就是数学教学论需要研究的问题,因此,教育学对数学教学论也具有指导的意义。

第四,数学的最主要的特点就是其抽象性,这体现在研究对象的抽象性和研究方法的抽象性,面对这样一门运用极为广泛,却又十分抽象的学科,不同的学生由于各种因素的影响将会具有不同的学习心理学。把握和依据学生的心理进行教学,才能取得良好的教学效果。因此,数学教学离不开心理学的指导,而数学教学论课程也就应该研究如何运用心理学于数学教育之中。

第五,数学是关于思维的科学,因为数学研究的对象就只存在于思维之中,数学严密性的特点,对人的思维训练也具有不可取代的作用。因而,数学就离不开思维科学的指导。

(2) 实践性

我们可以从两个方面来认识数学教学论学科的实践性。一方面数学教学论的研究目的是为了推动数学教育的发展,另一方面数学教学论的研究对象就是数学教学的实践。虽然很多课程都强调与中学的数学教学相结合,但数学教学论课

程却具有直接以中学数学教学问题为研究对象的特点,因而具有更强的实践性。

有句格言是"您是怎样学的,就会怎样教"随着社会对人才要求的不断提高和教育改革自身发展,中学数学教学模式呈现出多样化的趋势,数学教学论课程由于承担着师范生到数学教师的桥梁作用,因而,必须使学生掌握一些具体的教学方式,也就是应强调课程的实践性特点。而这些方法的学习过程在很大程度上依赖教师教的过程,这便要求教学论课程的教学本身就要符合实践性的要求。

(3)理论性

数学教学论课程虽然与许多学科有关联,但却是一门独立的学科,因而具有自己的理论体系,而理论体系的科学性直接关系着中学数学教学的科学性,因而强调其理论性是十分重要的。

数学教学论的理论必须符合一般科学的理论,特别是要与教育学、心理学、数学等学科的理论相符合,数学教学论对数学教学的指导应该具有科学性。对教学规律的解释必须科学,对教育现象的认识必须科学。违背科学的一般原理去追求数学教学的效果是错误的,数学教学论必须在一般科学的基础上建立自身的理论体系。

3. 数学教学论的研究内容

目前国外一些学者在教学论研究对象的科学化方面提出了不同的见解,主要观点有以下几种:

美国学者布尔加德认为,教学论是应用各种学习理论的理论,学习理论将是教学的基础,它能引导出教学的基本原理,教学的状况也将取决于所掌握的学习理论和知识。

南斯拉夫的弗·鲍良克著的《教学论》指出:"教学论是研究教养的一般规律"。

布鲁纳在《论教学的若干原则》一文指出:"教学论阐明有关最有效地获得知识与技能之方法的规则"。

日本河内一男等著的《教育学的理论问题》中认为"教学论是研究最优化的教学方法的科学"。[①]

以上列举的部分观点,可以使我们认识到,教学论的发展过程包含了人们对其研究对象的界定的不断尝试,也说明确定教学论研究对象是一个复杂的问题。

从宏观的角度说,教学论应该以整个基础教育作为其研究对象,因此数学教学论就应该以基础教育中的数学教育作为其研究对象,研究内容应该是所有与数学教学相关的问题,这样一来,数学教学论的研究对象就是不断发展的,而与

① 沈小碚,赵水勤.规范与表述:对教学论研究对象的认识.人民大学复印资料,教育学,2004 第6期(113).

这一发展密切相关的问题就成为数学教学论的研究内容，教学论依据研究内容来建构理论体系。对数学教学论研究对象的宏观理解，使教学论由于研究对象的不断发展而使理论体系具有不确定性，因而一般我们是从微观的角度来认识数学教学论的研究对象。

从微观的角度来说，数学教学论以数学教学的课堂为其研究对象。具体地说，数学教学研究的对象为教学、教师、学生之间围绕数学的联系。各因素都是数学教育缺一不可的要素。教师通过教学与学生联系，在这一联系中教师起着主导作用，因为教师决定了教学的过程和教学的内容，但是教师的教学如果脱离了学生的学习，则失去了全部的价值，成为一种毫无意义的行为，因而教师的教学目的是为了学生的学习，学生自然就应该是教学的主体。在教学过程中，无论是教师的教还是学生的学都是围绕数学开展活动的。数学、教师、教学、学生的关系可以用图 0.1 来表示。

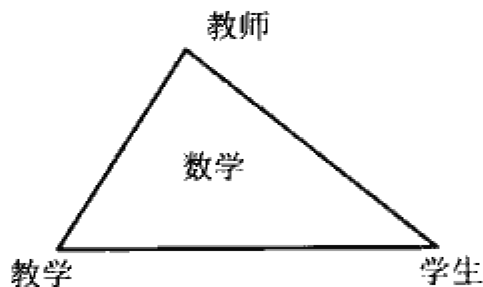


图 0.1　数学教学研究的对象

教师要顺利开展教学就必须依据一定的教育理论、遵循教学的原则、把握教学的目的、灵活运用各种教学方式、适当选择教学的内容进行教学，才能使学生的学习成为一种促进全面发展的活动。也就是说，教师、学生、教学通过数学教学这一方式，形成一种文化的数学课堂文化。这些也就成为数学教学论的研究内容，具体关系见图 0.2。

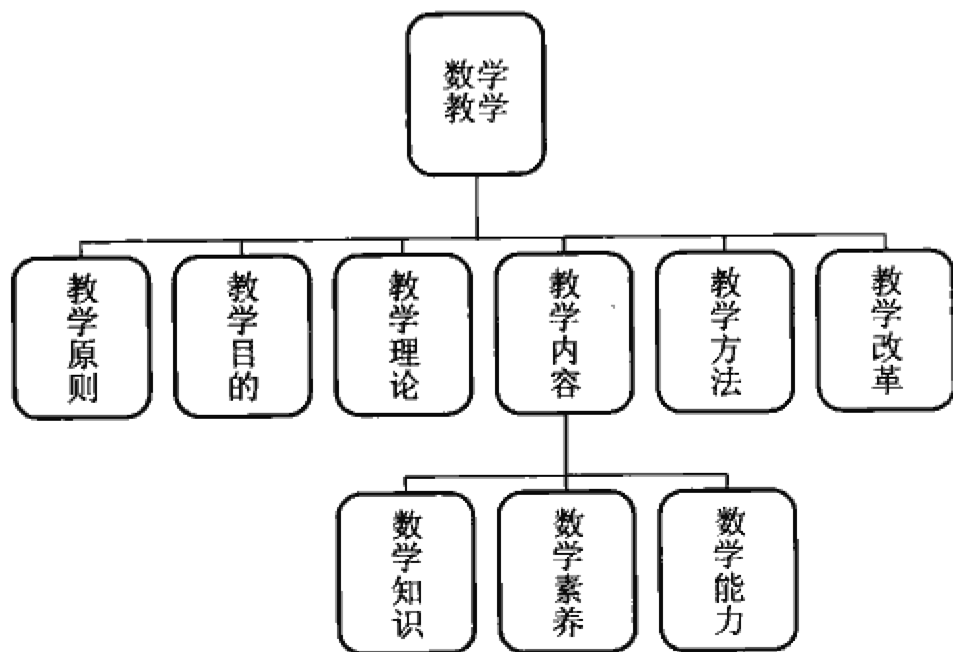


图 0.2　数学教学论的研究内容

4. 数学教学论课程的基本任务

(1) 帮助学生形成正确的数学观

赫什(Hersh,1979)教授说过“问题并不在于教学的最好方式是什么，而在

于数学到底是什么……如果不正视数学的本质问题,便解决不了教学上的争论"。[①] 一些研究(如 Thompson,1984)表明,教师专业数学思想的形成与他们表达数学内容的典型方式存在着一致性,这说明了教师的数学观、数学信仰和爱好的确影响着他们的教学活动。

中学数学教学中的许多问题的出现从一定程度上说是由于学生对数学的认识的片面或错误而形成的,因此使中学生正确地认识数学的本质,对解决数学教学中的问题往往起着关键作用。而使学生正确认识数学的关键又在于教师的对数学的正确认识,也就是说,使教师对数学有正确的认识在中学数学教学中有重要的意义。因此使师范生形成正确的数学观,使他们对"数学是什么?"、"数学是如何习得的?"、"数学应该怎样教授?"等问题有自己正确的回答,应该是数学教学论的任务之一。

其实,数学与客观世界有密切的联系,数学具有广泛的应用,数学是一门反映理性主义、思维方法、美学思想,通过数与形的研究揭示客观世界次序、和谐和统一美的规律的学科,数学是在探索、发现的过程中不断发展变化的。在学习数学过程中包含尝试、错误、改正与改进的过程,这是人们目前比较一致的对数学的看法。数学教师应从现实主义、文化主义、动态的易谬主义、静态的绝对主义 4 种数学观的不同侧面去全方位、立体地理解数学,认识数学。只有这样,才能在今后的数学中体现自己的数学观,并以此影响中学生。

(2) 帮助学生提高创新能力

创新是一个民族的灵魂,创新也是教育的灵魂,培养学生的创新能力是任何阶段的教育的重要任务之一,对师范教育来说意义就更为重要。因为对于数学教师来说,教育对象的复杂性和教育活动的艰苦性,以及数学的学科特点,决定了数学教师需要勇于探索、不断创新。

数学教学论课程一方面要将基本的教育原则、教育方法等理论传授给学生,另一方面也要将目前中学数学教育的问题和教师所面临的挑战告诉学生,并鼓励学生对问题提出解决方案,达到增强创新意识和提高创新能力的目的。

(3) 帮助学生提高科研能力

首先,基础教育改革需要教师具有科研能力。课程改革成功实施的关键,是其能否真正成为所有相关成员、特别是广大教师的共同事业。除去创造性的教学以外,我们应当大力提倡教师密切联系自己的教学工作积极地去进行教育教学研究。苏霍姆林斯基说过,在教育中很少有绝对的事,但有一点是肯定的,就是那些最好的中学教师是那些对教学能积极研究的教师。教育活动是一种科学性活动,它需要教师将其视为一项研究任务来完成。另外,中小学生的年龄阶

① [英]Paul Ernest 著. 数学教育哲学. 齐建华,张松枝译. 上海:上海教育出版社,1998,11(7).

段，是其身心发展的关键时期，也是知识成长能力发展的关键时期。教师的科研状况制约着教师的教学状况。素质教育能否实施，学生的素质能否得到全面发展，在很大程度上取决于教师的素质，能否培养出创新性人才，在很大程度上也取决于教师的创新能力，而教师的创新能力依赖于教师的科研能力。中小学阶段的数学教育是社会关注的热点，由高师培养出来的数学教师，理所当然要学习与研究以比较成熟的数学知识为内容、以面向特定年龄阶段的青少年为对象、以学校课堂教学为主要形式的数学教育。[①]

其次，教师自身发展需要教师具备科研能力。随着知识爆炸时代的来临，每一位教师在职前所掌握的知识是非常有限的，教师必须具有求异思维，不断创新，并在教育工作中不断提升自己的科研能力，才能不断更新自己的知识结构。因此，未来的教师的职能不仅仅是一个工作职能，教师应该是集工作职能与研究职能为一体，集工作主体与研究主体于一身的教育家。[②] 在基础教育改革的过程中，会不断遇到新的问题，教师如果不对这些问题进行研究，便会人云亦云，教学落于俗套，学生的学习没有收获，更难形成自己的教学观念和教学风格。只有那些具有科研能力的教师，才能不断在教学中吸取新的知识、反思教学行为，从而形成独具特色的教学风格。

(4) 帮助学生了解中学数学教育的特点

数学教学论课程是教师教育类的主要课程，是本科生和研究生从学生到中学数学教师的桥梁之一，学生通过数学教学论课程的学习应该把握中学数学教学原则、教学内容及教学方法，了解中学数学教学的特殊性，为成为一名中学数学教师奠定基础。

---

① 周春历，张景斌．数学学科教育学．北京：首都师范大学出版社，2001.1(3)．

② 唐松林．教师行为研究．长沙：湖南师范大学出版社，2002.6(252)．

第1章 中学数学教师

1

当今,全世界已经形成了一个共识,那就是综合国力的竞争可以归结为人才的竞争。人才的竞争实际上是教育的竞争,特别是基础教育的竞争,因为基础教育是一切教育的起始。因此,世界各国都大力发展本国的教育,特别是将发展基础教育作为重要的国策。要使中国的综合国力处于世界领先地位,必须先使中国的基础教育领先世界。教师是教学活动的主体,教师素质在很大程度上决定了教学的成败,教师的实力是决定教育实力的重要因素,因而也是整个国家实力的一个很重要的部分,提高教师的素质就成为各个国家的重要工作。

有研究指出,教师的行为取决于教师的观念。观念的形成在很大程度上依赖于理论的掌握情况。教师的教学策略和行为可以说明他所持有的相关的理念,反映一定的时代特征。因此,提高教师素质,首先要加强理论研究,从理论的高度认识教师素质的问题,从理论角度理解教师的素质的构成因素,理解教师素质对教学的重要意义。只有这样才能全面理解教师素质,并有计划、有目的地提高教师素质。教师素质的提高也依赖其理论知识的掌握情况。

目前,在我国的基础教育中,正在进行新一轮的改革,称为新课程改革。新课程的实施为教师的发展提供了广阔的天地和空间,也对教师的素质提出了新的挑战,在数学课程标准中,提出了"人人学有用的数学,人人学有价值的数学,不同的人在数学上得到不同的发展。"的基本理念,为了实现这一理念,使新课程改革取得实效,必须提高教师的素质。

本章从知识、能力、技能、教学风格等方面讨论一般教师的基本素质,再讨论数学教师所应具备的基本素质。

1.1 教师的知识结构

知识本身不是行为,但它是行为的基础。教师的素质与其掌握的知识具有密切的关系。知识是素质的重要组成部分,也是形成素质的前提。因而离开了知识谈论素质的问题是没有意义的。教师的知识不仅应该体现在量的多少上,而且应该体现在结构上。作为教师,不仅应拥有一定的知识量,更应拥有合理的知识结构,而且拥有一个合理的知识结构比拥有相关的知识量更重要。教育的

最终目的是为了学生的发展，教师及其知识结构不仅影响着教学的实施，而且影响着学生的学习。

因此，教师具备什么样的知识及结构必将对学生的未来发展产生极大的影响。

人类的知识如此繁多，我们应该如何分解人类的知识，并使之转变为教师掌握的个体知识？对于这一问题的研究，目前还未达成共同的意见，这里介绍几种有代表性的观点，这些观点都将教师的知识进行了分类。

1.1.1 第一种分类法

有研究者认为教师的知识由三个方面构成，即教师的本体性知识、条件性知识和实践性知识[①]。

教师的本体性知识是教师所具有的特定的专业知识，它是教师从事教学的基本保证条件之一。作为高中数学教师一般都具有大学本科或硕士研究生的学历，因此已经初步具有高中必修课数学教师所应有的专业知识。也就是说，教师经过大学的专业学习，已经基本具有本体性知识。当然在科学技术发展日新月异的今天，希望通过一次学习达到终身够用的目的是不现实的，必须不断补充和更新自己的本体性知识，才能适合于社会发展和教育发展对教师不断提出的新要求。

教师的条件性知识主要是指教育学和心理学等与职业相关的知识，包括对教学过程规律性的认识，对教育对象的了解和对学生成绩评价的知识等。条件性知识是教师的教学能否成功的重要保障。我国早在20世纪30年代就对教师职业展开过讨论，当时有一种很鲜明的观点，"教师不独是一种职业，并是一种专业……性质与医生、律师、工程师相类"。但至今，对教师是不可替代的专门职业仍未达成共识。教育部师范教育司有关负责人认为，原因可能有三方面：

一是在中小学教师数量尚不能满足需求时，教师队伍中难免有一部分人不合格，不称职；

二是中小学教师这一专业在我国发育的不够成熟，专业性不够强；

三是这一职业有一定的特殊性，教师的劳动成果需要通过学生的知识、能力、素质、个性、品性等诸方面的提高来体现，某个教师的直接教学效果难以定量确定，不易看到即现的成败效应。

随着教育和社会的不断发展，第一方面的问题正在得以解决，第三方面的问题也可以通过人们对教育的正确认识逐步得以解决。关键是第二方面的问题，当前还有不少人认为教师职业有一定的替代性，或者起码只能处于一个准专业

① 刘清华.教师知识的模型建构研究.北京：中国社会科学出版社，2004.5.

的水平，误认为只要有一定的学科知识就能当教师。顾明远教授指出，社会职业有一条铁的规律，即只有专业化才有社会地位，才能受到社会的尊重。如果一种职业是人人可以担任的，则该职业在社会上是没有地位的。因此，教师职业要成为一个专业，就要求教师职业具有不可随意替代性，具有条件性知识是达到这一目标的重要途径。也就是说，提高教师的地位，主要还是依靠教师自身素质的提高，而社会通过其他途径来达到这一目的只能在一定程度上起辅助性作用。

教师的实践性知识是教师在面临实现有目的的教学行为中所具有的课堂情境知识以及与之相关的知识，也就是教师教学经验的积累，这种知识更多地表现为教师的教学经验。拥有丰富实践性知识的优秀教师，对教学情境具有敏锐的观察力和判断力，能更透彻地分析问题，解决问题的方法和策略也更具有独创性、新颖性和恰当性。

因为实践性知识具有的个体性、情景性和开放性的特征，要求教师通过自我实践的反思和训练才能获得和确认。教师只有学会创造性反思，才能不断地思考发现，提炼出实践当中遇到的教学问题并加以解决，同时积极主动地寻求自己的专业发展，把教学的信念和技巧内化，使教学更加有效。

其实，实践性知识是任何一种专业人员都应具备的，它可以使人具备一些模式型知识。当面对问题的时候，如果人在大脑中储存了解决这一问题的模式，便能依据模式迅速解决问题，这也就是我们经常看到的有经验的教师比新教师在处理问题时，具有更多方法的原因。诺贝尔奖获得者赫伯特·西蒙（Herbert Simon）在研究人工智能中，发现棋王与一般棋手的不同之处，就是在棋王的思维中存在更多的模式。因此，当他在面对一个棋局时，总是这样思考"我见过这个棋局吗？它的来龙去脉如何？它的前一招是什么？它的后面局势会如何发展？"由此决定处理方式[①]。这一研究实际上也就说明了模式对人的重要意义，因此，一个教师必须对教学情况积累大量的教学模式，而这一目的的实现，就必须依靠教师的实践。

1.1.2 第二种分类法

有研究者将教师的知识概括为五个方面：即哲学知识；心理学知识；教育学知识；博与专的结构性文化基础知识；医学——生理学知识。以下我们讨论这几方面的知识对教师的影响。特别注意哲学和心理学对教师的意义，因为这是一个比较容易被忽视的问题。

1. 哲学知识对教师的影响

哲学是对现实世界最基本的问题进行研究的学科，对于教育来说，也存在许

① 劳伦斯·彼得，等著，改变人类生活的18条法则．艾柯译．北京：机械工业出版社，2004.1(171)

多基本问题,如教育目的的认识问题、教育对象的认识问题、教师的认识问题等,而这些问题的解决,必须首先将其上升到哲学的高度来认识。历史上成功的教育家也多是哲学家,而杰出的哲学家,一定是教育家。其实,教师的行为要以教师对教育的基本认识为基础,也就必然要以其哲学观点作为理论基础,然后才能确定教育行为的目的,选择教材与教法,支配整个教育活动。正如哲学家兼教育学家杜威所说"哲学是教育的普遍原理"、"教育是哲学的实验室"。因此哲学是教育理论与实践不可或缺的明灯,教育目的的决定,内容的选择,方法的运用,都需要哲学的智慧,才不至于迷失方向,合乎人类进化,实现教育理想。我们从以下几个方面来具体认识哲学对数学教师的意义。

(1) 教育的价值取向需要深厚的哲学基础

教育发展的历史证明,教育目的与世界观、人生观和价值观的关系十分密切。任何人都有自身的价值取向,教师的价值取向决定了教师的教育目的和教育行为,而教师的价值取向由其哲学思想决定。从这个角度说,哲学思想决定了教师的教学活动,从而决定了学生的学习活动,实际上也就决定了教育过程和教育结果。

我们可以将教师的教育价值取向从总体上概括为两类,即以社会为本位的教育价值取向和以个人为本位的价值取向。这两种价值取向也分别是不同的教师所持有的价值取向,下面看一个案例[①]:

小汤姆星期天没有上学,闲着没有事干,爸爸与小汤姆商量能否利用星期天帮家里把菜园的那块空地挖一遍,以便种上蔬菜,挖完之后,爸爸说给小汤姆 50 美元奖金。小汤姆听后感到很高兴,因为他有可能得到 50 美元奖金,但同时也感到忧虑,因为这块地太大,挖完也不容易。于是小汤姆想出一个好办法,他找到了街坊的四个伙伴,吩咐他们每人挖一小块地,即那地的四分之一,挖完后如果符合标准,每人能拿到 10 美元,这四个小朋友听后也很高兴,于是就很快地完成了任务。之后,小汤姆到爸爸那里领取了 50 美元,给四个小朋友每人发了 10 美元,自己还剩 10 美元。教师知道后在全班表扬了小汤姆,老师说,希望我们小朋友都向小汤姆学习,学习他坐享其成,不劳而获得 10 美元。

如果你是小汤姆的老师,你会怎样对待这件事呢?会和小汤姆的老师一样吗?实际上,这就涉及哲学观的问题。从哲学的角度出发考察这个案例,这位教师的方法不无偏激,是一种典型的自然主义哲学思想使然,属于个人本位论的价值取向,它尊重儿童的本能的需要和发展,鼓励人的自我奋斗,但忽视了社会性需要和发展,这与社会本位论的思想是有本质区别的。也许一个社会本位论的教师会鼓励学生们无偿地帮助小汤姆,从小就养成助人为乐、奉献社会的品质。

---

① 郑毓信.数学教育哲学.第 2 版.成都:四川教育出版社,2001.9.

也可能会认为小汤姆应该无偿帮助家里。但不管怎样的处理,都代表着教师的价值观。这一案例说明,教育哲学思想不同,会存在不同的教育价值取向。

其实任何人都具有社会性和自然性,过分强调某个方面都是不正确的。过去我国在教育实践中,在教育目的的价值取向上,也长期存在着社会本位与个人本位的争论。教育理论界虽然也反对极端的社会本位的价值取向,但是具体实践中,往往过分注重教育为政治服务而忽视人的价值。其实从社会历史的总的进程来看,社会进步与个人发展是密切联系、互为条件、互为因果的。这也是马克思主义在这个问题上的观点。马克思主义认为,教育目的不仅反映社会对人的发展的需要,而且也反映作为社会生活主体的人对自身发展的追求,两者有着内在的统一性。教育只有以促进人的个性发展为目的,提高人的内在价值,肯定人的主体地位,增进个人在改造自然、改造社会中的自由度,他自身才能成为推动社会发展与变革的积极力量,这是马克思主义哲学在我国教育转型的新形式下的体现。

总之,一种教育目的的建立,不管是适应社会的需要还是有利于个人的人格发展,都必须以哲学为最高指引。哲学思想不同,教育目的就不同,教师行为、方式等一切也都会有根本的不同。

(2) 哲学为教师形成自身的数学观奠定基础

哲学是研究世界的最一般规律的科学,对数学教师而言,最一般的问题就应该是"数学是什么"的问题,即数学观的问题。因为数学教师的数学观就是对数学的基本看法的总和,教师的数学观决定了教师的数学教育观,从而决定了数学教育行为。因此,数学教师必须对"数学的对象、性质、特点是什么?"、"数学是经验的,还是演绎的?"、"数学对象是否存在、以什么方式存在?"等数学的基本问题进行认真的思考,才能在教学中避免盲目性,也才能形成自己的教育风格。要对这些问题有客观的回答,首先就必须用哲学的眼光对数学发生和发展过程以及规律进行分析,因此,哲学是确立数学观的基础,也就是教师从事教学的基础。

"数学是什么"的问题,一直是哲学史上争论不休的问题,对这一问题的认识,在一定意义上就代表了哲学的观点。我们知道,数学不直接研究事物的质的规律,而是研究事物量的规律性。而且数学研究方式是对抽象的数学对象进行研究,如在数学证明中,我们不是对某一"图形"的性质进行证明,因此就不能依赖图形,图形"只不过是用来使人容易理解所要说的是什么,并用以使注意力得到固定(莱布尼茨语)。"因此在哲学上一直存在检验数学的标准是数学本身还是实际的争论。而且数学对量的认识是不断深入的,或者说,数学不断揭示出量的新的表现形式。因此教师必须从时代的量的具体表现形式中,概括出反映该时代数学研究对象的特点,以回答与该时代认识发展相符合的数学是什么的

问题。

由于人的认识不能一次完成，对数学的认识也就随着研究的不断深入而不断完善，因此关于数学的本质，数学家的看法并不是一成不变的，它是随着数学的发展而变化的。这种情况大致是[①]：

古希腊以前的数学都是在人们的生活和生产实践中产生的，是一种经验的积累和总结。所以那时人们一般认为，数学像其他自然科学一样，是一门经验的科学。

古希腊时期，崇尚理性的兴起，特别是不可公度量（即无理数）的发现引起第一次数学危机。使一些数学家和数学哲学家认为，感性直观是不可靠的，只有理性演绎推理才能保证数学的可靠性。特别是由于数学的公理化方法的集大成著作《几何原本》的诞生，改变了人们对数学是经验科学的看法，认为数学本质上是一门演绎的科学。这一方面使数学从经验中解救出来，另一方面也就使数学面临脱离实际的危险。

到了16—17世纪，生产和科学技术的发展促使微积分和解析几何的产生。尽管当时的微积分在理论上还不严格，但生产实践证明了它的有效性。所以数学家和力学家继续用它来解决实际问题。数学家在实际应用微积分的过程中，又发展了它，产生了新的数学分支，形成以微积分为核心的分析学科。数学的这一发展过程使人们对数学的总体看法是：数学依然是一门经验科学。

19世纪出现分析算术化、非欧几何，形成理论研究的潮流，由此产生数学研究的分工。出现从事理论研究的数学家和从事应用研究的数学家。上个世纪30年代，又出现数学是经验科学还是演绎科学之争。

上述关于数学的认识的简单回顾，可以使我们形成一个观点，那就是，对数学的认识将随着数学的进一步发展更加完善。新的课程标准认为："数学是人们生活、劳动和学习必不可少的工具"，"数学为其他科学提供了语言、思想和方法"，"数学是人类的一种文化，它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。"这实际上包含了以下三层意思。

首先，作为其他绝大多数重大技术发展的基础，数学是一种工具；其次，在提高人的推理能力、抽象能力方面有独特作用并为其他科学提供了语言（内部的和外部的）、思想和方法的数学是一门国际通用语言，有助于提高人们选择、整理、交流、表达、应用信息的能力；最后，在内容、思想和方法等诸方面不断传承、创新的数学是人类的一种文化，是现代文明的重要组成部分。

关于数学是文化的问题，目前已经达成共识；然而在数学教学中，却往往存在只将数学看成是知识或工具的现象。教师将数学教学的注意力往往集中在知

---

① 林夏水．数学哲学．北京：商务印书馆．2003．7（301～302）．

识的传授和使用上；而对数学的文化作用，也就是说对数学对于人的精神的作用却关注很少。因此无论是教师还是学生，都应当消除以往那种消极的、片面的不利于数学学习的数学观，即只认为数学仅仅是由高度抽象的数学符号组成的严谨的知识体系的观念。而应将数学看成是一个由知识、思想、方法、精神等构成的统一体。充分发挥数学对人的全面塑造的作用，也就是发挥数学对人的素质提高的作用，使数学教育真正成为素质教育。

上述可以看出，数学教师的数学观是指导其进行数学教育教学改革的先导，影响和决定着教师的教学行为和学生的数学观与学生的数学学习表现和动机。对于数学教师来说，对数学的认识如果只停留在对数学的表面的理解，对于数学教育研究工作和对数学教学实践都是远远不够的，必须对数学的本质进行认识，也就是要利用哲学的手段来分析数学的发生和发展过程。

另外，在数学中存在大量的对立统一的问题，如无限与有限、抽象与具体、精确与近似等，对这些问题的深入分析，必须依据教师对辩证唯物主义的理解和认识。

(3) 哲学有利于教师对数学教育目的的认识

教育，作为人类社会的一种自觉活动，其主要特征即是具有明确的目的性，而且教育目的在很大程度上决定了教学内容、教学方法，乃至整个的教育过程。

数学教育目标随着社会发展和数学发展而不断变化，而数学教育目标的发展取决于其基本矛盾，即数学教育的“数学方面”与“教育方面”的矛盾，两个方面的均衡发展是数学教育成功的关键。对数学教育的两个方面的任何片面强调，都将导致数学教育的失败，而辩证认识和处理数学教育的两个方面，依赖教师的哲学思想。

例如，众所周知的20世纪60年代在世界范围内展开的数学教育改革运动“新数学运动”，就是因为过于强调数学教育的“数学方面”而忽视“教育方面”而未取得成功。“新数学运动”的一个主要目标就是要以现代数学思想对传统的数学教育进行改造，从而实现数学教育的现代化。其实这一出发点是对的，关键就是在强调及早地引入现代数学概念的同时，没能依据教育的规律去对这些概念的“可接受性”(相对于不同年龄的学生而言)和正确的教学方法作出深入的分析，从而作出相应的努力，才导致有关的教学活动的失败的不可避免。

以下是所说的“失败的教学”的一个典型例子[①]：由于集合概念在现代数学中占有特别重要的位置，因此，“新数学运动”就强调了应当在中小学甚至于在幼儿园及早地引入这一概念。以下“故事”正是在这一背景下发生的：一个数学家的女儿由幼儿园放学回到家，父亲问她今天学到了什么？女儿高兴地回答道：

① 郑毓信. 数学教育哲学. 第2版. 成都：四川教育出版社，2001.9

"我们今天学了'集合'"。数学家想,对于这样一高度抽象的概念的学习来说,女儿的年龄实在太小了。因此,他关切地问道:"你懂吗?"女儿肯定地回答:"懂!一点也不难。"这样抽象的概念难道会这样容易吗?听了女儿的回答,作为数学家的父亲还是放心不下,因此,他又追问道:"你们教师是怎样教的?"女儿说:"女教师先让班上所有的男孩子站起来,然后告诉大家这就是男孩子的集合;其次,她又让所有的女孩子站起来,并说这就是女孩子的集合;接下来,又是白人孩子的集合,黑人孩子的集合,等等。最后,教师问大家'是否都懂了?'她得到了肯定的回答"。这样的教学方法似乎也没有什么问题,因此,父亲就以如下问题作为最后的检验:"那么,我们能否以世界上所有的匙子或土豆组成一个集合呢?"迟疑了一会儿,女儿最终回答道:"不行!除非它们都能站起来。"

显然,这里的问题就在于"集合"是一个高度抽象的概念,由于集合概念不能像许多其他数学概念那样给出准确的定义,因而对于高中生来说,理解都有一定的困难,这一概念的教学就显然超出了幼儿园孩子的接受水平,将其作为一个思想适当地进行渗透是可以的,而详细介绍这一概念,则只可能导致对概念的误解。这些问题都是由于"新数运动"过分强调了数学教育的数学方面,而相对忽视其教育方面,从而造成的教育与学生的可接受状况不相适应的问题。

然而,只强调数学教育的"教育方面"而忽视"数学方面"也是不能取得成功的。如,在数学教学中,如果对数学结论只停留在直观解释而不进行严格的证明,是不能使学生学到真正的数学的,也难以使学生认识数学的本质。

如何处理好数学教育的"数学方面"和"教育方面"是检验一个教师是否能从哲学的角度对这两者的辩证关系进行分析的问题。教师只有具备了一定的哲学知识,才能认识到这两者之间的辩证统一性,也才能在教学中正确处理好这两者之间的关系。

2. 心理学对教师教育行为的影响

(1) 心理学对教师教学的影响

目前,西方流行的学习理论有十种之多。这众多的学习理论大体分为两大体系:一是行为主义心理学,即刺激反应学习理论,其代表人物有:桑代克、华生、斯金纳等;二是认知学习理论,其代表人物有:苟勒、托尔曼、布鲁纳、奥苏伯尔等。刺激反应学习的共同特点是:一切心理现象或所有的学习都归结为刺激反应联结的形成,强调学习发生的原因在于外部的强化。认知学习理论的共同特点是:学习是通过对情境的领悟或认知,以形成认知结构而实现的,对学习强调头脑内部心理的因素及其作用。

不同的学习心理学对教师的教学行为产生不同的影响,如果教师持有行为主义心理学观点,则在教学中遵循刺激反应原则,相信只有通过反复强化才能学得知识,在数学教学中就将坚持以强化为特点的"题海战术"。如果教师持有认

知心理学的观点,则在教学中遵循知识建构的原则,将注意力集中于学生原有知识与现有知识之间的联系,注意知识的学习过程,在数学教学中就将坚持以学生自身建构为特点的认识过程。

当然,我们并不主张过分肯定一种理论而否定另一种理论,关键是教师必须对各种理论进行分析。每一种理论都有其存在的价值,也都有其适用的范围,教师记住了一些心理学理论的结论是不够的,要能够运用这些理论的观点对教学进行分析,并在运用时,注意理论的可取之处和不足之处,只有这样才能认为掌握了理论。

(2) 心理学对教师自身心理健康状况的影响

教师充当着知识传授者的角色,同时又充当直接领导学生的组织者的角色。教师对这双重角色是否胜任,将决定其教育活动是否成功。早在 1996 年,联合国就有专家就预言:从现在到 21 世纪中叶,没有任何一种灾难能像心理危机那样给人们持续而深刻的痛苦。

目前我国正常人群心理障碍的比率在 20% 左右。然而,据国家中小学生某课题组前不久对某省内 168 所城乡中小学的 2 292 名教师所进行的检测结果中,表明中小学教师心理障碍发生率接近 50%。中小学教师心理健康,已经成了一个无法回避的话题。

过重的工作压力导致教师心理空间被严重挤压扭曲。职业的特殊性决定了教师心理常常超负荷。教师扮演的是为人师表的角色,这种职业的神圣感在客观上迫使教师不得不掩盖自己的喜怒哀乐。同时,由于高考竞争的日趋激烈,社会对教师的期望值也越来越高。面对家长的望子成龙和学校的以升学率论英雄,以及社会的沉重期望,不少教师往往"载不动许多愁",如不及时加以有效的疏导,长此以往,势必会使心理不堪重负。

分析起来,高考的白热化竞争,首先源于我们几千年科举制度的遗风,也源于学生家长不适应当前市场经济的心态。考好了,家长夸自己的孩子聪明。考砸了,教师便要承担第一责任。

高考无论给学生还是教师乃至社会其他方面(如学生家长)都造成了一定的压力,及易导致心理健康问题。当前,学生的心理问题已引起全社会的重视,不少学校建立了学生的心理咨询机构,配备了专门的心理教师,而教师的心理问题还没有引起人们的足够重视。许多教师常年因各种因素所造成的心理压力,得不到有效的释放。

教师的职业性质决定了其工作时间是不会随下班而结束的,他们必须在下班后再备课、进修、学习、家访等。在这样的工作重压下,由于目前社会还没有成立一些相关的组织解决教师心理健康问题,因而教师需要掌握一些自我心理调节的方法。教师心理健康的标准有以下几个方面。

1）能积极地悦纳自我

真正了解、正确评价、乐于接受并喜欢自己，承认人是有个体差异的，允许自己不如别人。一个人（包括教师）只有自己悦纳自己，才有可能得到其他人的悦纳，我们很难想象一个自己都不喜欢自己的人能够得到他人的喜欢。因此，作为教师首先必须乐于接受自己，才有可能得到学生的爱戴；

2）有良好的教育认知水平

能面对现实并积极地去适应环境与教育工作要求。具有敏锐的观察力及客观了解学生的能力；具有获取信息、适宜地传递信息和有效运用信息的能力；具有创造性地进行教育教学活动的能力；

3）热爱教师职业，积极地爱学生

能从爱的教育中获得自我安慰与自我实现，从有成效的教育教学中得到成就感；

4）具有稳定而积极的教育心境

相信一切困难经过努力都是可以克服的。能够相信教育是可以有所作为的，但教育不是万能的。教育的目的是使每一位学生都达到自己最好状态，但并不能使每一位学生都达到相同水平；

5）能自我控制各种情绪与情感

繁重艰巨的教育工作要求教师有良好的、坚强的意志品质，教学工作中有明确目的性和坚定性；处理问题时有决策的果断性和坚持性；面对矛盾时有沉着冷静的自制力，以及具有给予爱和接受爱的能力；

6）和谐的教育人际关系

有健全的人格，在人际交往中能与他人和谐相处，积极态度（如尊重、真诚、羡慕、信任、赞美等）多于消极态度（如畏惧、多疑、嫉妒、憎恶等）；

7）能适应和改造教育环境

能适应当前发展、改革与创新的教育环境，为积极改造不良教育环境、提高教学质量献计献策。

现代教育主体的合格教师除具备常人拥有的健全心理外，还应具备一个职业教师的健康心理素质，它体现在以下三方面。

1）能够对全体学生具有爱心。是指由教师的理智感、职业道德感和美感凝聚的一种对所有学生、特别是成绩不佳、品行不良学生的高尚情感；

2）具有相当的教学机智，包括善于因势利导、随机应变、有的放矢，掌握教育时机与分寸；

3）能通过非“高压”手段树立自己的威信。包括高尚的师德、渊博的知识和高超的教学艺术；与学生保持长期的密切交往，了解学生的心理状况，能指导学生的生活；能在各方面成为学生的表率；有当面向学生承认错误的勇气；有良

好的仪表和生活作风。

由上述可知，教师的心理学知识具有两个方面的重要价值，一个是依据学生的心理发展水平进行教学，从而提高教学的效率，另一个是能够有效地调节自己的心理环境，从而以良好的心态面对自己的事业。目前，我国心理咨询和治疗还处在不十分发达的时期，后一方面显得尤其重要。

3. 数学教育科学知识

数学教师专业的特殊性，不但要求教师要掌握足够的数学学科知识，而且要掌握将数学知识的学术形态转化为数学教育形态的教育学科知识，也就是掌握将数学教材中的内容与教育学、心理学知识相结合，形成学生乐于接受的教育形态的知识。数学教师专业劳动不仅是一种创造性活动，而且是一种综合性艺术，缺乏教育学科知识的人决不能成为一个合格的数学教师的。在高师院校数学系，呈现这方面知识的课程主要有：教育学、心理学、数学教育学、数学教育实习、数学教学与信息技术等，这些课程是师范性的标志。

4. 博与专的结构性文化基础知识

如果教师不兼有科学、社会与人文三者相互补充的知识体系与思考模式，不仅有损于自身发展和素质的全面提升，而且对学生所造成的影响也是深远的。苏霍姆林斯基曾经说过："在课堂里教授的知识，只是你所需要掌握知识中很少一部分。要给自己立下几条规则：每天，毫不含糊地，至少阅读五页关于无线电物理学或相近科学——电子学、仿生学等学术期刊"。他还说，读书不是为了应付明天的课，而是出自内心的需要对知识的苛求。如果你想有更多的空间时间，不至于把备课变成单调乏味的死抠教科书，那么就要读学术著作。

在现实生活中常有这样的事：每年中学或大学数学系招聘数学教师时，都要进行试讲，其结果往往是，高师院校数学系的毕业生无论是教案，还是板书设计、教学语言、教态、组织教学、课堂应变能力、抓住教学重点的能力、突破教学难点的能力，以及教学方法的运用能力等都要胜过综合大学数学系的学生。这说明高师院校数学系的学生不但受过数学学科的职前培养，还受过教育学科特别是数学教学的培养，具有较好的教师基本技能。而综合大学数学系的学生明显缺乏后者的培养。但另一方面，随着教龄的增长，在数学学科教学水平提高后，若要成为一名学者型或专家型的数学教师，往往综合性大学毕业的教师要胜一筹。高师院校数学系的毕业教师往往缺乏后劲，数学学术功底多不如综合大学毕业的数学教师。这说明高师院校毕业的数学教师在数学学科的水平、科研水平和综合发展水平均低于毕业于综合大学的数学教师。上述情况的出现往往引发师范性与学术性之争，也说明专业知识对教师发展的重要意义。

上述情况实际上就意味着数学教师教育中双重学科基础所形成的结构性的矛盾，也说明要成为一名专家型的数学教师，既应具有数学学科方面的扎实知

识,又应具有数学学科教育方面的知识,并应使知识形成良好的结构。

5. 医学——生理学知识

一般地说,教师的行为对对象产生的效果不仅仅是心理方面,同时还有身体方面。因此,个体生理特点及反映机制及机体保健的有关知识,对教师来说意义重大。另外具备一定的医学知识对应付教学过程中的突发性事件是有价值的。

总之,教师需要有渊博的知识,才能在教学中取得良好的教学效果。苏霍姆林斯基指出:"关于学校教学大纲的知识对于教师来说,应当只是他知识视野中的起码知识。只有当教师的知识视野比学校教学大纲宽广得无可比拟的时候,教师才能成为教学过程的真正的能手、艺术家和诗人。"波利亚(Pólya G)也明确指出,中学数学教师应该熟悉中学教材本身,而且要懂得更多一些,所谓"更多"不是一个渐进的差别,而是与中学课本内容有着质的差别。

教师的知识和学生的知识不仅仅是一桶水和一杯水的关系,教师知识应该是一条流动的溪,是喷涌而出的甘泉。只有教师拥有一泓甘泉,才能为学生捧出一杯新鲜的活水。这一杯"活水"的送出,需要教师对知识的追求,对知识的不断学习和吸收。现代知识社会的特点就是知识爆炸和学科的交叉。作为以传授知识为使命的教师,面对"生有涯而知无涯"的现实,只有终生学习,不断进取,使自己具备渊博的学识和广阔的知识视野,才能适应时代的要求,胜任教师工作。

1.2 教师的能力结构

能力是顺利完成某种活动所需要的个性心理特征。教师要顺利完成教学活动,就需要一定的能力作为条件和保证。能力对于数学教师专业发展的意义和重要性毋庸置疑,然而数学教师应具备哪些能力却是仁者见仁,智者见智,目前比较一致的看法是教师必须具有以下能力。

1.2.1 科研能力

教师必须具有一定的科研能力。随着教育的不断发展,科研能力已经成为教师教育行为的重要支撑,也是教师教育创新的源泉。苏霍姆林斯基说过:"如果你想让教师的劳动能够给教师带来乐趣,使天天上课不至于变成一种单调乏味的义务,那你就应当引导每一位教师走上从事研究这条幸福的道路上来"。教育科研能力是基础教育教师所必备的能力。现代教师要从经验型转向研究型,要成为新的教育思想、教育理论、教育内容、教育方法、教育对象的实践者和研究者,要提高教学水平,培养适应社会发展的创造性人才,就必须对各种教育现象进行研究。那种"教教材"的"教书匠"的传统做法已经不适应现代教育的

需要。而且高效率地提高学生素质，迫切地呼吁教师的创新智慧，而创新智慧来自对教育的研究。所以，教师必须以研究者的姿态进行教育教学，并在不断地研究与探索中，有所发现，有所创造，成为专家型教师。

从教书匠的角色定位向既是教书匠又是教育家的双重角色转变，要求教师不仅是知识的传授者，还应该是知识的创造者。教师不仅应该是优秀的讲授者，还要是数学教育的研究者。中国的数学教育由于教师一直处于被课堂外的各种控制的束缚中，没有自主权，所以形成一种被动教学的局面，改变这一状态就需要更多的研究型教师。因为教师只有通过自己的研究，才能更深刻地理解和认识教育过程中的各种现象，并能洞察教育现象的未来，形成具有创新意义的理念，因而也才能针对这些现象提出创造性的教育方案，从而逐步形成自己的教学风格，而不受现状的约束。

教师的作用更多地体现在创造出怎样的课堂环境、选择什么样的一种教学策略来促使学生进行更有效的学习，这就需要教师去思考、去研究。也正因为如此，教师的科研能力的提高的最终受益的是学生，因而从学生发展来看，教师的研究能力也必须受到重视。

随着新一轮基础教育改革的不断推进，许多新的教育现象需要教师去研究，这对教师提出了挑战，特别是对年青教师提出了挑战。因为有经验的教师可以用其精湛的技能来暂时应对新的教学问题，而技能缺乏的青年教师只有依靠自己的研究来解决教学中的问题，从而弥补在经验上和技能上的不足。但是，由于目前我国的师范教育在研究能力培养上还未取得显著成效，因此，研究能力的缺乏成为未来教师的一个很大的缺憾，改变这一现象就是教师要具有研究意识和观念，并努力发展自己的研究能力。然而，研究能力的培养绝不是一种应急手段，而是教师教育智慧的积累过程，从而也就是教师从事教育的原动力。因此，无论是应对目前的挑战，还是应对长远的发展，教师都需要很强的研究能力。

1. 教师科研能力的具体内容

教育研究能力主要指教师对各种教育现象能够从理论的角度进行分析，发现这些现象的本质和产生的原因，并对其进行深入研究，提出有创新意义的教学方案，并在教学实际中不断调整方案，达到实现教学目的的目标。教师的科研能力主要由两部分组成：一是教育信息处理能力，是指吸收、更新和处理教育知识的能力；二是教育创新能力，是指获取新知识、扩充新知识的能力。

2. 教师教育研究能力的体现

教师具有研究能力，便能在日常的教学工作中表现出一些特点，主要是以下几个方面。

(1) 有寻求意义的心理定势

指教师善于从教育事实中发现问题、发现新现象的意义。表现为教师对教

育实践和周围发生的教育现象的具有反思的思维定式。对日常工作保持一份敏感和探索的习惯,不断地改进自己的工作,并形成理性的认识。也就是说能够从理性的角度分析日常的教育现象,能够经常反思自己的教育行为。

(2) 有不断选择、改造、求异和创新的个性

教师善于深入现实,不断地选择新的教育信息,清晰地界定自己面临的教育问题,系统地尝试解决问题,反思和分享自己努力的成果。

(3) 研究与行动结合

教师善于不断地将自己的研究成果运用于教学实践,并在实践中检验和发展,形成系统的理论或实践经验。

(4) 能不断训练自己的教育智慧

教育研究能力的最高层次是教育智慧。它要求在教育实践中,教师应冷静分析,敏锐观察,亲身感受,准确判断所出现的新形势和新问题,通过不断吸收和运用他人的研究成果,形成解决问题的对策,从而增强教育研究的能力。在此基础上,形成独具特色的教育理论。

1.2.2 交流能力

教师教育对象是人,需要教师与学生之间进行精神的沟通,情感的交流,引导学生健康活泼地成长。师生之间的合作是形成良好班集体的重要因素,学生可以通过与教师的合作形成合作的理念。1997 年联合国教科文组织曾发表文章《学习——财富蕴藏其中》,提出现代教育必须建立在四个基础之上而形成大厦,即:学会合作,学会学习,学会生存,学会创新。为此,只有把合作的观念贯穿在整个教育过程中,才能使课堂产生活力,具有凝聚力。而且教师合作能力和合作行为对学生起着示范的作用,对学生合作意识的形成和合作能力的培养有较大的促进作用。

教师工作是一种用生命去影响生命的过程。学生是社会中活生生的人,有自己的情感,这就要求教师必须用情感去教育学生。教师首先要了解学生,了解愈深,爱之愈烈。其次对学生的关怀要落到实处,每个学生都希望得到老师的关怀、体贴与信任,教师的一言一行,一举一动,甚至见面与学生打一个招呼,幽默几句话,都可以促使师生关系的转化,以此形成一种学生尊重老师、老师关爱学生的新型师生关系。这种关系的确立,促使教师用自己的生命去扶助一个个正在成长的生命,任何辱骂和体罚学生的行为便没有存在的理由,与学生交往中的任何困惑都可以克服。

有的教师埋怨,我工作的一切都为了学生,可有的学生就与我对着干。这恰恰是教师自身所表现的行为所决定,教师居高临下、盛气凌人,不是教育学生,而是想方设法对付他们,这就形成一种不愉快的师生关系。在课堂上由于教师与

学生之间缺乏交往与交流，往往课堂就变成了教师唱独角戏的舞台，而学生就成为不十分情愿的观众。这的确是教育工作者的一种失败。所以，只有用生命的意识去影响学生，看待教育对象，才能促使教师迸发出对学生爱的火花，构筑一种新的和谐的师生关系。苏霍姆林斯基曾说：教师高高，学生矮小，应蹲下来与他们交流。教师与学生交流的内容很多，需要教师必须具有一种谦虚合作态度。

教学活动是师生的共同活动，教学就其本质而言，是交往的过程，是对话的活动，是师生通过对话在交往与沟通的过程中共同创造的过程。这种思想并不是新近才提出的，叶澜教授就曾经指出："人类的教育活动源于交往，在一定意义上，教育是人类一种特殊的交往活动"。

在新课程的实施中，教师必须学会交往，特别是在课堂上，教师只有学会与学生之间的交往与交流，学生的主体地位才能真正落实。此外，师生之间的交往首先要求的是两者的心理地位平等，任何一方不能感觉到心理受到压抑，同时，交往更强调的是双方的"敞开"与"接纳"。在这样一种课堂环境中，教师与学生各自凭借自己的经验，用各自独特的表现方式，在教学过程中通过心灵的对接、意见的交换、思想的碰撞、合作的探讨，实现知识的共同拥有与师生的共同发展。

对于数学教师来说，与学生的交流显得尤其重要。因为数学的学科特点，使部分学生对学习数学没有信心，教师与学生的交流，可以发现学生的问题，并及时解决问题，为学生进行下一步的学习奠定基础。

另外，教师也是工作群体的一员，要有与同事融洽相处，合作共事的能力。教育不仅涉及学校，同时还涉及家庭及社会；所以教师还应具备与家长、社区有关人员沟通与合作的能力。

长期以来教师的交往与交流能力一直没有受到应有的重视。教师之间缺乏交往，每个教师守着自己独有的所谓"解题秘诀"不放，不用说在教学经验上教师缺乏交流，就是在专业知识上由于各教师的保守也得不到相应发展。这在一定程度影响了教师队伍的整体素质的提高，改变这些现象的有效措施之一，就是创造教师能相互合作和交流的环境。

新的课程改革提出了合作教学的思路，也就是说同一学科甚至不同的学科构成一个教学集体，围绕某一教学专题开展教学，这不仅要求教师具有较强的合作意识，也要求教师具有很强的合作能力。

1.2.3 掌握和运用现代信息技术的能力

当代社会，科学技术日新月异。计算机和信息科学技术智能化、信息网络全球化、国民经济信息化的时代已经到来，将信息技术作为现代教学手段势在必行。21 世纪，"文盲的概念将发生根本的变化，不会使用计算机等先进工具或不

会检索、处理和利用信息资源的人将成为‘信息时代’的新文盲特征。”①科技的现代信息技术已走入校园为现代教育服务，因此教师必须迅速适应科学发展的形势，学习、掌握一定的现代教育技术手段，“一本书，一张嘴，一支粉笔，一堂课”已不适应现代教育的要求。

将现代信息技术运用于课堂教学，并不是一件很容易的事。因为教师具有信息技术并不代表能够使教学质量提高，关键还在于如何将信息技术运用于教学之中的策略，要善于选择适当的内容、善于选择恰当的时机，这其中就体现了教师的能力。

1.2.4 学习能力

未来社会是一个学习化的社会，要求教师成为终身的学习者。瑞士的查尔斯·赫梅尔曾指出：“终身教育是唯一能够适应现代人，适应生活在转变中的世界和变动社会中的人的教育。这样的人必须使自己能够不断地适应新情况。”把握时代的脉搏和教育改革的方向，教师必须树立终身学习的观念，提高自己的学习能力，才能时时充电不断更新自己的教育观念与知识结构，掌握科学的教育方法，提高教学效率，适应现代教育的需要。

教师的学习能力不仅应该体现在能够不断地吸取知识，还应该体现在能有效利用学习条件。由于教师是课程改革的主力军，如何引导帮助教师提高自身素质，主动迎接教育改革的挑战，建立有效的、促进学校发展，促进教师专业成长的师资培训成为学校永恒的话题。目前，由各学校本身开展的教师培训方式应运而生。很多学校为教师创造了一定的条件，使教师在自己身边就能获取最新的知识，但实际情况是，许多教师并没有在这些活动中有较大的提高。究其原因，主要是部分教师不善于运用这些条件提升自己。所以，从某种意义上说，善于利用学习条件给自己充电的能力，比理解和吸收知识的能力更重要。

1.2.5 组织和管理课堂活动的能力

在新课程理念下，学生数学学习活动不应只限于接受、模仿和练习，还应提倡自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习数学的方式。自然地，在充满探究气氛的数学课堂中，课堂也不会再沉闷，更多的喧哗声代替了往日的宁静，习惯于一个人在讲台上做演讲的教师马上就会显得不太适应。面对这种现象，一位台湾的数学教师说过：“有时教师也得容忍这种嘈杂声。”

面对全新的课堂，很自然有以下结论，即一个教师组织和管理课堂的能力高低在很大程度上事先决定了学生学习的效率。课堂活动若组织管理得不好，那

---

① 中国教育报.1996.1.24

么除了大声喧哗,就是零零碎碎的毫无主题的讨论声,在这样一种课堂环境中学习的效果就要大打折扣了。

有教师曾经考察过荷兰一所学校的"活动课",气氛非常热烈,但整个教室却很平静,无论学生和教师都是在轻声的交流,拿东西十分小心。表明活动课并不都表现为表面的热闹,而是可以在一种安静的环境中开展气氛热烈的合作。特别是数学活动,关键是教师怎样组织,能否自如地控制课堂教学,形成收放自如的课堂氛围,体现了教师的组织管理能力的状况。

组织管理教学的能力一方面体现在教师对教学过程的设计和管理方面,另一方面也体现在对维护教学次序方面。教师的管理能力体现在能及时发现并纠正干扰教学活动的不良行为,由于学生还处于成长阶段,课堂教学中往往会出现一些意想不到的突发性事件,教师要善于引导,善于利用有效的手段使课堂教学顺利进行,这就说明了教师的组织管理能力的重要性。因此教师(特别是青年教师)一定要加快吸收组织和管理课堂活动的各种知识和经验,提高自己的组织和管理能力。

1.2.6 综合各学科知识的能力

新课程强调了学生提出问题、分析问题和解决问题的能力,"问题解决"逐渐受到重视。而"问题解决"中的问题,不一定再是教师精心设计好的有规则的数学题,它可以由教师提出,也可以由学生提出;可以是数学学科的拓展和延伸,也可以是对自然和社会现象的探究;可以是已经证明的结论,也可以是未知的知识领域。这样一来,对教师提出了更高的要求,即要指导学生进行多方面、多角度的探究,就必须具备将多学科知识综合起来的能力。

数学研究的现状提示我们,数学研究一方面是基础理论研究不断深入,取得前所未有的成果,另一方面是应用研究也开创了前所未有的局面。在数学教学中应该充分体现数学研究的这两个特点,一方面要使学生了解现代基础数学的新成果,另一方面也要使学生具有将数学知识运用于实践的能力。而后者就要求数学教师具有综合各科知识的能力,因为只有这样才能引导学生认识数学的运用价值。

1.2.7 反思能力

自20世纪80年代以来,"反思"(reflection)一词在欧美和澳洲越来越多地被人们引用,并影响到西方世界以外的各国教育,现已经成为国际教师教育领域广为流行的时代性语言。教师通常在没有受到直接监督或没有其他成年人在场的情境下独立教学,因此许多问题必须依靠自己去发现,所以,反思对教师来说至关重要。

先哲苏格拉底说过："生命如不诉诸批评的省察，这种生命是不值得活下去的"。这虽然有些极端，但也就说明了反思对一个人，特别是教师来说是多么重要。新课程改革对教师的创造性提出了更高的要求，教学工作越来越找不到一套放之四海皆准的模式，因此，教师必须在教学工作中随时进行反思和研究，在实践中学习和创造，这样才能得到发展。那么，反思的过程应该是怎样的？我们先看三个案例[①]，这三个案例都是美国的教师的案例，但对我们有一定的启发意义。

案例1

山姆·夏普的第一天

山姆被分配去教爱默生小学的一个一年级班。春季学期时期，他曾经试教过一个二年级班，所以，他认为自己教一年级肯定没有问题。然而他第一天单独教学才十分钟，就出现了乱子。从收午餐费（一学生给的都是一便士一便士，散得到处都是）时的手忙脚乱，到一再对课堂失去控制——课堂的喧哗和学生的举止在他看来简直有点不像话——他处处都碰钉子。最后回到了家，瘫坐在椅子上，并向其女朋友述说所发生的一切。后来回想起这一天的情形时，他感觉好多了，还能从中体会出一点幽默来。硬币到处乱蹦，怎么也抓不住，自己滑稽的样子逗得学生哄堂大笑。一想到这里，他自己都忍不住笑了，那实在是相当有趣的一幕。他想这大概决定了这一天的基调，都怪自己太较真了。明天应该会好起来，每天早上都把学生逗乐，他相信那是最好的方法，过了第一天，他相信一切都会好起来的。

案例2

多瑞丝·戈雷伯的第一天

多瑞丝第一天是组织学生为新学年做准备。刚开始的时候，一切都还顺利，后来学生不断地试探她的权威，情况就迅速恶化了。到吃午饭的时候，多瑞丝意识到她必须重掌大局，午饭过后，她威胁学生说，如果他们再不安静下来学习，她就要在放学后，把他们都留下来。这下可好，一直到放学前，班级秩序非但没有好转，反而更加混乱，甚至乱了套。放学的铃声响了，但多瑞丝已经没有任何精力把全班同学都留下来。况且，因为公交车的时间的关系，她知道根本不可能这么做。

在回家的路上，她越想越生气。毫无疑问，这天成了一个灾难。但毕竟错不在她。她的方法课老师（method teachers）从来没有教过她怎么恢复课堂次序；再说了，如果学生是这样糟糕的话，校长应该事先提醒，以使她有所准备才是。使她感到气愤的是秦老师——六年级另一个班的老师——根本懒得进来看看她是否需要帮助。对她来说，这是一个资深老师对新手起码的关照。回家后她决心忘掉今天的事——它们最终会自然而然地解决的。

---

① ［美］Charles W. Case，Johu W. Brubacher 著. 成为反思型教师. 北京：中国轻工业出版社，2005.1.

案例3

艾米·吉尔森的第一天

艾米·吉尔森被分配去教三年级，为了按自己的想法布置教室，她早早就来到学校。布告牌色彩鲜艳，强调了几个她想让班里学生重点注意的问题，桌子一尘不染，井然有序，每张桌子她都摆好了课本。她想，这样的话她就可以立即开始教学而不用把时间浪费在布置教室上了。不过，孩子们进教室后好像不这么想。在上课的前一个小时中，几个男孩就开始“不小心地”把堆好的课本推下桌子。直到她冲其中一个孩子（闹剧的煽动者）大喊的时候，闹剧才告一段落。为了控制课堂她不得不这样做，这在她以前想都没想过。到课间休息时，整整齐齐摆成一线的桌子推得奇形怪状。一天结束了，艾米头痛得厉害，并开始怀疑自己是否真的想做一名教师。不过，在离开学校前，她还是写了15分钟的日志。她很快就列出了自己在当天犯下的7个错误，还十分确定有一些错误被遗漏了。在每个错误之后，她都留了一些空白，以便以后写评注。她把日志带回了家，服了两片阿司匹林，喝了一杯花茶，然后坐下来重新阅读她写下的东西。接着，在每个错误之后，她添上了以后纠正或避免每个错误的方法。比如，在“整齐的行列是一个愚蠢的想法”之后，她写到“我要把每四张桌子摆成一组（或者是六张——我应该就此向其他老师咨询一下），看看是否管用。”她还对自己冲着学生大喊感到惭愧，她跟自己保证，明天要就某件事表扬他。当她站起来合上日志的时候，她决定自己还是想做一名老师，不过这将比她预料的要艰难得多。

以上三位教师都是刚从州立大学毕业并得到大力推荐的，他们都有相对失败的经历，但是他们处理的方法却有所不同。山姆展现了传统型教师的行为方式：他向自己的女朋友述说所发生的事情，重新回味了一遍。结束一天的工作以后，我们会希望有人分享自己的成功，或一起哀悼自己的失败。在山姆的案例中，反思的结果明显是比较成功的，他最终认识到了自己的问题，并想出了改正的行动计划。

多瑞丝与山姆自己承担责任不同，她选择了把责任推给别人，她责备学生，认为他们是坏学生，并责备大学指导老师、校长和同事秦老师。她把责任摊派给每个人后认为问题会自动解决，然后就不管了。换言之，多瑞丝不想真正知道问题出在哪里也没有改进方案。

艾米所采用的方法是，先用日志将当天发生的事情记下来，然后对这些事情进行反省并形成了一些策略。

山姆虽然对当天发生的事情进行了反思，但是他的反思是非正式的，多瑞丝实际上完全拒绝对当天的事情进行批判性的反思，艾米对当天的事情的回应则体现了积极与审慎的反思，既对当天发生的主要事情做了简略的记述，又进行了批判性的分析和反思，且形成了改变自己课堂行为的系统性策略。艾米的反思较山姆更正式和精细，从长远来看将证明是更行之有效的。

反思是教师的一种能力，是教师自我适应与发展的核心手段，正如美国学者波斯纳认为“教师的成长 = 经验 + 反思”，教师应培养自己的反思能力。研究表明所有教师——无论是初出茅庐的新秀还是经验丰富的专家——所掌握的知识在数量上差异不大，但在如何组织利用知识，如何融会贯通方面却有差别，这一差别就是经验基础的差别；而且良好的教学实践依赖一个强大的经验基础，而反思可以促进和帮助教师加速形成这一经验基础。反思也是教师开展教育研究的有效途径，因此对教师专业化的成长具有重要意义。

反思不只是对教学过程的回顾，不只是看漏的环节，更重要的是把注意力放在实施过程中哪个环节出现了什么问题，今后要如何解决问题。“吃一堑，长一智”的道理也在此。通过反思教学，促进教师对教学进行分析，重新审视自己的教学，有利于捕捉教学“灵感”改进教学方法，并积极解决所面临的问题，使教师“学会教学”。

教师的反思可以通过两种形式来进行：一是自我反思，通过收集来自不同方面的资料，带着理性的目光，审视自己的昨天和今天，审视从他人那里学来的经验，主动、超前地意识到教育教学中各种可能出现的问题，走在改革的最前沿，有创造性地改进自己的工作；二是交流式反思，可通过与他人的交流、合作来进行反思，可采用观察交流、学生反馈、专家会诊等方法。自我反思和交流式反思是教师获得实践性知识、完善自身知识结构的重要组成部分。

1.3 教师的教学风格

教师教学风格是教师行为美的表现形式。这种表现形式是多元的没有统一的模式，并且受一定时空因素的制约。教师的教学风格是一个教师在教学过程中与众不同的思维方式和行为习惯。

按照胡塞尔的现象学解释，即本质就在现象之中，现象本身就是本质的现象。教师行为就是教师个体本质的表现，实际上就是教师素质的外显。也就是说教师的教学风格是教师内在素质的外在表现。

教学风格是一个教师独特人格的体现，是一个教师相对稳定的个性特征。教学风格一旦形成，会表现出相对稳定的状态，如鲁迅曾经是一袭长衫，慢条斯理；陈独秀则是西装革履、慷慨激昂；而秋瑾却是白衣黑裙，温文尔雅；而李大钊则是刚柔相济，宠辱不惊等。教学行为在不同的教学场合会有规律的出现，这就是教学风格。

1.3.1 教学风格的类型

人们运用不同的分析方法，会得出不同的教学风格类型。这里我们介绍动

力特征分析法①,这种分类法首先承认教师的气质是决定教学风格的本质因素,而人的气质是以高级神经活动类型为基础和前提的。巴甫洛夫根据人类高级神经活动的兴奋与抑制两种过程的强弱、灵活性及平衡性以及这两种过程的相互关系,把神经活动类型分为思维型、艺术型和中间型三类。从分析教师在教学活动中表现的心理活动的动力特征入手,教学风格可以分为情感型、逻辑型和中间型三类。

情感型教学风格的主要特征表现为:(1) 整个教学活动表现出"以情激学"的主旋律,或热情明快,或细腻委婉,或激情奔放,或活泼轻松,总以真挚丰富的感情来感染学生,吸引他们的注意,使整个课堂教学气氛和谐热烈,生动活泼,富有动感。(2) 讲解知识旁征博引,材料丰富翔实,重点渲染,声情并茂。(3) 教学活动侧重形象思维和美感熏陶,注重演绎分析与直接演示,善于鼓励学生的直觉联想,启迪思维与想象。(4) 教学语言形象具体,妙趣横生,抑扬有致,真挚感人。

逻辑型教学风格的主要特征表现为:(1) 教学设计合理巧妙,有严格的逻辑起点和终点,思路清晰,严谨朴实;整个课堂充满追求理智和科学的气氛。(2) 整个课堂讲练结合,张弛有序;(3) 教学活动侧重抽象思维和学法指导,注重概括推理与逻辑论证,善于鼓励学生细致观察与敏锐的判断。(4) 教学语言准确通俗,简洁扼要,刚柔相济,以理服人,以情动人。

中间型教学风格是上述两种教学风格兼而有之,但都不十分明显。

1.3.2 影响教学风格的因素

教师一旦走进课堂,进入教师角色,就会产生一种独特的教学气氛,心理学谓之心理场。它是教学的一种超常状态,是每个教师独具的环境。学生入"场"是获取教师的感受、体验,教师对其移情悟理的教化过程。心理场中有许多默会知识是只可意会而不可言传的。学生一旦入"场",师生产生心理共鸣,学生拥有教师的感受和体验,就容易产生同化、顺应、建构的认知过程。不同的教师与其特定的教育对象和内容组合,形成不同的心理场。

我们通过对心理场的分割,可以提炼出构成教学风格的要素,它们主要是教学语言、调控方式、结构艺术和场景形象。

1. 语言

语言是一个民族的灵魂,魅力无穷。教学语言指在教学的具体情境中,在有限的时间内,为达到预定的教学目标所使用的专业化语言。它是教学风格最主要的载体。同样的事情用不同的语言表述,结果是不一样的。这里讲一个故事②,说的是纽约街头有一个盲人在乞讨,他前面放一块牌子,上写"我从小就失

① 唐松林.教师行为研究.长沙:湖南师范大学出版社,2002,6.

② 管延禄,等.中学数学教育教学论.北京:科学出版社,2007.7(304).

明了”。虽然如此，施舍的人并不多。一位诗人见状，把牌子改写成“春天就要来了，但是我不能看见”。人们的同情心被激发了：春天是多么美好，但是他看不见，多么悲惨。于是人们纷纷解囊施舍。这个故事是否真实我们不必考察，但人们却用这个故事反映了语言的重要性。

教学语言首先必须规范化，还需要流畅自然，清新幽默，表意严谨。语言是人文化修养的一面镜子，要善于用简洁、准确、鲜明地语言表达自己的思想。另外课堂教学语言不同于书面语言，所以教师既要掌握文字语言的严格标准，又要创造性的展示课堂教学语言，提高教学效率。关于教师的语言研究，以下一个案例对我们可能有一些启发。

案例

对教师课堂教学用语的调查研究

课堂教学中语言是不可或缺的一种人际交流工具。然而，从学校的课堂教学实践看，教师的课堂教学用语似乎还难尽人意。教师课堂教学用语的现状如何，学生最喜欢和最厌恶的教师课堂教学用语是什么，教师课堂教学用语在教师魅力诸方面中的地位如何，浙江某中学的部分教师进行了一番调查研究。

他们首先通过开学生、教师座谈会的方式收集教师课堂用语，然后将这些课堂用语进行整理、归类，编制成学生问卷调查表。下面是他们对学生的调查结果：

在调查表“你认为教师课堂用语中哪些话对你的帮助、鼓励最大，最有利于你的进步”一栏中，学生填写了下列几类教师用语：(1) 表扬、肯定的话。如“现在你已经有了一定的进步，要继续加油”，“这个问题问得有水平”，“在我们班教书，我感到很满意”等。(2) 鼓励、激励的话。如“老师相信你会成功”，“举手不要怕，说错不要紧”，“这个同学还大有潜力”等。(3) 富有哲理的话。如“学得踏实，玩得痛快”，“老师是资源，要靠你们自己去开凿，你们要善于发问”，“做事要有信心，做事还要有恒心”等。(4) 彬彬有礼的话。如“老师想请你回答问题，你愿意吗?”，“答不上来不要紧，请坐下慢慢想”等。

学生在调查表“你认为教师在课堂上哪些话最不中听，对你刺激最大”一栏中，填写了下面几类教师用语：(1) 讽刺挖苦性的话。如“我叫你回答，就知道你答不上来”。(2) 训斥、责骂的话。如“你这个人真笨”，“这样简单的题都不会做，你上课听了没有”。(3) 侮辱人格的话。如“我看你应该进弱智儿童学校”。(4) 否定这个班的话。如“我教了这么多年的书，从来没见过像你们这样的班级”(5) 蔑视、歧视的话。如“你连最基础的题目都做不出，去看难的题目干什么”。

调查结果表明：(1) 学生对教师课堂教学用语的要求较高，不仅要求具有启发性，而且要值得回味，留有余地。(2) 学生正处在个性形成和发展阶段，心理上还比较脆弱，需要教师的关爱，非常希望得到教师的激励。(3) 学生具有极强的自尊心，把自己的人格放在首位，他们有维护自尊的意识和要求，他们希望教师能以平等、真诚的态度来对待他们。

上述研究虽然不一定具有权威性，但对我们还是有一定启发的。研究表明教师的语言对学生的成长有着及其深远的影响，教师的语言也是教师风格的重要表现形式，教师应结合上述调查，不断修正自己的语言，使之与学生的成长相适应。

2. 调控方式

调控方式是指教师驾驭学习活动以形成积极的学习气氛的教学管理艺术。教师的调控方式以集中与协调学生的注意为目的，通过对学生外显行为的判断，准确透视学生心态，动用有效的控制手段，使学生的注意力与兴趣集中到学习活动上。但整个过程应是一个人情味十足的过程。

如幽默是人类智慧的火花的闪现，教师可以通过语言、表情、动作等一定的表达方式表现出来，往往能愉悦身心，启迪心智，特别是在教学陷入沉闷、压抑时，教师的幽默就可以扭转局面。教师把幽默带进课堂，就会使课堂充满活力，提升教学效果。

3. 结构艺术

结构艺术即课堂教学结构的艺术，这是指从教学目标出发，通过预先的构想和设计，将教学过程中的各种要素（学生、教材、教学手段），实现优化组合。

所有教师都必须编写教案，设计自己的教学工作。提高教学质量，教学结构的设计是关键。它总是以教学内容为核心，教学过程为顺序，实现教材的知识结构、学生的认知结构、教师的导学结构三者有机、有序、有效地系统联系。

4. 场景形象

场景形象是教师在教学过程中通过教师特有的教学礼仪对学生起作用，同时被学生欣赏的整体形象。礼仪是一种文化，礼仪文化是人格魅力的重要因素，它构成了人的形象的重要侧面，是其外在形象，也是内在气质和素质的表现。

教师的教学礼仪并不只表现在言谈话语当中，还表现在各种体态之中，特别是面部表情。美国一位心理学家通过做实验，得出信息效果 =7% 的文字 +38% 的音调 +55% 的面部表情。虽然这一统计数字不一定能代表绝对正确的数据，但至少可以说明，面部表情在传达信息中的重要作用。

1.3.3 教师的行为举止

教师必须注意自己的行为举止。前已说过，按照现象学的哲学解释，现象虽然与本质是对立的，但是本质就在现象之中；我们不仅通过现象能够认识本质，而且通过现象能够达到本质。

有人打了这样一个比喻：大家知道，糊墙纸并不是房屋的主要材料，可是这一外部装饰因素却能直接影响人们的情绪。举止风度也是这样：它虽然不是人的主要品质，可是对于修饰、润色他的外表行为来说，毕竟是非常重要的，对周围

的人也不是毫无关系的。要使人与人之间的交往变得愉快、优美、高尚，就必须讲究礼节，注意举止风度。

教师的行为举止有以下一些内容。

1. 动机和意识

首要的是教师要有良好行为举止的动机和意识。这种动机和意识通过对孩子表示善意、真诚和期望表现出来，会对孩子的人格具有潜移默化的影响。马卡连科在论述教育者的举止对孩子所起的作用时，有这样一段意味深长的论述："你们在生活中每时每刻都在教育他，甚至当你们不在家的时候，也是如此。你们怎样穿着打扮，怎样同其他人谈话，如何议论别人，怎样对待朋友和敌人，怎样笑，如何看报——所有这些，无不对孩子具有重大意义。孩子能察觉语气和脸色最细微的变化，通过各种无形的途径了解你们思想情绪的变化。"

结合我们的亲身体会来理解马卡连科的论述，我们便能意识到，无论教师能讲多少道理，所起的作用与自身行为相比还是有一定的差距，正因为如此，作为教师要有良好行为举止的动机和意识。只有这样才能在自身的行为中表现出来，对学生产生潜移默化的影响。

2. 习惯与作风

匈牙利当代哲学家 Polanyi M 曾经论述人类的知识时指出，知识的存在形式有两种：一种是明确知识，一种是默会知识，并用冰山模型来描述这两者之间的关系。教师的习惯与作风应该属于默会知识，但这种默会知识通过教师的行为表现出来，对学生具有重要的影响。

3. 关心与爱护

对学生关心体贴的态度。当发现学生的错误时绝对不要露出惊讶恐慌的神色，一个成熟的教师会设法把在座的人的注意力引开，以便失礼者能够更快摆脱窘境。契诃夫说过："良好的教养并不表现在你不把调味汁洒在桌布上，而是表现在如果旁人做了这样的事，你不去注意他。"相反，大声指责学生，当着其他学生的面要学生纠正错误的行为，是缺乏教养的表现。

教师对学生的爱不同于母爱，它是一种受社会委托，要把学生培养成栋梁之材的目的性更强、更为宽广的爱。教师对学生的爱既表现出强烈的感情色彩，又表现出清晰的理智感和长远目的性。因此严格要求学生是师爱的重要组成部分。它既顾及学生眼前的得失和辛苦，更看重学生未来的发展和前途。严格要求学生，要严中有爱，严中有度。那种为了讨好学生和家长而放松学生要求的教师是违反教师职业道德的。因此教师对学生的爱护不是亲昵，那种出于爱护的过分亲昵，想与学生建立"哥儿们"式的平等关系，往往表现出对学生不尊重。因此，教师对学生的爱护是有分寸的而不是随随便便。

4. 仪表与风度

教师的仪表与风度也是教师风格的重要方面，主要表现在以下几方面。①

(1) 充满自信

教师一旦以教师的角色出现在学生面前，首要的是精神饱满、充满自信。许多教师教学的失败往往是缺乏自信。缺乏自信的教师一遇到偶然事件就会手足无措。钱钟书的小说《围城》中描写这样一个故事：

三闾(lǘ)国立大学来了一位孙小姐(教师)，是教英语的。第一堂课的开始，她向学生提一个问题，要求学生用"I"、"you"、"he"和"we"造句，一位男生立即站起来这样回答了教师的问题："I am your husband and you are my wife . He is your husband and you are his wife . We are all your husbands and you are our wife."结果孙老师被气跑了，这堂课自然也就失败了。

虽然这堂课的失败不能完全归于自信的不足，但是如果是一个自信的教师，结果很可能就不是这样了。一个成熟的教师，如果在某个事情上一下子拿不定主意时，不必惊慌失措，最好保持镇静和沉着。如遇到上述问题，可以先不理会，并坚信总有办法和能力解决当前的问题。正确地处理可以是重新请一位同学发言，直到得出结论，采用学生教育学生的方式是合理的。这样的话，以后类似的问题可能就很难再出现了。

(2) 服装打扮

在目前多元化和个性化的社会，要准确描述教师服装打扮的美是很复杂的，不过总的来说，它要体现美的基本原则，如和谐、自然、对比、均衡等特点。

(3) 表情

在教育行为中，脸色、面部表情起很大作用，苏联教育家奥夫相尼科夫在其《美学》(上海译文出版社，1982)中说，"要想具有真正的、富于人情味的优美仪态，就应该像控制自己的言论和行动一样，控制自己的面部表情。"教师应该面带笑容，亲切和蔼，要从你的表情中可以看出，你是一个平等公正地对待学生的人，你是不会计较他们的地位、分数、出身、相貌和过失的老师。不论发生什么事，面部表情都不应该紧张。善于控制自己的笑容也是相当重要的。别张着大嘴，放肆地大笑，尖声怪气的大笑是很不雅观的。别人没有笑而你一个人在那里笑个不停，会让学生觉得莫名其妙。

另外在听学生发言时，应该聚精会神。

(4) 手势

手势以遵循自然节奏为原则。它随着语言的节奏、情感的起伏而自然地运动，手势高度超过自己的头部或与语言不协调的夸张都会破坏一种和谐的气氛。

---

① 唐松林. 教师行为研究. 长沙：湖南师范大学出版社，2002. 6.

莎士比亚笔下的哈姆雷特曾这样说过:“不要老是把你的手在空中这么摇挥,一切动作都要温文”。托尔斯泰这样说过:“无论我们把手多挥舞几下还是少挥舞几下,并不会因此而增添或丧失任何东西”。苏联教育家奥夫相尼科夫在其《美学》中也说,一个人如果说每一句话就要挥舞一下手,从旁人看来实在讨厌。这就像你不是面对一个人,而是一架风车。

(5) 步履

教师可以在教室里慢慢地走动,步履不宜太快,也不宜太慢,以使环境与学生的心理协调为原则。要避免在处理一些偶然事件时,显得急躁不安,往往大步流星,四处乱冲乱撞。

(6) 语气

当你要学生做某件事情的时候,应避免任何不容商量的要求或命令的语气,最好用商量的语气。对学生要关心体贴,任何时候都要让他们走在前面,让他们感到舒适方便。马卡连科曾经谈到优秀教师的特点时这样说道,只有你能用20种以上的不同声调说:“孩子,你到这边来”这句话时,你才是一个合格的教师。可见声音在教学中的重要性。

教学风格的形成,是教师教学艺术达到炉火纯青的标志,教师要经历一个较为长期的教学艺术活动的实践过程,才能最后形成独具特色的教学风格。一般来说,教师教学风格的形成大致要经历四个阶段:模仿学习 → 独立探索 → 创造超越 → 发展成型。

1.4 数学教师的技能

在教学过程中有两个问题是必须解决好的,一个是“教什么”的问题,另一个是“怎么教”的。“教什么”是内容问题,而“怎么教”则主要是能力的问题。这里我们重点讨论“怎么教”的问题。要解决“怎么教”的问题,教师就必须具备一定的教学技能,技能是教学能力的重要组成部分。许多教师的经验表明,技能掌握得越好的教师,就越有精力将注意力集中在不断更新、丰富自己的知识上。而且,具有良好技能的教师,在教学过程中,由于技能在一定程度上形成了自动化,因此,有更多的时间来关注学生的学习,对学生的需求和状况也就能充分地注意,从而及时改进自己的教学方案,而不具备良好技能的教师,由于将自己的注意力主要集中在教学行为、教学目标上,没有办法及时考虑或了解学生的学习过程,教学效果就不可能满意了。

在教学中,我们常常看到同样的知识内容,对具有相当的知识水平的教师来说,一些教师能够在教学中得心应手,将学生引入一个探索知识的奇妙境界,使学生在学习过程中,能够较为轻松地掌握知识,发展能力。而另一些教师在教学

中,不仅自己紧张吃力,而且学生的学习也被动艰难,学习效果就可想而知了。究其原因,主要是一些教师有良好的教学技能,而另一些教师在这方面就要欠缺一些。所以,对未来的教师来说,在入职以前掌握一定的教学技能是十分重要的。

按照现代汉语词典的解释,技能就是"掌握和运用专门技术的能力。"[①]也有人认为能够通过训练而趋于完善的能力都可以称为技能。还有学者认为技能是指学习者在特定目标指引下,通过练习而逐渐熟练掌握的对已有的知识经验加以运用的操作程序[②]。这些界定虽然不完全相同,但都说明技能是一种完成某项专业工作的能力,是经过训练掌握和完善的。我们来分析数学教师专业技能的特点。

1. 数学性

数学教师的专业技能首先必须体现数学的特点,也就是将数学的抽象性、严谨性和应用的广泛性体现于教学技能之中。

2. 教育性

数学教师的技能应该突出的另一特点是教育性,也就是说,技能的运用是为了引导受教育者,使其思维、行为等方面发生改变。

3. 显效性

数学教师的技能必须具有显效性,也就是说技能的运用具有展示教师个人魅力的特点,而这一特点将对教育环境起到一个明显的调节作用。

依据上述分析,我们可以给数学教师的专业技能下一个定义:数学教师的技能,就是掌握和运用数学教育这一专业技术达到取得显著教学效果的能力。因此技能属于能力的一种,而且不同的专业有自身必须掌握的基本技能。数学教师的技能,就是在数学教育的过程中表现出来的掌握和运用专业技术的能力。

在论及技能时,我们也就是将数学教育看成是一门专业技术,这样的认识对技能的掌握是有好处的。研究表明,加强对师范生教学技能的培养,有助于提高其日后的教学工作和科研工作能力,随着师范教育改革的不断深入,教师职业的专业化越来越体现出来,未来的教师不仅应拥有广博的专业知识、而且应拥有精湛的教育教学技能。因此,要使师范毕业生更好地适应今后的工作,进行系统的基本技能训练是十分必要的。那么,对于数学教育类的师范生,有哪些基本技能,又应该如何训练。

人的技能不是天生就有的,而是后天通过实际练习获得的,练习是学生技能形成的基本途径。教学经验证明,适当的练习是培养学生技能的有效方法。教

① 中国社会科学院语言研究所词典编辑室.现代汉语词典.北京:商务印书馆,1978.2

② 张大均.教育心理学.北京:人民教育出版社,1999,7

师的教学,在一定程度上说是其基本技能的展示过程,而学生在这一过程中受到潜移默化地影响。我们从两个方面来讨论数学教师的技能问题,一个是技能的基本内容,另一个是在技能训练时应处理好的几个关系。

1.4.1 数学教师技能分类

对于数学教师的技能分类,或教师的技能分类目前还没有统一的意见,依据Zehm、Kottler 及 Hargreaves 等人的研究,可以将教师技能分为教学技能、临床技能和组织管理技能①,以下按此观点对数学教师的技能内容进行研究。

教学技能即是与教学相关的技能。为了与其他技能能够更好地区分以及进行训练时操作上的方便,我们可以将教学技能分解为两个部分,一个是主要与数学内容相关的技能,另一个是主要与教学过程相关的技能。

1. 与数学教学内容相关的技能

按照心理学的研究,可以将技能分为智力技能和动作技能,与数学教学内容相关的技能应该主要属于智力技能或以智力技能为主的技能,主要应包括解决数学问题的技能、数学表达的技能和数学交流的技能。

(1) 解决数学问题的技能

解决数学问题的技能我们可以将其理解为,借助于内部数学言语在头脑中进行智力活动时所需要的技能,表现为对数学各种解题途径的熟练和自动化,能够依据目前的问题,迅速作出反应,在自身的认知结构中或通过查阅资料迅速找到与问题相关的知识并进行选择,确定解决问题的策略,从而快速解决问题。

要具有良好的解决数学问题的技能,就必须使其在头脑中储存大量的"if…then"形式的产生式。

如面对"若$\triangle ABC$的三条边分别为a,b,c,且$c^n=a^n+b^n(n\in\mathbf{N}^+,n>2)$,问$\triangle ABC$为何种三角形"这个问题,应能够立即想到余弦定理。面对问题"任给7个实数,证明其中必存在两个x,y,使$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}<\frac{\sqrt{3}}{3}$"时,能够立即想到两角差的正切公式和抽屉原理。

(2) 数学表达技能

数学表达技能是智力技能与动作技能相结合的技能,而在更大程度上应属于智力技能。我们知道,数学是一种世界通用的符号和图形语言。良好的数学表达能力应表现为:能用书面或口头的数学语言准确、生动地表达自己的思维过程,并能娴熟地在文字、符号和图像语言之间转换。

欧拉对七桥问题的解决应该是这一技能运用的典范。要达到上述技能的要

---

① 唐松林.教师行为研究.长沙:湖南师范大学出版社,2002,6.

求，就必须能理解并能利用较多的数学符号、图像表达问题。

如面对“设 $a\in(0,1)$，$b\in(0,1)$，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}.$$”

的问题时，可以迅速将其转化为图形语言，并将问题转化为“证明正方形内一点到各顶点的距离之和大于或等于对角线之和”。面对实际问题时，能迅速将其转化为相应的数学问题。随着新课程的推进，这类问题越来越多地出现在中学数学的教学中，因此教师应该提升相应的技能。

（3）数学交流技能

数学交流技能与数学表达技能的区别在于，交流技能不仅要求善于将自己的思维用数学语言并以交流对象可以接受的方式表达出来，而且要求能理解交流对象所表达的思维，并能发现其优势与问题，在此基础上能与交流对象合作协商，寻求有效的解决问题的途径。目前研究表明最好的教学是教师和学生产生多层次、多方位的交流的教学，以知识建构论为主体的教育新理论，也认为最好的教学是由教师和学生产生交互作用之后，所发展出来的动态课程。而教师的良好的数学交流技能，为动态的数学课程的产生奠定了基础，因此具有重要的意义。

教师的数学交流技能还应包括对数学模式的转换技能，按照张广祥和张奠宙两位教授的研究，数学模式是多方面的，直观模式不仅包括几何模式也包括代数模式。如“将不等式$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a,b,a>b,m\in\mathbf{R}^{+})$”转换为糖水浓度的问题，即将 a 表示溶液（糖水），b 表示溶质（糖），于是$\frac{b}{a}$表示浓度（甜度），现向糖水中加入糖 $m>0$，显然糖水变甜，即$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$。这是一个很好的模式转换，将抽象的不等式转换为学生常见的“甜度”问题①。

在课堂交流中，教师应注意倾听学生的表达，在倾听中应注意以下几点。

第一，注意学生在对话中说出的信息是否适当、正确，包括强度及传递的时间和情境等；

第二，对接收的信息进行心智加工的理解，包括理解学生呈现的思想和动机等；

第三，对信息进行权衡评价，归纳学生的主题思想、获知省略的内容、思考怎样完善信息等。

---

① 张广祥，张奠宙. 代数教学中的模式直观. 数学教育学报，2006，1

在语言交流对话中除了传统课堂上常常采用的“教师提问——学生回答”的形式外，还包括学生的发问，教师或同学回答的形式，真正形成一种动态的、发展的课程。

2. 与数学教学过程相关的技能

与数学教育过程相关的技能，主要应属于动作技能的范畴，可以分为对数学教学内容的设计能力、对板书的设计能力、绘制数学图形的能力三个方面。

(1) 对数学课程内容的设计技能

对数学课程内容的设计技能，是教师对课程进行创造的过程，因此也就是使教师创造潜能得以发挥的技能，这一技能也是教师的基本技能。这一技能的表现为能依据学生状况和教材内容以及教学目的要求，对教学过程进行有效合理的设计，设计的教学方案可行性强，而且设计的教学方案新颖独特，富有创造性，对学生的学习具有引导、激励的作用，从而能吸引学生的注意力，调动学生的学习积极性。

要使教师具有良好的对课程的设计技能，必须使其大脑中储存足够多的教学设计的优秀案例，掌握一些优秀的过程片段。有的研究者将课堂教学分为三步，分别称为“虎头”“驼峰”、“凤尾”①，而教师就是要多积累一些与此三步相关的教学案例。如在引入新课时的提问式、情境式、数学史介绍式等。又如在课堂教学结束时的概括总结式、交流心得式、发散引申式、串联归纳式、悬念设置式等。

(2) 板书设计技能

板书是数学课堂教学常用的也是必不可少的手段，教师在课堂中传递信息、梳理知识、图形、图表的展示，突出重点，解题示范都要靠板书。其具体作用为，利用视觉感官，深化学生对知识的理解、强化记忆；利用板书图示，可以引起学生的兴趣，引导和控制学生的思路，发展学生的智力。板书设计的技能也主要属于动作技能的范畴，这一技能的表现不只停留在教师的书写流畅、美观，而且表现在合理地选择板书内容并将其书写在黑板的最佳位置上，从整体来看应该达到重点突出、布局合理、富有创造性。

上好课，要有好的板书；上一流的课，要有一流的板书。在开始训练这一技能时，应掌握一些基本的板书设计方案和模式，如从左到右式、左文右图式、分快设计式等，在此基础上能够结合教学内容进行创造性地板书设计。板书设计应该做到以下几点。

第一，版面清晰，层次分明，重点突出，有利于学生记笔记，有利于学生系统记忆、掌握所学的知识；

第二，有利于激发学生的兴趣，培养求知欲，要善于利用彩色粉笔；

---

① 王克亮. 浅谈中学数学可教学的结课艺术. 数学通讯，2005，1.

第三，活跃学生思维，启迪学生智慧；

第四，产生美感，陶冶情操。

板书技能的类型从表现形式上我们可以将板书板划分为以下几种：词语符号式；提纲式；线索式；表格式；图示式。

（3）绘制数学图形的技能

绘制数学图形的技能也是一种主要属于动作技能的技能，表现为能够迅速在纸质材料或黑板上或运用计算机的相关软件绘制出数学各种图形，所绘制图形美观大方、能说明问题、便于理解数学问题和思考数学问题。波利亚基于自己的数学经验提出了成功解题的一系列启发性建议，其中的一条就是“画一个图（draw a figure）”因此能够给学生画一个图，从而启发学生的思维也是教师的基本技能。

这一技能的良好发挥可以使学生产生对教师的敬佩感和亲近感，对增强学生的学习积极性有较大的辅助作用。有一位教师在上平面几何第一节课时，其开场白是：“同学们，你们觉得什么几何图形最难画好？”学生异口同声地说“圆”，话音刚落只见教师手起笔落之处，一个“圆”诞生了，学生发出“哇”的一声，对教师的敬佩之情油然而生。

3. 临床技能

这里“临床”是借用了医学上的词汇，借用这一词汇更能说明教师在某些方面与医生的共性，教师的临床技能主要是指，教师在与学生交流中，对学生的思维、行为进行诊断，并能采取有效措施对其进行改进的能力。因此，我们也就可以从发现问题的能力和解决问题的能力来理解教师的临床技能。

（1）发现学生问题的技能

发现学生问题的技能表现为教师不仅能够引导学生用数学语言完整表达自己的思维，并在与学生进行数学交流的过程中，能够在理解学生思维过程的基础上，迅速发现其不足或问题，并能将问题进行准确诊断和归类，也就是说能对学生行为进行诊断和评价的技能。

如有些学生面对数学问题，所选择的方法是四处寻找习题解答或询问教师及同学。教师能够透过这一现象发现该学生的行为是由于缺乏解决数学问题的能力及学习中的惰性所致。又如教师能通过学生的表现，发现学生对数学学习有兴趣（或无兴趣）的内在原因，如情绪、环境、知识背景等因素。再如初中学生在证明三角形相似或全等时，采用“看上去像”的直觉思维方式，教师应发现这一问题的背后是学生的认知水平还处于直观思维为主而非逻辑思维为主的状态。

（2）解决学生问题的技能

解决学生问题的技能是在发现学生问题技能的基础上的又一个动作技能。这一技能的表现为教师能够引导学生对自己的思维过程进行反思，使其自己发

现思维过程的问题，在此基础上对思维过程中的问题进行分析并修改思路。

教师良好的解决学生问题的技能还表现在，解决问题时方法多样，如可以熟练地运用提出一些辅助问题引导学生进行思维，或引导学生进行数学交流活动或通过数学日记等对思路进行反思等方式来解决学生数学学习中的问题。

4. 组织管理技能

这一技能在教学过程中是十分重要的，因为这一技能的运用可以给课堂创造一个良好的环境，以保证教学在一种和谐的状况下顺利进行。我们可以从管理、调节和控制三个方面来理解教师的组织管理技能。

(1) 组织技能

组织技能是指教师在教学过程中，通过适当方式约束、控制学生的不良行为，组织学生从事积极的数学学习活动的教学行为方式。表现为教师能为学生创设一个既富有生活趣味，又充满数学理性特点的学习情境，并能合理安排各种教学内容，取得高效的教学成果。在运用组织技能时，要注意以下几个方面。

第一，教师要策划可预见的课堂规则和惯例，安排清楚、连续、节奏明快的教学程序，让学生都能够投入到紧张而有意义的学习活动中去；

第二，创设适合学生物质的和心理的课堂学习环境；

第三，在课堂教学中教师应正确导引，用强化的策略督促学生维护课堂规则，养成良好的学习习惯；

第四，教师应公平对待所有学生，一视同仁。

(2) 调节技能

表现为教师能依据学习内容和课堂教学中学生的状况，及时有效地采取不同的教学模式和教学手段，使教学能够顺利进行。

(3) 控制技能

表现为教师在教学中，对课堂的管理收放自如，有张有弛，学生既能积极活跃地开展数学活动，又能及时注意并完成教学任务。

5. 数学教学语言技能

(1) 教学语言技能及其功能

数学教学语言技能是教师在完成数学教学任务过程中运用教学语言的行为方式，是教师应该掌握的最基本的教学技能。教学语言技能在教学中的主要功能有以下几个方面：

第一，传递教学信息，以保证教学任务的顺利完成；

第二，教学语言技能的熟练掌握可以促进学生智力的发展，提高学生的学习效率；

第三，组织、调节课堂教学的功能；

第四，对学生的示范功能。在数学中特别强调的就是其严密性，因而数学教

师的教学语言要充分体现数学的这一特点，即要准确、简洁、有逻辑性。

(2) 教学语言类型

教学语言主要有以下几种类型：阐释性语言；组织性语言；评断性语言。

(3) 运用教学语言的基本原则

第一，教育性原则。也就是说教师的语言应该对学生具有教育和引导的意义。如在语言中使学生深切体验到教师对数学的热爱之情，从而感染学生；

第二，科学性原则。也就是说教师的语言必须符合规范，不应有语法错误，从而给学生起到一个示范作用；

第三，适应性原则。也就是说课堂教学中教师的语言是针对学生的，因此要考虑学生的可接受性，要依据学生的思维发展状况进行语言交流；

第四，启发性原则。也就是说教师的课堂教学语言必须对学生的思维有所启发和引导，能使学生理解问题的实质；

第五，规范性原则，也就是说教师的语言必须严谨规范，逻辑性强。

6. 讲解技能

(1) 讲解技能及其作用

讲解是用语言传授知识的一种教学方式。讲解技能就是教师运用系统连贯的语言，表述、阐明教学内容，传授知识的教学行为方式。讲解技能在教学中的作用有以下几个方面。

第一，使学生在一定的教学时间内可以获得较多的数学知识信息；

第二，生动、活泼、有效的讲解能够感染学生，激发学生数学学习的兴趣，并可通过讲解内容的思想性影响学生，达到思想教育的目的；

第三，讲解技能在传授数学思维方法，表达解决问题的方法等方面具有积极的作用。

(2) 讲解技能的类型

讲解的技能主要有以下几种类型。首先是解释式讲解。对于数学教学来说，主要用于对概念、命题的解释；其次是描述式讲解。在几何教学中，这种方式运用较多，主要是对研究的几何对象进行描述，学生在教师描述的情境中，通过自己的想象力达到对研究对象的理解和解决与其相关的数学问题；第三是论述式讲解。主要用于对命题的证明，这种讲解的目的是使学生理解命题或接受命题。

(3) 讲解技能的应用原则与操作要点

与教学语言技能一样，教师在运用讲解技能时也应遵循一些基本原则，如启发性原则、科学性原则、针对性原则。运用讲解技能的操作要注意以下几点。

第一，教师要较好地掌握和运用语言技能；

第二，讲解的目的要具体、明确，讲解要紧紧围绕主题进行；

第三，讲解必须重点突出，抓住关键；

第四，要注意讲解的阶段性；

第五，要注意讲解技能与其他教学技能的配合运用。

7. 导入技能①

导入技能是教师在一个新的教学活动开始时，将学生引入一定的数学学习情境的教学行为方式。

（1）导入技能的类型

常用于课堂教学导入的类型有：直接导入；复习导入；直观演示导入；问题导入；类比导入；数学故事导入。

（2）导入技能的应用原则

教师在运用导入技能时，应遵循以下原则。

第一，目的性原则。教师在导入教学内容时，应该具有一定的目的性，围绕某一问题开展，而不能出现"下笔千言，离题万里"的情况，如有些教师在讲解一些圆锥曲线的概念时，先放一段我国航天事业的成果，再进行爱国主义教育，最后再说到卫星运行轨道，最后当终于出现主题的时候，学生的注意力已经很难集中了。因此，导入应简捷，在学生思维最佳时间讲解主题内容；

第二，针对性原则。针对性主要注意两个方面，一个是教学内容，另一个是学生情况；

第三，启发性原则。一般导入是使学生主动积极地认识探索教学内容，因而要能够调动学生思维的积极性；

8. 提问技能

（1）提问技能及其作用

提问技能是教师运用提问实现教学目标的教学行为方式，其作用有以下几个方面：

第一，促进学生学习，引导和组织学生参与教学活动；

第二，在教会学生怎样发现问题、提出问题并掌握思考问题和有效地解决问题的方法方面发挥着积极作用；

第三，促进学生及时复习、巩固所学的知识，并且能够把新旧知识联系起来，系统地掌握知识；

第四，能够加强师生之间的相互作用，及时调节教学活动。

（2）提问技能的类型及其结构

依据教师运用提问技能时所提问题的性质，可以将其分为以下几种类型：回忆性提问；理解性提问；应用性提问；分析性提问；创造性提问；评价性提问。课堂教学中，一个完整的提问过程应该由引入、陈述、介入 、评价四个环节构成。

---

① 荣静娴、钱舍. 微格教学与微格教研。上海：华东师范大学出版社，2000.5(65).

(3) 提问技能的应用原则

第一,面向全体的原则。问题必须针对全班学生,有的教师在提问时喜欢先将学生站起来,然后再给出问题。这种做法有两个方面的问题,一方面,被提问的学生由于过于紧张而无法听清楚教师的问题。另一方面,未被提问的学生由于认为问题与自己无关,便不听或不思考教师的问题;

第二,目的性原则。教师的问题要具有目的性,或是启发学生思维,或是引导学生的思路,或是针对学生的学习状况复习一些知识,或是了解学生的学习状况等;

第三,评价性原则。也就是说教师提出问题后,要针对学生的回答给出评价,评价要切忌肤浅,无论是表扬还是指出问题都要发自内心。有的教师为了体现鼓励性,无论学生回答得怎样,都说"回答得太好了。"、"你真是太聪明了"等一些话语,久而久之除了造成学生的反感以外,也就不可能有其他作用了。

(4) 运用提问技能应注意的几个问题

教师在使用提问技能时,应注意以下几个方面。首先,提问需要设计。其次,提问应当含蓄,不能太简单。再次,对学生的回答要认真倾听,予以中肯而明确的评价,肯定合理的成分,提出还需改进的地方。还要注意的就是教师对学生的回答应该听完,而不应该在学生还未说完的情况下让其坐下。

9. 启发技能

(1) 启发技能的含义

启发技能是指教师通过有效方式,充分调动学生学习的积极性和主动性,以高超精湛的教学技能,启迪、诱导学生的学习活动,从而实现教学目标的教学行为方式。

(2) 启发学生数学学习的主要途径

第一,教师要明确希望学生解决什么问题,目标不确定难以完成教学任务。

第二,教师要考虑:希望学生解决的问题与学生的现实之间有多大距离,应该设计哪些问题或进行哪些活动架桥铺路化解困难。

第三,有时教师可以设置一些疑难问题引起学生思想的交锋和深层次思考,有助于深入理解某些重要的概念和定理的实质。

最后教师要将学生原先想做而不会做的正确做法,想说而说不出的正确想法用精练而明了的语言重述一遍。

(3) 运用启发技能的操作要领

运用启发技能的操作要领:符合教学内容的需要及情绪特点;具有能被学生"跳一跳,摘得到"的难度;有想象的余地,能激发学生的潜力。

教师的技能的内涵是十分丰富的,我们这里所列举的只是其中的一部分。教师的技能虽然具有显性的一面,但是从根本上说是一种隐性知识,具有"只可

意会,不可言传”的特点,需要经过长期的训练教师才能将技能与自己融为一体,从而达到炉火纯青的境界。

1.4.2 技能与素质、创新及知识的关系

技能与素质、创新及知识是相辅相成的关系,我们从以下几个方面来讨论这一问题。

1. 技能与素质之间的关系

技能与素质的关系正如现象与本质的关系,我们既不能用现象去代替本质,又不能忽视现象对本质的表现作用。

从某种意义上说,教育活动随时随地都在进行,不仅因为人们直接相互影响,而且因为我们经常是以无言的方式置身于相互影响之中,所以只有教师素质的提高,才是教育中最重要的因素。从这个意义上说,技能应该是教师对教育由内而外的一种理解和自觉行为,离开了教师自身的素质而进行技能训练,不仅收效甚微,而且容易使教师对技能的训练和理解停留表面,这样不仅不能促进教师的真正成长,对教师素质的提高也是极为不利的。从时间上来看,技能的作用相对于素质对学生的影响时间是很短的,也就是说,如果不具有良好的素质,技能只能取得一时之效。

因此,在技能训练时,应启迪受训者的自我意识,并在此基础上加以引导,这样才能使技能成为教师自身素质的一部分,成为教师的自觉行为。

2. 技能与创新之间的关系

技能与创新的关系就如源与流的关系,如果没有流,则源的作用无法体现,但没有源,流将成为无本之木、无源之水,也是不可能的。强化的技能训练能够使受训者认识什么是一种规范的行为,但也正是同一原因,能使受训者的行为模式化、统一化,这似乎对教师创新、形成自己的教学风格有不利影响。

要正确认识这一问题,必须理解模式化与创新的联系。其实,没有创新的模式是呆板的,没有模式的创新是盲目的,关键是两者的和谐和一致。任何事物的发展过程都具有非模式⇒模式⇒新的非模式⇒新的模式……这一特点,因此模式本身对创新是具有基础作用的,关键是不能被模式所限制。如从欧几里得的《几何原本》到非欧几何的创立,就是一个有模式但不被模式所限的一个极好例子,这一例子也就可以说明,无论是没有模式还是被模式所限都不可能有几何繁荣昌盛的今天。

由于技能与创新的辩证关系,也由于学生是多种多样的,因此帮助学生成长的教育也应该是丰富多彩的、开放的、灵活的。技能训练不仅应将受训者的行为规范化,而且应该是在有一定规范化的基础上,鼓励创新和将个性突出,这一点只能建立在受训者对训练目的理解上。在技能训练的同时,应注意教学风格的

形成和发展，这样才是技能训练的目的和追求，与未来的教育也才能够相符。这就需要为受训者提供多种教学模式进行训练。

3. 技能与知识之间的关系

技能与知识之间的关系是相互促进，相互依赖的关系。早期的心理学认为，技能可以仅仅通过强化训练取得实效，现代心理学理论认为，技能是建立在对知识的运用之上的训练，因此技能与知识的关系可以理解为上层建筑与基础的关系，离开知识的技能是无力和不长久的，而知识不转化为技能又难以发挥其应有的作用。

由于教师在课堂教学中表现的技能凝结着教师的知识、能力和情感，也凝结着教师教学艺术和教学风格，因此，要使技能取得长效，不停留于表面，必须使教师对相关的知识进行理解。另外，由于许多技能如果没有思想作为基础，是没有生命力的。因此，在进行技能训练时，应该使学生对与技能相关的理论知识有深刻的理解，在此基础上所诞生的技能才是有生命力和长效的。

心理学一致强调知识是智力及一切心理要素发展的基础。有些学者将教师技能分为心智技能和活动技能，从技能训练的角度来理解也就是将技能分为具有相关知识后才能收到良好训练效果的技能和反复训练便可获得的技能。从前面我们对技能的分类可以看出，大多数技能都是建立在对知识的理解的基础上才能形成的，因此我们在进行技能训练时，加强与知识之间的联系是至关重要的。

与技能相联系的知识，应该包括教师自身认知结构中所有知识，由于教学技能与教学知识是教师教学能力的两个基本点和主要要素，在进行训练时将两者有机结合是一条重要途径。知识为技能提供依据，而技能又对知识掌握和运用起到了促进作用。

1.4.3 技能的训练

以上我们依据国内外研究并结合数学学科的特点对数学教师的技能进行了分类，从以上分类我们可以发现，有些技能是可以通过反复训练达到能力的形成的，如绘制数学图形的能力，但有些技能却不能仅仅通过反复训练而完全形成，如组织管理能力。因此针对不同的技能我们应该采取不同的训练方式。

1. 分解训练

对于有些技能我们可以采用分解训练的方式进行训练。如绘制数学图形训练，我们可以将作图形先分解为若干层次并分别进行反复练习，按照田中教授的观点，中学数学作图技能可以分为工具作图、尺规作图及徒手作图三个层次，我们可以分别进行训练；对数学表达能力的训练，我们可以将书面表达和口头表达分解训练，然后再进行两者的综合训练。

2. 反馈

要达到良好的训练效果,反馈是十分重要的一个环节,要使受训者及时掌握自己的训练情况,纠正一些错误行为。为了达到这一目的,教师和其他人员的点评是十分有益的,另外目前比较流行的微格训练模式也是一个有效的途径。

3. 理论指导下的训练

在训练之前先要对技能的作用、意义等进行理论上的分析,在训练的过程中也要加深对技能的理解,这样的训练才能达到由内而外地发挥技能作用的效果。

教学技能是教师能力的体现,而教师的能力是多方面的,因此在进行技能训练时,有必要注意技能与教师其他方面能力的关系。

教师具有良好的教学技能,就能在其教学实践中表现为一种娴熟的教学能力。可以有效地将其转化为学生的默会知识,使学生对所学内容充满兴趣,从而增强学生的无意识记忆,减轻学生的学习负担。

1.5 新课程对教师素质提出的要求

以上我们对于教师的素质问题进行了讨论,目前基础教育正在进行新的课程改革,随着改革的不断深入,对教师也提出了新的要求,具体地说,有以下几个方面。[①]

第一,"高尚的师德"是作为一名教师的首要素质,亦即对学生的高度责任感和为学生服务的意识。合格的教师必须具有良好的职业道德,包括对待教育事业的道德,对待教育对象的道德,对待教师集体的道德,对待学生家长的道德等;

第二,具备全面、精深的数学专业知识对于数学教师来说是毋庸置疑的。新的高中数学课程标准对数学教师在专业知识上的素质要求较高,不仅对传统的数学知识,还要对近现代数学知识、思想、方法都能理解、掌握。更进一步,能对各类知识融会贯通,能从现代数学的高度审视、指导中学数学的教学;

第三,数学教师应当具备全新的教育观念和完备的教育科学知识。具体来说,从数学这门学科的特点出发,了解中学生心理特点,运用教学理论,分层次、有区别地开展教学活动;针对不同的教学任务,采取不同的教学活动方式,以更有效的方式进行教学。它一方面要求数学教师学习科学理论,随时吸收、借鉴新的教育观念、教育方法;另一方面要不断将这些理论知识有意识地运用于教学活动之中,使理论与实践相互促进、相互提高;

第四,新的课程标准要求数学教师懂得现代信息技术的基本原理,并会熟练

① 桂林,等.新课程标准下的高中数学教师素质的调查研究.数学教育学报,2003.3(51).

操作、使用科学型计算器、计算机等多媒体教学技术手段来开展教学，还要思考如何将信息技术与数学知识有机整合；

第五，新课程更注重数学的人文性、应用性、社会性，并广泛设立了数学建模、数学探究、数学阅读、数学活动等专题课程。这就要求未来的数学教师不仅是一个学科知识专家，更是一个有着渊博知识的复合型人才，以其广泛而全面的知识、深邃的洞察、透析社会历史发展的丰富阅历，高尚的审美情趣，健康的人格来影响、指导学生的发展；

第六，合格的教师将是一个"科研型的教育专家"。崭新的数学课程内容，必然要求我们的数学教师不断地加强专业知识领域的修养；全新的教育观念，必然要求数学教师不论是在职前，还是在职后，都应该不断吸取教育科学、心理学的营养，不断地改进教学方法；能对教学中的现象与问题不断反思，从而探索如何面向不同的学生，结合数学特点采取不同的教学方法。

1.6 国外对教师素质的要求

随着新的科技革命迅速发展和世界范围内综合国力竞争日趋激烈，世界各国都把目光投向教育改革。然而都明白，教师是教育改革的实现者，没有师资的质量就没有教育质量。因此，都从不同层次不同侧面对教师提出更高要求，对提高教师素质进行了一系列的探索。概括起来主要有如下几点：

1. 教师的思想道德和职业品格素质

各国都重视教师的高尚道德品质和良好文明行为的修养，要求教师必须具有热情、坚定、同情、关爱、耐心、自制等品质和献身未来的职业理想。如英国在《把学校办得更好》白皮书中就提出教师要具有良好的个人素质；法国强调增强教师的职业责任；美国要求具有良好的品德等。有的国家还规定教师就职宣誓制度，以表明忠于教育事业，恪守教师职责。

2. 教师的科学文化素质

科学文化素质是指教师所具备的科学文化知识结构及其程度。其内容包括科学、哲学的理论修养；精深的专业知识；广博的相关科学知识；基本的教育科学知识等。如英国要求教师必须精通一门或一门以上的课程领域；教师必须经过课程教学的培养和实践等等。

3. 教师的能力素质

日本强调教师要有五种能力，即富有成效的教学和学习指导能力，对学生强有力的生活、就业指导能力，理解和把握学生心理的能力，教育管理的能力，独立的自修能力。当然不同国家对能力的理解侧重点会有不同，如法国招聘教师注重教师的上课能力，与学生交往的能力，指导学生能力。美国要求教师要有向学

生传授知识的愿望和能力。有些国家则强调对未来的开拓创造能力等。

4. 教师的身心素质

好教师必须具备良好的心理素质以缓冲各种压力与突如其来的变化。同时要具备健全的体魄与旺盛的精力、坚毅的耐力以应付艰苦的、长时间高强度的脑力劳动和体力劳动。日本教师甚至认为身体素质是第一位的。

不过衡量教师体质因素不能仅仅限于狭窄的“身体健康”概念,还应包括感知的灵敏度、注意的集中度、工作劳动的承受度等。

□ 附录　师范院校学生对教师的认识和理解

前面我们从国家或学生对教师的要求方面讨论的教师的素质问题,那么,作为未来的教师,目前的师范院校的学生,他们对教师的认识又是怎样的呢?为了了解这一情况,我们围绕“教师的应然素质和实然素质”的问题组织了本科生进行讨论,以下是讨论记录。通过这些记录,我们可以看出新一代教师对自己将从事的职业的认识和理解,对读者应该是有启发的。

学生1. 在教师群体中,其德其才在层次上有着千差万别,依次可以分为:好教师,教书匠,以教谋生者,因教误人者。

对于好教师,我们认为应从德、才、识三方面来看。

奉献精神:教师是人类社会中的一项职业,但是目前教师在社会中的地位处在中等水平,待遇也不可观,这就要求教师有奉献精神,如果一个教师想通过当教师发财的话,那是很难的,也不会成为一个好老师。

敬业精神:作为一个好教师,他必须要有耐心,耐心地解答学生提出的问题,认真批改学生的作业;要有恒心,作为一个好教师,要始终充满热情,孜孜不倦,诲人不倦;

为人师表:作为一个好教师,不能台上一套,台下一套。如课堂上有些教师经常跟学生说,要尊老爱幼,尊敬老师,爱护同学,互相帮助,但平时却不注意自己的行为,经常对学生进行体罚,有的教师对自己的父母也不孝顺,这就不可能起到为人师表的作用。

因材施教:望子成龙是所有家长的愿望,同样,传授知识心切也是每一个教师的特征。但是,作为一个好的教师,不能强制性地要求学生在短时间内掌握超过学生接受能力的知识,而要根据学生个性特征,兴趣爱好来传授知识。

自身形象:现代教师不仅要传道、授业、解惑,而且,教师的一言一行都会对学生产生影响,作为一个好老师,要非常注意自己的形象,说话要有亲和力。我初三班主任兼物理老师,是一位很内向很沉闷的人,但他从不爱夸夸其谈,从不当众批评学生,学生犯了错误,他总是个别了解情况,解决问题,说话很委婉,从不使学生失去面子,学生很敬佩他,在临近中考是,他只给学生一句话,那就是“我自信,因为我善良”学生虽然还不能完全理解教师的话,但却知道自信是非常重要的。

尊重学生的隐私,关心学生的内心世界,教师在这方面往往做的有欠缺。

谦虚谨慎:谦虚是中国人的传统美德,作为教师,尤其是一个好老师,更应该谦虚,谦虚不

等于不自信，自信也应该有个度，超过了这个度，自信就会变成狂妄。所以教师在学生面前，始终应该保持谦虚谨慎。记得以前的一位物理老师，也是学校的副校长。他课上的非常好，而且有一流的口才，说话抑扬顿挫，学生普遍认可，可是就在一次搞卫生，抓环保的全校大会上，他在讲话是为了强调不能乱扔垃圾是却说："我堂堂一个副校长，还要弯下腰来捡一个塑料袋"顿时引起全校轰动，从此以后，学生总是在背地里学他说话的腔调，还轻蔑地撇撇嘴。也许他是不经意地说出了这句话，却改变了他在学生心中的形象。

学识：一位教师光具备德还不能称为好老师，还必须具备扎实的专业基础知识。

讲课的能力（表达能力）有些教师自己理解，但却表达不清，如在讲三角函数时，为什么要在单位圆中进行讨论，学生不理解，教师也似乎说不清；还有些教师是自己也对某个知识点不理解，所以也就很难使学生理解了。

学生2. 教师应该以"爱"为本。古人云：一日为师，终身为父。学生把自己的老师作为父亲一样地去爱戴，老师也应该以一个慈父或慈母一样去爱护学生。

教师的教学能力也是十分重要的，作为学生，总希望教师给他们一些惊喜，希望教师具有幽默的语言和风趣的谈吐，希望教师进行创造性的教学，而这一切，都需要教师具有良好的教学能力，但基础是教师具有丰富的知识背景。

学生3. 中学教学在强调学习的同时，忽视了学生间相互交流。学校注重的是教学质量，学生注重的是自己的学习成绩。甚至忘记了同学也在学习，也在拼搏。教师应多组织学生交流，多组织学生探讨，这样一来，学生的学习效率就会的到较大的提高。

学生4. 教师的个人魅力。它包括教师的性格、言谈举止和衣着等，这些因素也在一定程度上影响教师在学生中的形象，教师的性格不同，从而导致授课方式的多样化，形成自己的特色，教师将个人美丽恰到好处地运用于教学，会起到事半功倍的作用。古人问："何人可为师?"，答曰："智如泉涌，行可以为表仪者，人师也。"教师的自身形象对于学生的发展具有强烈的外在示范性和内在感染力，特别是教师的仪表，工作作风，言谈举止和良好习惯，都是教师良好素质的外化，同时也是影响学生的动力。

敏锐的观察力。教师敏锐的观察力是教师了解学生的重要能力，在课堂上对于教师的教学，学生的反映各不相同，教师要善于从学生的表情中发现问题，了解自己的教学情况，并找到解决学生问题的方法。

学生5. 科学与艺术，本来就是相通的。教育既是科学，也是艺术。所以一个教师要想达到更高的教育教学水平，实现更加理想的育人效果，就不但要努力提高教书育人的科学性，还要不断提高教书育人的艺术性，罗丹曾指出：艺术就是情感。人是世界上感情最丰富、最细腻的动物，因此教育中当然不能只看到人的理智，而置人的感情不顾。儿童和青少年虽然还不够成熟，但也有真挚美好的情感，只不过这种情感往往还比较模糊，还需要引导，因此要非常强调情感在教育中的作用。

学生6. 健康的心理素质。心理健康是人们学习、工作和生活的基本条件，对一名中选教师来说更加重要。他不仅是教师自身健康生活的需要，而且在学生心理健康的发展中，起着重要的作用。学生的一些消极心理和心理健康障碍往往是与教师的不良心理影响有密切关系。

学生7. 所谓教师素质，就是教师在教育教学中表现出来，决定其教学效果，对学生身心

发展有直接影响的心理品质。教师素质是实施素质教育的关键。

学生8. 我觉得好老师有以下特点。

第一是"爱"。一位好老师，首先要热爱岗位，热爱教师这份职业，要有奉献精神：全国十大杰出青年志愿者——陈春晓，她甘于清贫，两次作为青年志愿者赴西部支教。2001年8月，她放弃到武汉任教的机会，申请留在西部继续教书。陈老师任教的地方是国家级贫困县，当地太穷了。和她一同去的同事，有一次无法忍受寂寞，利用假期一度曾回到都市并喝了许多酒。但她却说："从孩子们的眼神里看到了一种孩子们对知识的渴望，特别是看到在那样艰苦的条件下学习，自己一直有想帮助他们的想法。所以，每次我最快乐的时候就是和孩子们在一起的时候。"其次，要爱学生。要关心、体贴、鼓励学生，给学生以自信，尊重学生差异，因材施教。对待好学生、差学生都要一视同仁、平等对待。我的高中班主任，有一次寒假打电话给我，询问我复习的情况，课文背了没有。我当时很感动，一位老师能如此关心学生，真不容易。当然，爱学生，要是溺爱，而是应该严格要求。我的高三数学教师刘老师，就是这样一位严师，她每天都要检查作业，我们全班同学的数学成绩就是这样被"逼"上去的。

第二是要"好"。一位好老师，数学要学得好：专业知识要完善，知识体系模块化，能举一反三。另外，教学方法好，适于学生学习。有同学说他的高中数学老师非常好，学生称他"爱因斯坦"，这位老师讲课能够自我投入，自我欣赏，解题能力超强，晚自习上，面对同学排山倒海的问题，他从来没有被问到过。我的高三数学老师外号"小超人"，问他问题时，他不假思索，提起笔就给我讲解，学生佩服得五体投地，像这样优秀的老师，怎不受学生的爱戴呢?

第三是具有人格魅力，就是能够有吸引学生的地方，让学生喜欢上你的课。首先，教师应该富有幽默感，有同学说，理想的数学课堂应该是学生在教师营造出的生动幽默的气氛中，根据老师设计的问题，分组比赛，这样师生间不仅能够互动，学生的积极性也被调动起来，寓教于乐中知识得到巩固。其次，好老师能够控制好自己的情绪，以理服人。有同学说：她初三的班主任天天苦口婆心劝学生要好好读书，上课要认真听讲，不要说话，可是学生不听，结果这位老师发火了，在讲台上失态了。我相信这位老师如果能够控制好自己的情绪，心平气和的与学生交流，跟他们说，你们学习不是为了家长，为了老师而读书，是为了自己而读书，现在把书读好了，今后你的人生就会有更好的发展。如果老师能够这样以理服人。外理这件事的效果肯定要比蛮干地好得多。此外，优美的语言，得体的打扮给好老师增添一份魅力。

数学老师的语言力求标准，清脆，圆润，悦耳，吐字必须清楚，语调要高低相间，强弱相伴，长短相随，做到抑扬顿挫，错落有致，该突出的重点，亟待克服的困难处，都应注意提高音调，如果整节课自始至终用沉郁或平缓的语调，很容易使学生精神不振，注意力分散，甚至感到昏昏欲睡。有激情的老师能够激起学生的学习数学的兴趣。

我浏览教师节那天的报纸，学生写给老师的祝福语，一位学生这样写道：

每个孩子都是折断了翅膀的天使，他们来到这个爱的世界，寻找为我们缝补翅膀的人，这个人就是老师。缝上翅膀后的孩子又都变成了爱的天使，作为数学老师，您尽心尽力地把每一个概念，每一条公式教给我们，您善解人意，在质朴无华的外表是一颗纯洁高尚的心！20多年的教育事业，花白了您那又黑又亮的长发，沙哑了您银铃般动人的嗓音，但我知道，您的

毫无怨言的。因为您说过,我们都是您的好孩子,您的好孩子,在第 23 个教师节到来之际,祝您工作顺心,节日愉快!

——您的学生,徐紫涵。

本章思考题

1. 谈谈教师应具有哪些方面的知识?
2. 说明教学风格的形成途径及对教学的影响。
3. 论述教师的科研能力对教学的意义。
4. 简述启发学生数学学习的主要途径。
5. 简述吸引学生学习的主要方式。
6. 分组讨论“教师的基本素质”是什么?
7. 谈谈你对数学本质的认识。
8. 谈谈你对数学教育的理解。
9. 数学课堂教学技能主要有哪些方面?
10. 简述数学教学语言技能及其功能。
11. 简述讲解技能及其应用原则。
12. 简述导入技能的类型及其应用原则。
13. 简述提问技能及其作用。
14. 按基本技能的要求进行基本技能训练。

第2章 数学教育的一些理论基础

数学教育理论,是对数学教育实践活动进行理性思考的产物,是对数学教育现象及其矛盾运动能动反映所形成的具有层次性的、可以指导数学教育实践的观念体系。数学教育需要经验和常识,但仅仅停留在经验和常识的层次上是远远不够的。因为如此,即便20年的数学教育经验也许只是一年工作的20次重复。没有数学教育经验到数学教育理论的升华,没有感性到理性的跃迁,就不可能获得关于数学教育的规律性的认识,数学教育实践只能停留在低水平上重复。因此,有意识地对各种学习理论进行研究,并在教育实践中检验和实施各种理论,从而形成新的理论,是使数学教育科学化的重要途径。

数学学习研究一般采用两种方式,一种是从一般心理学的理论出发,去对数学学习的具体问题作解释与分析;另一种是尽可能从数学学习的具体过程出发,研究学生学习的真实心理活动,分析其认知过程、机制及心智变化,逐步形成具有自身特点的数学学习理论。在目前数学学习理论还没有充分建立的情况下,采用第一种研究方式是可取的。这一方面可以将理论运用于实际,另一方面,也可以从理论的角度对教育现象进行分析,因此,我们本章重点采用用理论分析数学教学实际的做法来进行讨论。

2.1 数学教学研究的历史

对于一位数学教师,必须对数学教育研究的历史有一定的了解,本节对教学和数学教学的研究历史进行简单地介绍。

2.1.1 教学的含义词源分析

1. "教学"概念的形成和发展

中国《书·商书·总命》、《学论》提出"教学相长",这里的"教学"实则"教授",指教师的行为。我国古代的《说文解字》中对教学有这样的阐述:"教,上所施,下所效也。"其中的"施"就是演示、操作之意,而效是指模仿、效仿的意思。在我国最早将"教"与"学"看成联合词的是欧阳修。

古今中外对教学的种种认识也有着悠久的历史。早在公元前6世纪,我国

伟大的教育家孔子在丰富的教学实践基础上，把学习过程概括为学——思——行的统一过程。后来的儒家学派进一步提出“博学之、审问之、慎思之、明辨之、笃行之”(《礼记·中庸》)，其重点在于说明教学过程。17世纪捷克教育家夸美纽斯认为，“一切知识都从感观的知觉开始的”，主张把教学建立在感觉活动的基础上。这是以个体认识论为基础提出的教学论。19世纪德国教育家赫尔巴特试图从心理学的“统觉理论”原理来说明教学，认为教学是新旧观念的联系和系统化的过程。19世纪末，美国实用主义教育家杜威则认为，教学过程是学生直接经验的不断改造和增大意义的过程，是“从做中学”的过程。他以新的知识观和知识形成观作为教学理论的基础。20世纪40年代，前苏联教育家凯洛夫认为，教学过程是一种认识过程。20世纪50年代学者们强调师生交往、认知结构的构建，利用信息加工以及系统状态变换等不同观点来对教学这一过程进行解释。

2. 教学的含义

教学是教师与学生以课堂为主渠道的交往过程，是教师的教与学生的学共同的活动，通过这个交往过程和活动，学生掌握一定的知识和技能，形成一定的能力和态度，人格获得一定的发展，教学既是科学又是艺术，关于教与学的关系有以下观点。

(1)“教”与“学”是对立统一的

教学是教与学的统一，即教师的教和学生的学是同一活动的两个方面，离开任何一个方面，教学都将不存在。正如杜威所说：“教对于学来说就像卖对于买”是对立统一的。

首先，教不同于学，教是教师的行为，是学生学习的外化过程；学是学生的行为，是学生学习的内化过程。正因为教师与学生存在差异，其交往才有价值。

其次，教与学的相互依赖。“教”离不开“学”，“学”也离不开“教”。在教学中，教与学彼此依存，相辅相成，既不存在没有“学”的教，也不存在没有“教”的学。

再次，教学过程是师生间的交往过程，教师与学生都是主体，人格上绝对平等。教师与学生之间的关系是交互主体的关系，学生对教学过程有选择的权利，教师具有引导的责任。在教学过程中，教师主导着教学活动的方向和性质，而学生是学习活动的主人。教师只能引导学生学习而不能代替学生学习，学生只有在教师的有效指导下才能更好地进行学习。

(2) 教学既是科学又是艺术

教学应建立在一定的科学基础上，必须遵循人的心理发展规律。因为教学的根本任务是促进人的身心全面而充分的发展，因此要完成教学任务就必须对人的心理发展规律有充分的认识。教学过程充满教师与学生之间、学生与学生

之间情感和价值观念的交流过程,这就决定了教学要涉及人的情感、精神、价值观等,并应有效促进这些因素的完善,因此教学又是一门艺术。

2.1.2 数学教育研究的历史发展

数学教育研究开展的时间还不长。2000 年,在第九届国际数学教育大会(ICME - 9)上,Mogens Niss 作了题为《数学教育研究的主要问题与趋势》的大会报告,他说:"1972 年,在第二届国际数学教育大会上,Geoffrey Howson 称数学教育还只是处在形成期,就像一个孩子,一个青少年,但是,现在我们可以称数学教育为年青人了,可以考虑和探讨数学教育的发展、特点和成就了。"

数学教育研究的历史虽然还不长,但却有许多研究成果,形成了一些理论。人们从只关注数学教材教法的研究过渡到既关注教的研究,又关注学的研究,而且对学生的学习过程的研究目前成为数学教育研究的重点。如下面所列举的案例,就是对学生的学习过程的研究。教育学和心理学也围绕着数学教育开展了许多研究,这些研究对指导我们的数学教育活动起到了积极的作用。

2.1.3 教学研究案例

本案例选自英国 CSMS(Concepts in Secondary Mathematics and Science,中学数学与科学中的概念)研究项目中对学生错误的一个研究片段。其研究成果集中地反应在 Hart 博士等撰写的《孩子们的数学理解:11 ~ 16 岁》这本著作中。

书中记录了访谈者与一个孩子之间的这样一段对话:

案例

通过访谈了解学生的想法

访谈者:10 粒糖在两个男孩之间分,要求一个男孩多分得 4 粒,他们俩每人分得几粒?

孩子:他们应该各得几粒。

访谈者:是啊,如果要求一个男孩比另一个多分 4 粒。

孩子:是啊,因为 10 粒糖分给 2 个男孩,所以一个得 9 粒,一个得 1 粒。

访谈者:噢,那么哪个男孩多得了 4 粒呢?

孩子:(指着"9")

访谈者:他是多得了 4 粒吗?

孩子:是的。

访谈者:你是怎样知道他多得了 4 粒呢?

孩子:因为他得了 9 粒而另一个得了 1 粒呀。

访谈者:他是比他多 4 粒吗?

孩子:我是算出来的。如果有10粒,除以2,得5,而一个人要多得4粒,他就得得到9粒,所以另一个人就是1粒。

访谈者:为什么另一个人就是1粒呢?

孩子:因为只剩下1粒了。

访谈者:现在那个男孩比另一个男孩多4粒?

孩子:是的。

访谈者:那个分得9个的男孩比分得1粒的男孩多得4粒?

孩子:是的。

这个研究案例中研究者使用的是访谈的方法,目的是想通过访谈,比较深入地了解学生是怎样思考的,产生差错的原因是什么。分析这个案例,我们看到孩子荒唐的答案背后有其合理的部分,也就可以从其思维过程发现其思维特点。我们在纠正或启发学生的解题思路时,如果要取得好的教学效果,最好不要用一种固定的解题思路去约束学生,如果同样的问题问不同的学生,也许会有不同的结果。每一种结果都代表了一种具有一定合理成分的思维过程,教师的作用是在学生原有的基础上正确地进行引导,而不是将学生的思维进行格式化。

以上这个案例虽然不是针对中学生进行的研究,但研究的过程和方法却值得我们借鉴。从以上教学研究的具体事例,我们可以看出不同的年龄阶段的学生具有不同的心理发展水平,而这一水平直接影响了学生的思维状况,从这个意义上说,教学研究在一定程度上依赖教育心理学的原理。另外通过这一案例的研究也可以看出,许多教学研究的内容从过去更多的关注教师的"教"转移到更多地关注学生的"学",由更注意宏观研究到更注意微观研究。我们应该从这个案例中学习教育研究的方法和过程。

2.1.4 数学教学研究中的一些观点

数学教学的研究是数学教育研究的最重要的组成部分。对数学教学的研究,目前有一些观点值得我们探讨。

首先在数学教学中,历来存在"两个中心"之争,即"教师中心"和"学生中心"两个观点之争。其实这两种观点都有其片面性,过分强调教师的作用和过分强调学生的作用都会导致教学难以成功。但是,如何使这两种关系达到最协调的状况却是一个十分难以解决的问题,也是目前数学教学研究的重要问题。

其次,有学者认为"数学教学就是数学活动的教学"。荷兰著名数学教育家斯托利亚尔认为:数学教学过程就是由教师到学生和由学生到教师这两个方向的信息传输的过程,并认为数学教学的每一步都应研究学生的思维的发展。如

果不估计学生思维活动的水平、思维的发展、概念的形成和掌握教材的质量，就不可能进行有效教学。所以他提出数学教学的任务是形成和发展那些具有数学思维特点的智力结构，并且促进教学中的发现。

另外，我国对数学教学过程本质的研究和讨论中也存在着不同的认识观点。归纳起来，大致有如下的一些看法。

1. 数学教学过程是教师引导学生逐步认识数学世界的过程，教学过程是一种认识过程；

2. 数学教学过程不仅是认识过程，也是促进学生身心发展过程；

3. 数学教学过程是以认识促进学生发展的过程；

4. 数学教学过程是数学思维活动的过程；

5. 数学教学过程是多层次的复杂过程。它具有心理本质、生理本质等。

通过以上对数学教学研究的部分观点的列举，我们可以看成，无论是世界范围内还是在中国，对数学教育的研究都还处于比较初步的阶段，还有许多问题未达成共识，因而需要继续研究。

2.2 学习理论的主要流派

要进行有效的教学，必须对学生学习数学的特点和规律有足够的认识，这种认识不能停留在经验的积累和总结上，而应从理论的角度，对教育过程中的各种因素进行分析。因此掌握学习理论的基本观点，并将其运用于数学教学是有必要的。对于先进理论的自觉应用可以帮助我们更为深入地把握自己的传统，特别是清楚地认识传统的优势和局限性。因此，努力借用西方的现代理论对中国的数学教学传统或教学模式的合理性作出具体论证是数学教育研究的重要方法①。另外，我们只有从学习理论的角度来理解学生，才能够理性地认识学生的，也才能够依据学生的情况进行教学，并能有效解决教学中的问题。

学习理论可以说是心理学中最发达的领域之一。在心理学发展史上大多数早期心理学家往往都比较偏爱对学习，尤其是对学习的过程的研究，并对这一领域的理论和研究方法作出了贡献。由于各人的观点、视野和研究方法各不相同，因而形成了各种学习理论的流派。到目前为止还没有凝聚成一种统一的、综合的、大家普遍认同的学习理论。因此，这里对行为主义学派、认知主义学派、人本主义学派的学习理论的基本观点作简单的列举。

---

① 郑毓信．中国数学教育的界定和建设：综述与分析．数学教育学报，2006.2(12).

2.2.1 行为取向的教学理论

两千多年来，有一个假设一直在西方思想界盛行，而且事实上也一直在阻碍着心理学的开发工作，这就是：人与动物存在着本质的差异。根据这一假设，人是有自由意志的，是可以对自己行为负责的，是可以通过合乎情理的思维来控制自己的行动的。而动物只有生物学意义上的机制和简单的自动化动作，动物的行为是受条件反射和本能控制的。这个观念深深植根于人们的思想中。直到一个多世纪前，达尔文对此提出了挑战。他在1859年出版的《物种的起源》(The Origin of Species)一书中，提出了以自然选择为基础的物种进化说，从而填补了人与动物之间的鸿沟，达尔文因此被公认为"现代心理学之父"。

从当时的角度来看，如果接受达尔文的进化论，那就有两种策略可供选择。一种是赋予动物以人性(humanize the animals)。另一种策略是把人兽性化(brutalize human)，即认为人类的行为也是受反射、驱力和以往的经验制约的。动物的基本学习方式是试误学习，人类应该也是这样。这种策略实质上是把人机械化，即把所有行为都还原成简单的刺激——反应联结，学习成了一种自动化的机械过程。相比之下，这种策略对心理学的发展影响较大。早期的刺激——反应学习理论，即行为主义学习理论，就是采用了这种策略。

刺激——反应论者把环境看做是刺激，把伴随而来的有机体行为看做是反应。他们关注的是环境在个体学习中的重要性。学习者学到什么，是受环境控制的，而不是由个体决定的。认为学习者的行为是他们对环境刺激所做出的反应，所有行为都是习得的。也就是说，行为主义心理学将学习归结为外部环境的影响的产物，认为在教育方面，教师的职责就是要创设一种环境，尽可能在最大限度上强化学生的合适行为。对教学理论影响最大的是桑代克"试误说"和斯金纳的操作条件反射学习理论。

1. 桑代克的试误说

桑代克(Therndike E L) 关于学习问题的研究是从动物学习实验开始的，其中最有名的实验是他对饿猫逃出笼箱获取食物的实验。桑代克将饿猫关在一个笼子里，笼子装有活动的门闩，笼外放一块猫能看到的食物。饿猫在笼中见了食物就尝试逃出笼子，在一系列的错误动作中偶然触动了门的机关，笼门自动开启，猫立即窜出叼起食物。如此反复进行实验，并记录猫尝试学习的各次时间加以研究。通过大量的实验得出了一个非常重要的结论：猫将笼门开启所需要的时间随着实验次数的增加而不断减少，也就是说，猫在一次次尝试中，学会了将门开启的方法。这一实验表明，猫的学习是由刺激情境与正确反应之间形成的联结构成的。笼的内部构成了"刺激情景"，动物对此刺激情景能尝试各种可能的行为或反应，从而形成刺激情景与正确反应之间的联结。

桑代克的理论在当时是一种全新的观点。在这之前,人们普遍认为,人类的学习是一种理智的过程,而动物只有本能的行为模式。桑代克理论消除了动物与人类之间的这种差异。在桑代克看来,人类是从动物进化而来的,人类的心理与动物比,也只是复杂程度不同而已。为此,桑代克还以人为被试者进行了实验。

一项典型的实验是要被试者形成一个数的概念。桑代克向被试者出示了一系列写在卡片上的数字,要被试者猜测这些数字是否是哪个数的概念的例子。桑代克则以"对"或"不对"给予反馈。被试者最初都是随机反应的,但经过一系列尝试后,他们看来都掌握了这个数概念,因为被试者平均答案的90%都是正确的。这时候桑代克要求被试者用语言来表示这个数概念。有的说,如果一个数的最后一位数是奇数,那么这个数字便不是这个数概念;也有的说,如果一个数的位数是双位数,那么这个数字肯定是这个数概念,其实这个数概念根本不存在,所有的数都是随机地收集在一起的。不过有些卡片的角落上有一个手指印似的污渍。凡有污渍的数字桑代克都说"对",凡没有污渍的数字桑代克都说"不对",显然被试者都是根据污渍来给出反应的,但所有被试者都否认看到了污渍。桑代克由此得出结论:人类可以学会根据特定的刺激(污渍)作出反应,但同时又完全没有意识到这种刺激。

桑代克把这些成果运用于人类学习的研究,总结出试误学习说。其要点是:

学习即联结。学习的实质是一定的刺激——反应的联结。所谓"联结"指情境(刺激)感觉与反映动作的冲动之间形成联系或联想。以S表示刺激,R表示反应,用"——"表记"引起"或"导致",联结公式记为S——R。教学则是安排各种情境,以导致理想的联结。一个受过教育的成年人可以拥有数百万个刺激——反应的联结。教育的目的便在于形成、保持、消除、改变或引导各种联结。

联结形成的形式是"尝试与错误"。刺激与反应联结形成的形式乃是一种渐进的"尝试与错误",直到最后成功的过程。因此,学习是一种渐进的,随着尝试次数的逐渐增加,错误反应逐渐减少,终于形成了固定的刺激和反应之间的联结,从而解决相应的问题。

S—R联结的形成需要怎样的条件呢?桑代克总结出三条试误学习定律:

(1) 准备律(law of readiness)

桑代克观察到,在他的实验过程中,为了保证学习的发生,猫必须处于饥饿状态。因此,对学习的解释必须包括某种动机原则。在桑代克看来,"准备"这个概念完全适合于人类。

(2) 效果律(law of effect)

桑代克注意到,为了保证学习的发生,除了猫必须处于饥饿状态,食物是必须的。只有当反应对环境产生某种效果时,学习才会发生。即指当刺激引起反

应时，若是伴随着一种满意状态，则刺激与反应的联结就强，若是伴随着一种烦恼状态，如猫逃出笼子后得到的是惩罚，则联结就削弱。这实际上就是强化在学习中所发挥的作用。

(3) 练习律(law of exercise)

指刺激与反应之间的联结由于一再重复练习而巩固。但桑代克在20世纪30年代以后的论著多次表示，练习本身不是一种很有效的方式，因为许多实验表明，练习并不会无条件地增强刺激—反应的力量。例如，他让一些大学生蒙住眼睛画一条3英吋长的线条，允许被试者尝试上千次。但结果表明，被试者从第一次到最后一次的尝试，并无任何进步。看来，不知道结果的练习，不可能有助于学习，没有强化的练习是没有意义的。

总之，桑代克的试误学习理论认为人的学习与动物的学习方式都是一样的，只是知识复杂程度不一样，这实际上是达尔文的生物进化论在心理学上的进一步延伸。他虽没有简单地把人类学习和动物学习笼统地等同，但仅仅从联结的复杂程度不同来区分，使得他难于揭示人类学习的本质及特征。桑代克学习理论的最大弱点是把学习过程过于简单化。桑代克的学习理论的分析，使我们认识到，如果在教学中只采取刺激——反应——强化的手段，则实际上也就是将人与动物等同起来，这不仅难以体现人的主观能动性在学习中的作用，而且学习的效果也是有限的，这对纠正目前我国数学教育中的一些问题是具有现实意义的。

结合数学教学来体会桑代克的理论，我们会发现在数学教学中，适当地运用强化的手段，使在知识和学生的行为之间建立联系是能够取得实效的，特别是对于一些数学技能或一些需要记忆的知识。但是过分的强化，或将强化作为学习的唯一手段，则学生的学习将始终处于被动局面，难以发挥学生主体在学习中的作用，不仅使学生的学习积极性随着学习过程的加长而逐渐消失，而且也难以取得使学生真正理解知识、形成素质的教学效果。

2. 斯金纳的操作性条件反射学习理论

斯金纳(Skinner B F)把行为作为基本的研究对象。研究行为的目的，是要形成一种分析各种环境刺激的功能的方法，以决定和预测有机体的行为。

斯金纳认为刺激——反应的模式在解释某些行为时是确切的，但他认为人类与动物显示出来的许多反应并不是明显的刺激引发的。刺激——无论是观测到的或观测不到的——并不是在任何情况下都可以对学习作出精确有效的解释的核心。

斯金纳与传统的刺激反应心理学的一个显著区别，就是他将有机体的行为分为两类：一类是由刺激引发产生的反应，它不具有随意性，称为“应答性行为”；另一类是自发产生的反应，它不是对已知刺激的应答，但可以对环境施加影响，具有随意性，称为“操作性行为”。

斯金纳认为,人类从事的绝大多数有意义的行为都是操作性的。斯金纳在对操作性条件作用的研究中设计了"斯金纳箱",对白鼠、鸽子进行操作行为予以强化的大量试验。他把饥饿的白鼠放在箱里,当白鼠按动箱内的杠杆时,就给它一颗食物,训练若干次后,就形成白鼠对杠杆的操作性条件反射,白鼠的学习也就形成了,以后不给食物白鼠就会多次地使劲地按动杠杆。在取得了动物试验研究成果之后,他又对人类进行多次试验,人类实验的操作行为则是解决问题,而以研究者的口头赞同或被试知道自己以作出正确答案做强化。

斯金纳从事实验和研究的主要目的,是要论述和澄清强化的类型的安排对学习测度的影响。学习测度主要包括习得速度、反应速度和消退速度。从某种意义说斯金纳在强化安排方面的实验,是他对心理学的最大贡献。

斯金纳认为,在行为实验分析中,最容易控制的、最有效的变量是给予强化的方式。在一种仔细控制的实验情境中,实验者可以精确地决定使用什么类型的强化,以及怎样给予、何时给予强化。也就是说,实验者完全可以控制强化程序。他指出,在现实世界中,强化并非总是连续的,甚至只是间歇强化时学习也在发生,行为也连续不断。斯金纳的操作性条件作用学习实验,提出了间歇强化的多种程序序列安排:"定时强化"(按一定时间间隔进行强化),"变时强化"(不按固定时间而随意间隔进行强化),"定比率强化"(在有机体发出一定标准次数后施加的强化,如 5 次,10 次给予一次强化),"变比率强化"(不是按一定标准次数后施行)和"组合强化"(将任意两种强化程式进行组合进行强化)。也就是说,可以通过操作强化的方式来强化某一行为。

斯金纳的操作条件作用的原理,与他同时代的其他学习理论相比,经受了时间的考验,并很快流行起来,主要原因是,斯金纳的学说,不仅在实验情境中获得了成功,而且在广泛的社会实际情境中得到了应用。下面介绍斯金纳根据强化相依关系设计的、促使有机体行为变化所采用的两种技术:塑造与渐退。

(1) 塑造

所谓教育,就是要塑造行为,塑造在不久的将来对个人自己和他人有利的行为。在斯金纳看来,通过各种强化安排来塑造行为,就像雕塑家可以用泥巴塑造任何东西一样。

通过塑造技术使有机体从事某种行为反应,主要是采用"相继近似法"(method of approximations),就是通过不断强化一系列逐渐接近最终行为的反应来塑造某种行为。斯金纳介绍了用塑造的方法来解决困难的行为问题。这里有一个运用斯金纳理论的实例。一个孩子生下来时就因患白内障而失明,在他尚未达到施行手术的年龄之前,他一直大发脾气。手术之后仍很难管理。让他戴一副眼镜,并说不戴将会永远失明,但他不听。沃尔夫等人(Wolf, Mees and Risley)根据斯金纳操作条件作用原理,设计一个强化程序,成功地塑造了戴眼镜的行

为。当然，作为一个前提条件，是让这个儿童处于饥饿状态，以便使食物作为有效的强化物。首先，将一付空的眼镜架放在桌上，只要出现任何与眼镜架接触的行为，就立即给予食物强化，直到将眼镜架戴在脸上，然后再给眼镜架配上镜片并在进行训练，最后这个小孩每天都会戴上眼镜。这一实例说明了通过对强化的操作过程进行设计，可以达到使有机体形成某种行为的目的。

（2）渐退

正如通过塑造的技术可以使有机体逐渐形成一种新的复杂技能一样，我们也可以通过渐退技术使有机体逐渐学会类似的刺激作有区别的反应。斯金纳认为，通过巧妙地编排程序，可以使有机体对微妙的刺激差别作出辨别反应。例如，斯金纳在《教学技术学》中，介绍了关于西德曼的一项实验。西德曼为一名年龄 40 岁，智龄只有 18 个月的白痴患者编制了一套作出细微辨别的程序。西德曼研究了他对投射到半透明垂面上的圆形的辨别能力。强化物为一小块巧克力。开始时，只要按一块大的垂面，便会有一块巧克力，然后用三组较小的格子将这垂面一分为九，中心的格子不再使用，开始被试者只要按余下的八个格子的任一个都可以获得一块巧克力，后来必须按画了一个圆的格子，再后来必须按画了圆且有投射光的格子，最后，被试者可以在很复杂的图形中选出有投射光的圆形。这也就是说，被试者在一系列有计划的刺激过程中学会了识别圆型，或者说认识了圆形。

斯金纳将在动物学习实验的研究中发现的操作性条件作用的学习及其规律应用于人类学习及对学生的教学，20 世纪 50—60 年代倡导程序教学，由于借鉴使用了普辛西所发明的教学机器，所以斯金纳的教学理论也称为“机器教学”这是一种包含于个别化教学的自动教学模式，这种教学模式有力地推动了教学的发展。

程序教学是以操作性条件反应与强化原理作为理论基础，斯金纳认为人与动物的许多行为不是简单的刺激——反应的联结，而是人或动物能够积极地操作环境，并不断改变自身的行为方式，在这种作用下，获得环境对自身作出反应，这种反应叫做操作性条件作用。通过这种作用，形成一定的学习方式，这种学习称为操作性学习。

把操作性条件作用，与积极强化的学习理论运用于教学理论，便形成了程序教学论。程序教学论的关键因素有两个：一是程序教材的编制，他主张把教材分成若干可分离又有逻辑联系的部分，这样学生的学习可以循序渐进地进行，同时在每次学习之后，又能得到强化；二是教学机器的使用，教学机器的作用，不仅是呈现教材，而且对正确反应给予强化。

程序教学要遵循以下原则：

第一，积极反应原则。要求学生自己进行积极学习。

第二,小步子原则。程序教学是一步一步呈现的,每一步之间的难度增加非常小,学习是一步一步进行的。

第三,即时强化原则。即对学生的反应立即给出是否正确的强化。

第四,自定步调原则。程序教学是一种个别化教学原则,不强调统一进度,学生可以自己选择合适的速度进行学习。

第五,低错误率原则。

斯金纳的理论促进了教学手段的现代化,重视非智力因素的发展规律,为学习者的人格独立创造了条件。但斯金纳在分析人类学习中,同样抹杀了人与动物的本质区别,把人类的学习行为简单地归纳为消极的机械的操作强化过程,否认人在学习中的积极主动性,把人类的学习生物化,则是不科学的。因为人的认知与情感、思维与行动、个性特征与社会交往等方面的复杂性和微妙程度,绝非用“强化物”这把万能的钥匙所能开启的。

由上述可见,在行为主义心理学看来,学习是改变学习者行为的过程,是在外部刺激及奖励惩罚等作用下,使学生作出正确的反应,并且逐步形成稳定的行为方式。这种理论体现在数学教学中,就是刺激与强化。这种学习模式在我国数学教育中的具体体现就是在记忆(最好是理解基础上的记忆)一些数学定理或法则和一些解题方式,然后采用“题海战术”进行反复强化训练。事实证明,这种教学模式,对形成坚实的基础和应对一些考试是有积极作用的。但是,弊端也是很明显的,因为这种教学将学生的学习建立在对外界刺激的基础上,难以发挥学生在学习中的主动性,学生的学习实际上一直处于被动状态,因此一旦外部刺激消失,便会对所学知识很快遗忘,这也就是许多大学生虽然曾经在高考中取得好成绩,但进入大学后,面对高考题却早已没有当年的“灵感”的主要原因。而且,这种教学不能将学生对所学内容的兴趣培养放在首位,因此许多学生虽然数学成绩突出,但对数学却没有真正地热爱,这也就可以解释,为什么我国数学在国际奥林匹克竞赛成绩斐然,但是,一旦完成了中学的学习,许多人便不再从事数学的专门研究,甚至厌恶数学学习和研究,这也就可以部分解释我国国际知名数学家相对较少的原因。

2.2.2 早期认知学习理论

认知学派是在德国的格式塔学派的基础上发展起来的,格式塔学派的创始人有魏特墨(Wertheimer M)、考夫卡(Koffka K)和苟勒(Koher W)等人。这里我们介绍一下格式塔心理学的实验研究。

苟勒等人通过对黑猩猩的学习实验来研究学习心理。开始先让黑猩猩用一根竹竿(或用箱子垫着)去取食物,接着要求黑猩猩用两根竹竿(或用箱子垫着)去取食物。在实验中,黑猩猩在用竹竿、木箱去取实物时,开始做了许多多余的

动作，后来黑猩猩不再做这些多余的动作了，蹲下来仔细观察，忽然之间豁然开朗，用两根竹竿一套（或用两只箱子一叠）就取得了食物。这就是黑猩猩在对环境整体做了仔细了解之后，看出了几根竹竿联起来与食物的关系，学会了用竹竿取食物，苟勒把这种突然"学会"叫做"顿悟"。

顿悟是指突然觉察到问题的解决办法。它是通过学习者重新组织或重新构建有关事物的形式而实现的。换言之，有了顿悟的学习者，是用一种新的方式来看待整个情境的。在格式塔心理学家看来，学习就是知觉的重新组织，这种知觉经验的变化过程不是渐进的尝试与错误的过程，而是突然领悟，即"顿悟"。

在格式塔学派看来，解决问题的过程可以归结为如下的四个阶段：

第一，准备期：清楚地意识到了面临的问题，并力图通过自觉的努力去解决问题。

第二，酝酿期：自觉地努力始终未能奏效，从而就陷入了某种困境。

第三，明朗期：顿悟就发生在这一阶段，而这无意识思维活动的结果。

第四，验证期：对顿悟所获得结果的可靠性作出检验。

格式塔学派理论认为学习过程中问题解决，多是由于对情境中事物关系的理解而构成一种实现的。因此他们的学习理论又称为"顿悟"说。格式塔学习理论具有以下基本观点。

1. 学习即知觉重组或认知重组

格式塔心理学家认为学习意味着要觉察特定情境中的关键性要素，了解这些要素是如何联系的，识别其内在的结构。

在格式塔心理学家看来，一个人学到些什么，直接取决于他是如何知觉问题情境的。如果一个人看不出呈现在他面前的问题，看不出各种事物之间的联系，那么他对事物的知觉还处在无组织的、未分化的状态，因而，也就无所谓学习了。一个人的学习，通常是从一种混沌的模糊状态，转变为一种有意义的、有结构的状态，这就是知觉重组的过程。

2. 顿悟学习可以避免多余的试悟，同时又有助于迁移

格式塔心理学家认为，通过对问题情境的内在性质有所顿悟的方式来解决问题，就可以避免与这一问题情境不相干的行动，而且有利于把学习迁移到新的问题情境中去。魏特墨在《创造性思维》一书中，区别了两种类型的问题解决办法：一类是具有首创性和顿悟式的解决的办法，另一种是不适当地应用老规则，因而不能真正解决问题的办法。魏特墨最喜欢引用的一个例子是，一位值夜班的护士，在深夜 11 点，将一个病号叫醒说："现在到了你该吃安眠药的时候了"。这是不考虑与问题情境有关的特征，机械运用老规则而导致愚蠢行为的一个典型事例。

顿悟学习是要把握事物的本质，而不是无关的细节，魏特墨在《创造性思

维》中举了一个例子。1910 年,一位学校视导员走访一个班级,想对这些学生的聪明程度做一番评估。他问到"一匹马有多少根毛?"一位学生回答"有132 468 218根毛。"视导员问"你怎么知道的?"学生说"如果你不相信,可以去数"。全班同学哄堂大笑。该视导员说"我回去把这个故事讲给同事听,他们一定会喜欢"。一年后,这位视导员又来到教室,教师问他的同事对他讲的故事有什么看法,他说我没有讲给他们听,因为我忘了学生说的数字了。这个视导员没有理解实质性的东西,不知道具体数字是无关紧要的。

魏特墨认为,学校学习的目的,是要把习得的内容迁移到校外情境中去。通过机械记忆习得的内容,只能被用于非常具体的情境,即应用于类似于最初学习时的情境,只有通过顿悟习的知识才能成为技能的一部分。

为了说明这个问题,魏特墨经常用学生如何求平行四边形面积为例。他去听一堂课,教师在全班知道求长方形面积后,画了图 2.1(1),并从左上角往下画垂线,将平行四边形的面积问题转化为长方形的面积的方法让学生求平行四边形的面积。

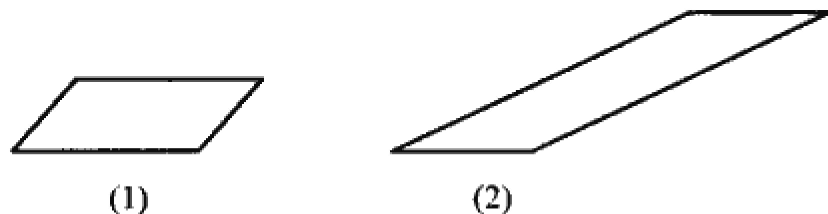


图 2.1　平行四边形

第二天,魏特墨又去了,教师让一个学生来回答平行四边形面积是怎样求得的,学生正确地解答了。魏特墨在想,学生究竟学到了什么?魏特墨问教师他能否向学生提一个问题,教师欣然答应。他走到讲台,画了如图 2.1(2)的图形,让学生求面积。一些学生认为他们还没有学习这种图形面积的求法,另一些学生,像教师一样画垂线,然后他们看上去不知如何是好。还有一些学生他们将纸转了 45 度。显然,对许多学生来说学习是机械记忆,这些学生只记住了教师所有的具体方法,但却未理解方法的实质,即将平行四边形的面积问题转化为长方形的面积,因此无法迁移。魏特墨认为如果教师在一开始,就将平行四边形剪下来,让学生看着处于不同角度的平行四边形,从而对它有一个整体的了解,就不会出现上述问题了。也就是说,教师应该使学生观察各种不同的情境中的平行四边形,这样就比较容易产生学习的迁移,但学生面对各种情境时,都能发现问题的实质。

在格式塔心理学看来,学习是发展新顿悟或改变旧顿悟的过程,是学习者对环境中模式或关系从模糊到清晰的感觉和认识,因此学习是有目的的、探究的、富于想象力的过程。格式塔心理学理论,对数学教学是有一定的积极意义的。从格式塔学派的理论我们可以得到一些启示:了解学习情境中的整体性,注意思

维过程中的顿悟作用，这对数学教学有一定的帮助。如：

设 $\dfrac{1}{1\,999-\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{1}{1\,999}$，求$\dfrac{x}{x+1}$的值。

观察等式两边，只有从整体上考虑，就会顿悟到 $\dfrac{x}{x-1}=0$，从而 $x=0$，进而 $\dfrac{x}{x+1}=0$。

再如：

若 x,y 是实数，且 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}}{x+2}$，求 $\log_{\sqrt{2}}(x+y)$.

学生拿到本题，经常是想从 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}}{x+2}$ 中试图解出 x,y 或 x,y 的简单关系式，结果受挫。此时若冷静地观察所给的等式，顿悟到分子要有意义，只能 $x=2$ 或 $x=-2$，但由分母得 $x\neq-2$，所以 $x=2$，因此 $y=0$。

进而求得 $\log_{\sqrt{2}}(x+y)=2$。

上述实例实际上说明，在数学的学习过程中，学生需要一定的对对象的感悟能力，但如果将这种理论运用不当，就会发现学习过程实际上是就是聪明才智的展示过程，容易形成数学是部分人的学问的认识，这与大众数学的思想是相悖的。

2.2.3 现代认知理论（建构主义理论）

建构主义心理学是在认知心理学的基础上发展而来的，因而也称为现代认知心理学。当今建构主义学习观的主要心理学来源是皮亚杰（Piaget J）的儿童认知发展理论。在他看来知识既不是客观的东西，也不是主观的东西，而是个体在与环境交互作用的过程中逐渐建构的结果。他的基本观点是，不能把认知的发展与智慧的成长割裂开来。

基于这一观点，皮亚杰对把学习看作是因为经验而产生的行为变化的行为主义者持批评的态度。他认为一个刺激要引起某一特定的反应，主体及其机体就必须有反应的能力。因此我们首先关心的是这种能力。在他看来，儿童对世界的认识，主要取决于他们内部特定的认知结构，而不是客观存在的外部刺激。

我们来看一下皮亚杰的认知发展理论。

1. 认知发展的基本过程

皮亚杰理论体系中有一个核心概念是图式。图式是指个体对世界的知觉、理解和思考方式。在皮亚杰看来，图式是人类认识世界的基础，图式的形成和发展是认知发展的实质。皮亚杰认为，认知发展是受三个基本过程影响的：同化、顺应和平衡。

同化是指个体在感受到刺激时，把它纳入头脑中原有的图式之内，使其成为自身的一部分。顺应是指有机体调节自己内部结构以适应特定刺激情境的过程。顺应与同化是伴随而行的。当个体遇到不能用原有图式来同化新的刺激时，便要对原有图式加以修改或重建，以适应环境，这就是顺应的过程。可见，就本质而言，同化主要是指个体对环境的作用，顺应主要是指环境对个体的作用。

平衡过程是指个体通过自我调节机制使认知发展从一个平衡状态向另一个平衡状态过度的过程。平衡过程是皮亚杰认知发展结构理论的核心之一。认为个体的认知图式是通过同化和顺化而不断发展，以适应新的环境的。个体每当遇到新的刺激，总是试图用原有的图式去同化，若获得成功，得到暂时的平衡。如果不成功，个体便会作出顺应，即调节原有图式，直至达到新的平衡。

2. 认知发展的阶段

皮亚杰理论的焦点是个体从出生到成年的认知发展阶段。他认为认知发展不是一种数量上简单积累的过程，而是认知图式不断重建的过程。所以，我们不能用成人的思维方式来推断儿童的思维，因为不同的人具有不同的认知图式，因而也就有不同的认知方法。

皮亚杰把认知发展分为四个阶段。即感知运动阶段（儿童从出生到两岁左右）、前运演阶段（2～7岁左右）、具体运演阶段（7～12岁左右）、形式运演阶段（12岁左右）。皮亚杰在概括他的认知发展阶段的理论时强调，各阶段出现的一般年龄虽因各人智慧程度或社会环境不同可能会有差异，但各个阶段出现的先后顺序不会改变。

3. 影响认知发展的因素

皮亚杰认为，影响儿童认知发展的主要因素是：成熟、物理环境、社会环境，以及具有自我调节作用的平衡过程。

我们再来看一下皮亚杰对学习的原理的分析，皮亚杰坚持认为，只有在学习者仔细思考时才有有意义的学习。学习的结果，不只是知道对某种特定刺激作出某种特定的反应，而是头脑中认知图式的重建。皮亚杰认为学习从属于发展，学生学到些什么，取决于他的发展水平。认为知觉受制于心理运演，即认为知觉是一种主动的、有目的的搜索活动，而不是毫无目的的扫视。知觉者常常凭借进行推理的心理活动，已经知道了自己要看的东西。所以，视觉仅仅是心理活动—推理—的外显。认为学习是一种能动建构的过程，在皮亚杰看来，学习并不是个体获得越来越多的外部信息的过程，而是学到越来越多有关他们认识事物的程序，即建构了新的认知图式。所以，当皮亚杰学派者在研究学习时，他们常常问“你是怎么知道的？”而不是“你知道吗？”在他们看来，如果学生不能解释他是怎么知道的就说明他实际上还没有学会。

皮亚杰把研究的重点放在学习者在解决问题时，认知是如何发生变化的。

例如，为什么一个5岁小孩看到水从一个玻璃杯倒入另一个形状不同的玻璃杯时，会认为水量发生了变化，而在7岁以后就认为水量相等呢？皮亚杰认为儿童学到的是一种解决问题的程序，或者说形成了一种新的认知图式。这种图式不仅是原有图式的延续，而是创造性的，它在性质上已不同于原来的图式，从这个意义上讲，学习是反复抽象和创造的过程，是在原有图式上建构新的认知图式。

所以皮亚杰认为，通过练习，也许可以教给儿童某种知识，但这种知识很快就会被遗忘，除非儿童能够理解它，也就是说，除非儿童能够把它同化到他已有的认知图式中去。

皮亚杰认为，否定是一种有意义的学习。通过否定的行动解决矛盾、消除差异、排除障碍或填补间隙，这些都是否定的形式。随着儿童的发展，他们采用不同的否定形式。例如，一岁小孩想要得到一个玩具，中间有一把椅子，儿童可能通过踢翻椅子来否定它或绕过椅子来否认它。

皮亚杰还认为，在每一类否定内，儿童会显示出三种不同水平的理解，这取决于他们是如何否定的：第一，否认失调或矛盾；第二，承认失调，但还不能补偿它；第三，既承认失调，又能够补偿它。例如，在一项实验中，给儿童看从A至G的7个一排的圆圈，A的直径是10毫米，每个圆圈直径递增1毫米。儿童很容易看出A与G的大小不等，但相邻的两个却不能辨别出其直径的不同。通过不断地提问，使儿童感到答案出了矛盾。即发现“没有哪一个相邻的圆圈不同，但是A与G确不同。”

最初，儿童可能否认“所有圆圈都相同”和“A与G是不同的”的矛盾，而只是将G看成是一个特例，这属于第一种水平；

稍后，儿童开始对自己的答案感到不安，一旦儿童感觉到“A与G的比较”是“A与B的比较”的延伸，“A与B相同”与“A与G不同”的矛盾就显露出来了，这时候，儿童可能会说“我猜它们中间有些圆圈大小在变。”这属于第二种水平；

最高的互补形式是，儿童通过推理：如果，$A=B,B=C,\cdots\cdots$，那么必然$A=G$，但G比A大，这使得前面的等同关系不成立了，只有在儿童理解相邻之间的一系列重复相似与A,G的不同之间所具有的意义时，才能得出合理的结论，也就是达到第三种水平。

皮亚杰学说的最大贡献是，他认为儿童的智慧和道德结构和成人不一样，因而教学方法应尽一切努力按照儿童的心理结构和他们的不同发展阶段来进行教学。

建立在认知心理学基础上的学习理论认为学习中存在着一个认知过程，学习是认知结构的组织与重新组织。强调学习者原有知识经验的作用，也强调学习材料本身的内在逻辑结构。认为有内在逻辑结构的材料与学生原有认知结构

关联起来，新旧知识发生相互作用，新材料在学习者头脑中获得了新的意义，这些就是学习变化的实质。建构主义的知识观认为，知识只不过是人们对客观世界的一种解释、假设或假说，它不是问题的最终答案，它必将随着人们的认识程度的深入而不断地变革、升华和改写，出现新的解释和假设。知识并不能绝对准确无误地概括世界的法则，提供对任何活动或问题解决都适用的方法。在具体的问题解决中，需要针对具体问题的情境对原有知识进行再加工和再创造。

建构主义学习理论认为，从某种意义上，学习就是对理解的探究。然而，什么是理解呢？理解就是知识的内化过程。真正的理解只能通过学习者自身基于自己的经验背景而建构起来，取决于特定情境下的学习活动过程。否则就不叫理解，而是叫死记硬背或生吞活剥，是被动的复制式学习。“数学的概念、方法、事实如果是内部知识网络的一部分，那么这些概念、方法、事实就是被理解的。更具体地说，这些数学知识是被理解的，如果它的心理表征是表征网络的一部分。”①有意义学习产生之时，也就是对新知识的理解获得之时。

建构主义理论对教学具有一定的积极意义，认知心理学家布鲁纳在教学上主张发现教学，认为学科的知识要靠学生亲自探索，去发现知识的内容，提出了发现教学法。发现法的一般步骤：设置问题情境；提出假设；上升到概念或原理；转化为活的能力。

认知心理学家奥苏伯尔根据要学习的内容与学生已有的知识经验的关系把学习分成两类：有意义学习和机械学习。“有意义学习过程的实质乃是以符号代表的新观念与学生认知结构中的原有的适当的观念建立实质性和非人为的联系。”②认为学习是在原有的认知结构的基础上形成新的认知结构的过程，并认为学生在学校的学习，主要是通过语言形成理解知识的意义，接受系统的知识。因此他提出了有意义学习的概念，有意义学习既包括有意义的接受学习，也包括有意义的发现学习，不能把接受学习和机械学习等同起来。只要加强学习者的有意义的理解，接受学习就不一定是被动的学习，而完全是主动的和有意义的。这是在早期（绝对）认知心理学理论完全否定接受学习的基础上发展而来的更具有合理性的一种观点。

如“数学极限”概念的教学，要使学习成为有意义的学习，就必须结合学生的认知发展情况进行讲解，使学生理解其本质意义。一般可以将教学分为三个步骤：第一步，举例。即列举大量与学生的学习和生活等方面有关的“无限趋近”的例子，使学生认识到从数学角度研究这一问题的必要性，并从感性上认识“当 n 充分大时，a_n 无限接近于 a ”的意义；第二步，图像表示。即借助于几何直

① 巩子坤.论理解的层次性与接受学习的取向.数学教育学报，2006.1(78).

② 同上.

观(如数轴)使学生认识“随着 n 的不断增大，a_n 与 a 的距离越来越小，而且只要 n 充分大，这个距离可以任意小”；第三步，给出定义。即用数学语言来刻画“极限现象”。这看上去是一个接受学习的过程，但由于每一步都强调了学生对问题的理解，因而实际上也是有意义学习。

认知心理学提示我们，在数学教学中，如果我们能够将讲解建立在学生原有的基础上，也就是说是学生可以理解并有兴趣的，使学生感觉到学习的意义，这样的教学才是有效的。如上述“极限”概念的教学，因为能使学生有意义的理解，学生就会不觉得极限难以理解。

奥苏伯尔提出，有意义的学习必须具备三个条件：

第一，要求学习的材料本身具有逻辑意义；

第二，学生原有认知结构中具有同化新材料的知识，即新材料能在学生原有认知结构中找到固定点；

第三，学生具有有意义学习的心向，即学生在新的学习任务面前能主动激活自己原有知识，使新旧知识发生相互作用。

在这三个条件中，奥苏伯尔特别强调学生原有认知结构中上位知识的作用，因此当学生遇到新的学习知识而又缺乏上位同化点时，教师可以设计先行组织者，从外部向学生头脑中输入一个一般上位观念，以便同化知识。

尽管建构主义有诸多流派，但对学生学习有如下共识：

(1) 学习是一个积极主动的建构过程，学生不是被动地接受外在信息，而是根据先前认知结构主动地和有选择地知觉外在信息，建构其意义；

(2) 课本知识并不是对现实的准确表征，它只是一种解释，一种较为可靠的假设，学生对这些知识的学习是在理解基础上对这些假设做出自己的检验和调整的过程。因此，知识可以视为个人经验的合理化，而不是说明世界的真理；

(3) 学习中知识建构不是任意的，它具有多向社会性和他人交互性。知识建构的过程应有交流、磋商，并进行自我调整和修正；

(4) 学生的学习过程是多元化的，由于对象的复杂多样化、学习情感的某种特殊性、个人经验的独特性，使得学生对对象意义的建构也是多维度的。

依据建构主义的观点，我们可以认为，数学学习是指学生在教育情境中，以数学语言为中介，自觉地、积极主动地掌握数学概念、法则、定理、公式，形成数学技能和数学活动经验，发展数学能力和思维品质的过程。建构主义的教学模式的共同点是，反对传统教学的机械的、客观主义的知识观，认为知识是在主体与情境交互作用中，在解决问题的过程中，能动地建构起来的。知识不是价值中立的，而是蕴涵着主体的价值追求，因此建构主义教学观。本质上是对人的主体价值给予充分尊重的教学观，体现了现代教学论的发展方向。

建构主义认为数学学习的特点为：学生的数学学习是数学知识“再发现”的

学习;学生的数学学习需要教师的"点拨"和"引导";学生的数学学习需要较强的抽象概括能力;学生的数学学习受情感因素的制约;学生的数学学习要经历不同的阶段。

建构主义认为学生的有效数学学习活动主要呈现出如下一些特点:学生数学学习的过程是建立在经验基础上的一个主动建构的过程;学生数学学习的过程充满了观察、实验、猜想、验证、推理与交流等丰富多彩的数学活动;学生的数学学习过程应当是富有个性、体现多样化学习需求的过程。

建构主义学习理论对指导数学学习有多方面的意义,首先由于其强调了知识学习是一个建构过程,必须突出学习者的主体作用,因此在教学中便更加关注学生学习的个性化特征,使其在知识学习中获得合理的个人经验的内化。但是建构主义学习理论也有其弊端,这在下一节我们将进行研究。

2.2.4 人格取向的教学理论

人本主义心理学,它是研究人的本性,关心人的价值和潜能,解决与人类有关问题的心理学派,20 世纪 50—60 年代兴起于美国,人本主义学习理论的主要代表人物是社会心理学家马斯洛(Maslow A H)、人格心理学家奥尔波特(Allport G W)、心理治疗家和教育改革家罗杰斯(Rogers C R)。

人本主义心理学坚持人的整体性与不可分割性,强调学习过程中人的因素。所以学习论的基本原则是必须尊重学习者,必须把学习者视为学习活动的主体,必须重视学习者的意愿、情感、需要和价值观,必须相信任何正常的学习者都能自己教育自己,发展自己的潜能,并终于达到"自我实现",必须在师生之间建立良好的关系,形成情感融合、气氛适宜的学习情境。我们首先来看罗杰斯的几条学习的原则。

1. 人类生来就有学习的潜能

人生来就对世界充满好奇心,但这种好奇心往往因他们在学校教育中的经验而变得迟钝了。在罗杰斯看来,学习者总是怀着一种矛盾的心理渴望发展和学习。之所以说心理矛盾,是因为任何一种意义学习都包含某种程度的痛苦:或者学习本身是痛苦的,或者是由于学习时不得不放弃某些已有观念而引起的苦恼。第二种矛盾心理可以以一个刚进名牌大学的学生为例来说明,这个学生在中学读书时,无疑是个尖子生,进入这所名牌大学后发现自己并不出众,承认这一点是一种痛苦的学习。尽管学习包含痛苦,但希望通过学习来改变这种局面是由人的天性决定的,人本主义对教育的全部探讨,都是建立在学生的这种渴望学习的天性上。

2. 当学生觉察到学习内容与他自己目的有关时,有意义学习就会发生

在罗杰斯看来,一个人只会有意义地学习他认为与保持和增强自我表现有

关的事情。例如,两个学生都选修统计学,一个学生正在从事一个研究项目,他迫切需要掌握统计学课程中的有关内容,以便顺利完成研究项目。而另一个学生则只是为了获得学分而选修这门课程。由此而引起的学习上的差异是不言而喻的。前者从事的是一种"实用的学习"(function learming),后者是学会如何"熬过"(get by)这门课程。因此,同样的学习过程,不同的人却有不同的学习意义。

与这一学习原则相关的另一个要素是学习速度的问题。罗杰斯认为,当学习者认为学习有助于达到某一目的时,学习速度就会加快。

3. 当外部威胁降到最低限度时,就比较容易觉察和同化那些威胁到自我的学习内容

罗杰斯十分强调学习氛围对学生的影响。例如,阅读迟钝的儿童始终会由于自己这方面的缺陷而感到不适应或受到威胁。当他不得不面对全班同学大声朗读时,当他因朗读受到嘲笑时,当他的成绩反映了他在这方面的失败时,他在今后的学习中阅读能力肯定不会有长足进展。但是如果在一种相互理解和相互支持的环境里,在没有等级评分和鼓励自我评价的环境里,就可以消除上述这种外部威胁,从而使阅读取得进展。

4. 涉及学习者整个人(包括情感与理智)的自我发起的学习最持久最深刻

罗杰斯反复强调只有全身心(gut level)投入的学习,才会对学生发生深刻的影响。当学生尝试着发现自己得出的新观念、学习一种难度较高的技能,就会产生这类学习。在这些创造性的学习中,学生是不由自主地投入学习。在这些学习情境中的一个要素是,学生认识到这是他自己的学习,他可以一直学下去,也可以中途而止,无须权威人士来决定。这种学习便是最持久也是最深刻的。

根据这些学习原则,罗杰斯认为,凡是可以教给别人的东西,相对来说都是无用的,即对人的行为基本上没有什么影响。能够影响一个人行为的知识,只能是他自己发现并加以同化的知识。因此教学(teaching)的结果,如果不是毫无意义的那就可能是有害的。因为每个人生来就有学习的动力,并能确定自己的学习需要。现在学生做不到这一点,是由于受到学校和社会的束缚。所以教师的任务是要允许学生学习,满足他们的好奇心。换言之,教师的任务不是教学生知识(这是行为主义的观点),也不是教学生怎样学(这是认知主义的观点),而是要为学生提供学习的手段,由学生自己学习,也就是说教师所进行的,应该是"分指导性教学"。

促进人的自我实现,是罗杰斯"分指导性教学"的根本目标,"自我表现实现"既是人的最高价值,又是一种本能的需要。"自我表现实现"的人,是人的潜能和价值得到充分实现的人,是人格完美的人。罗杰斯认为生长和发展是一种不断趋向自主、不断摆脱外部控制的过程。因此唯有当学生得到尊重时,他们才

能更好地朝向自我实现,从而能比较自觉地获得与现实相一致的经验。这就与自20世纪初以来一直占统治地位的行为主义学习理论发生了尖锐的冲突。为此,罗杰斯与斯金纳就学与教的问题争论了几十年。

人本主义对数学教学的启示是:在数学教学中,我们应该使每位学生都得到尊重,都学到一定的数学知识。但是,人本主义在充分强调人的天性的同时,却忽视了外界力量对人的影响,将学习完全建立在一种自发性的基础上,这是过于理想而不现实的。因为,无论如何将学习始终看成是一件轻松愉快的事情,并认为人人都能自觉地学习是不切合实际的。

在20世纪,数学学习理论经历了从行为主义到认知主义的发展历程。20世纪下半叶,随着学习心理研究的不断深入,行为主义忽视学习的内在心理过程的严重缺陷已日益明显,越来越多的心理学家转向关注学习的内在过程,这促成了认知主义学习理论的形成。从20世纪六、七十年代始,数学学习理论中的认知主义取代行为主义成为一种发展趋势,但是,客观地说任何一种学习理论都有其运用的价值,采用互相借鉴、相互配合的方法进行数学教育研究是可取的。

2.3 建构主义与数学教育

由于新一轮的基础教育改革从一定意义上说是建立在建构主义理论基础上的教学改革,因此,对建构主义有足够的认识,能够便于我们对改革的各种现象进行仔细分析,从而理解改革的基本思想,并克服改革中的困难,使改革取得实效。鉴于此,本节专门讨论建构主义理论与数学教学的关系。

2.3.1 由极端建构主义到社会建构主义的发展

我们知道,就其最基本的含义而言,建构主义是建立在对学习活动(更一般的说就是认识活动)本质的认识论分析的基础上的。建构主义理论认为,学习并非对于教师所授予的知识的被动接受,而是学习者以自己已有的知识和经验为基础的主动建构的过程。这就是所谓的"建构说"。

由于"建构说"对于传统"授予说"的直接否定,因此就有着十分重要的教育含义。例如,以下就是一些由于建构主义的兴起而导致的观念的转变:

1. 关于"理解"的不同解释

由唯一强调知识的"客观意义"转而更加注重主体内在的思维过程。例如,就概念的理解而言,人们在先前所强调的往往只是概念的"客观意义"(这里具体体现在教材中的标准定义)的把握,与此相对照,人们现今则更加注意从"主观"角度去进行分析,也即是把新的概念纳入到学习者已有的认知框架之中,从而使之获得明确的意义(这也就是所谓的"意义赋予"),由此而来,对同一个学

习内容,不同的学习者便有不同的理解,而这些理解都是基于学习者原有的认知结构状况的。

2. 对于“错误”的不同态度,也即是由纯粹的否定转而采取了更为理解的态度

具体地说,在先前教师往往把学生在学习过程中所产生的各种不同于“标准观念”(或“标准做法”等)的想法(或做法等)看成完全错误的,从而也就必须彻底地予以纠正。与此相对照,建构主义理论使人们对此则采取了较为理解的态度,并力图去发现其中的积极成分。一些学者更进一步提出,所说的各种不同观念事实上根本不应被看成“错误观念”,而应正名为“替代观念”(alternative conception)。

3. 对于学生个体特殊性的高度重视

由于学习者已有知识和经验构成了新的认识活动的直接基础,各个学生因其个人经历与社会环境的不同无疑又有着不同的知识和经验,因此,按照建构主义观点,我们就应明确肯定学生认识活动的个体特殊性。

以上所论及的观念转变应当说都有其一定的合理性,而且对教学而言,就意味着教师应该将学生的认知结构状况视为教学的出发点,并在教学过程中,始终以学生为主体,这对指导教学是有积极意义的。但是,从理论的角度看,我们在此显然又可以提出一定的疑问。例如,就概念的理解而言,如果只是强调了“纯主观”的解释,也即认为是一个纯粹的意义赋予的过程,一些学者更断言:每个人都是以自己的特殊方式(idiosyncratic way)认识世界,从而“一百个学生就有一百个不同的建构”那么概念(特别是数学概念)便没有其确定的客观意义。对于在学习过程中所产生的各种观念也没有“正确”与“错误”的区分。尽管我们应当充分肯定学习活动的个体特殊性,但是,学习过程应该具有一定的规律,或者说,各个学生的学习活动也应该具有一定的共同性。因此,将建构主义的理论不加分析地运用于数学教学之中,将会使数学教学陷入混乱,而没有规律。教师的教学工作对于学生学习活动的积极意义也就将遭到了彻底的否定。这种极端的立场当然是不可能为人们所普遍接受的。

有一个情景可以部分说明这一问题。一个人走进一鞋店买三双鞋,每双鞋的价格是 20 美元。店员说三双鞋要 60 美元,等着顾客给他钱。但顾客回答说,每双鞋 20 美元,三双鞋不是 60 美元,而是 60 双鞋,他向店员要 60 双鞋[①]。顾客这样做对吗?当然也没错(如果认为店员是对的,单位的理解)。这就是说对同一个数的概念,不同的人有不同的理解,这也是建构主义的基本观点。然而,这种极端的对数的理解不可能被每个人接受,因为如果这样,将陷入混乱。因此,

① [美]M·克莱因著.数学与知识的探求.刘志勇译.上海:复旦大学出版社,2007.2(49).

人们必须对每一问题达成协议，或者说有一个大家都接受的解释。

事实上，近年来获得普遍重视的“社会建构主义”（social constructivism）在很大程度上就可以被看成对于个人建构主义片面强调认识活动个体自主性的一种直接反对。就社会建构主义而言，其主要特征之一是对于认识活动社会性质的明确肯定，这就是说，认识不应被看成一种纯粹的个人行为，而必然有一个在不同个体之间进行表述、交流、批评与反思以及不断改进的过程。从而个体的认识活动（包括智力的发展）事实上就是在一定的社会—文化环境中得以实现的，也即主要地应被看成是一种社会行为。

就认识活动的社会性质而言，社会建构主义突出地强调了所说的社会—文化环境对各个个体的规范作用，特别是，从历史的角度看学习更主要地被看成一种“文化继承”的行为。显然，这事实上也就从一个角度为知识的客观性提供了依据。也就是说认为知识不具有客观性的观点是不全面的，而对知识客观性的肯定，也就为知识的传授提供了理论依据，因此，其观点是，知识具有客观性，但个人对其理解具有主观性，但是个人必须通过与学习同伴的交流，对知识达成共识。

显然，从上述角度去分析，社会建构主义相对于个人建构主义而言是要更为合理，特别是，从教育的角度看我们更应突出地强调以下的事实。即现代的科学知识不可能完全依靠个人的努力（或简单地互动）自发地得以形成。从而，学习活动主要地就是一种文化继承的行为，或者说，我们应该更明确肯定教学活动的规范性。教学活动是一个具有明确目标，高度组织化了的社会行为，特别是，教师更应在其中发挥主导作用。

然而，社会建构主义也有其不合理的部分，具体地说，我们在此可看到“社会建构主义”的一种极端形式，即是片面地夸大了“权威和权利”等非理性因素在认识活动中的作用，如果我们盲目地追随社会建构主义的主张，最终就将重新回到传统的“教师权威型”教学。

从以上分析可以看出，种种建构主义的一个共同弱点，即是未能正确地认识在建构与反映之间所存在的辩证关系。因此，有的学者（如郑毓信）指出，除去“普遍性”这一含义以外，我们还应该在一种更为基本的意义上去肯定知识的客观性，也即应当明确肯定认识的客观基础。也就是说，认识事实上应被看成建构和反映的一种辩证统一。

另外，就学习活动，由于认识活动事实上是“个体性”与“社会性”的一种辩证统一，因此在充分肯定认识活动个体性质的同时，我们又应该清楚地看到认识必须是在一定的社会环境之中进行的，并主要地是一种文化继承的行为。同样地，在肯定认识活动个体性质的同时，我们又应该看到在各个个体之间必然存在一定的共同性（特别是，这正是社会规范性作用的一个直接后果），而后者则构

成了教学规律的根本依据。

我们又应看到，所说的规范化并非是指通过外部的控制去达到绝对的同一性，恰恰相反，教学活动的规范性即有效地去促进学生对于知识的建构。可以说，规范化是认识活动建构得以不断深化和发展的一个必要条件，而认识活动的主动建构就直接决定了学习活动的多样性和丰富性。

另外，对于认识活动的理性与非理性的关系，我们应该看到，尽管各种非理性的因素在学习过程中发挥了十分重要的作用，但是，我们又应该使学生的学习成为一种自觉的理性行为，也即建立在清醒的自我表现意识，自觉的反思和理性的选择之上。

根据以上分析，事实上也就在一定程度上反映了建构主义的新近发展。这首先就是指由极端建构主义的"一统天下"转向多种观念同时存在的局面，特别是，我们应当高度重视社会建构主义在现代的兴起。其次，人们现在更加倾向于对立观点的综合和互补。

2.3.2 建构主义与数学教学

以下再联系数学教育的特殊性对建构主义的教育含义作出进一步的分析。

让我们先考虑这样一个问题，即数学对象（如算术中的1,2,3,……，几何学中的点、线、面、三角形等）究竟是一种什么样的存在？

容易发现，我们似乎处于一种两难的处境，因为数学对象显然并非现实中的真实存在，而只是抽象思维的产物。但是，在数学中我们所从事的又显然是一种客观的研究，那么我们究竟应该如何去对数学对象的"客观性"作出说明呢？

其实，这个问题直接涉及了数学思维的如下基本特征：首先，数学抽象就其本质而言是一种建构的活动（思维活动），数学对象正是通过这样的活动得到了建构；其次，我们又应看到这种建构活动的形式特征是，数学对象是借助于明确的定义得到建构的，而且在严格的数学研究中，无论所涉及的对象是否有明显的直观意义，我们都只能依据相应的定义和明确给出的规则去进行推理，而不能求助于直观。再次，我们应明确地肯定数学建构活动的社会性质，特别是，个人的创造完全取决于相应的社会共同体（"数学共同体"）的"判决"。只有为数学共同体所一致接受的数学概念（以及方法，问题等）才是真正成为数学的组成部分，从而，数学对象就不能看成纯粹的个人建构，而是数学共同体的共同建构。

从以上分析可见，由于数学建构活动的形式特征，因此这不可能单凭借个人的努力（或通过简单的合作）自发的得以完成，从而数学教学活动主要地就是一种规范性（或者说文化继承）的行为。

由于学习活动的自主性与教学活动规范性的辩证关系，在明确肯定数学活动规范性的同时，也必须高度重视数学学习活动的自主性。特别是，由于数学概

念除相应的符号外并没有直接的物质表现。因此,数学对象的认识首先就是一个建构的过程。如果学生不能在思想中实际地建构出相应的对象,即使得"外化"了的对象重新转化为思维的内在成分,就不可能获得真正的数学知识。

那么我们如何才能使"外化"了的数学对象重新转化成思维的内在成分呢?显然,这并非是指在头脑中机械地去重复有关对象的形式定义,而主要是一个意义赋予的过程,即应把新的概念纳入到主体已有的知识框架之中,从而成为可以理解和有意义的。

作为问题的另一方面,我们又应看到,就数学学习活动而言,还存在有一个如何依据数学概念的"客观意义"去对各个个体经由相对独立的建构活动所获得的"个体意义"进行调整的过程。相对于意义赋予而言,数学学习同时也是一个"文化继承"的过程。这就是说,数学学习不仅是一种"解释"的活动,而且也是一个对数学对象的社会意义(客观意义)进行"理解"的过程。这正如有些学者所指出的,数学学习即是对由文化历史所传递给我们的数学作出意义赋予的过程。

建构主义近年来在教育领域中产生了十分广泛的影响,以致一些学者认为,现今几乎每一个数学教育工作者都可在一定程度上被看成一个建构主义者。建构主义的基本观点是认为人们的认识活动并非头脑对于外界的被动反映,而是一个主体以已有的知识和经验为基础的主动的建构过程。显然,作为对于认识活动能动性质的直接肯定,建构主义是有一定合理性的。但是,作为问题的另一方面,我们则又应当看到,认识并非个体的活动,而又正是客观实在为主体的认识活动提供了最终的渊源和检验标准。从而,在面对"建构主义"浪潮时,我们就应十分注意防止各种极端的观点,并从整体上清楚地看到建构主义在理论上的局限性。在利用其合理部分的同时看到其局限性,是我们学习和利用各种学习理论进行教学的基本态度。

2.4 学习理论对数学教学的影响

前面我们对学习理论的一些基本观点进行了介绍,我们可以认为任何一种学习理论都是对学习活动的一种解释,也都具有一定的合理性和一些局限性。因此,在进行数学教学中,或对数学教学的问题和现象进行分析研究时,我们都不能完全肯定或完全否定任何一种理论的作用。那么,如何将学习理论运用于数学教学实践呢?本节我们结合数学教学的一些问题来说明学习理论对数学教学的影响。

2.4.1 学习动机的激发

数学学习动机是指激励、推动学生学习数学的内部动力，直接关系到学生数学学习活动的水平、进程和效果，它一般分为外部动机和内部动机。当代认知心理学家用认知不协调(cognitive dissonance)[①]的理论来解释学习动机。认为人总是力图使自己的思想协调一致，不自相矛盾。当学习者发现某种新知识与自己已有知识矛盾时，就会产生"认知不协调"。如学生在已经掌握了用直角三角形的边角关系定义三角函数后，当遇到任意大小的角时，便产生了"认知不协调"，因为不知道怎样求任意角的三角函数。又如，学生在平面几何中学习了"两条直线如果没有公共点，则两条直线平行"，但在立体几何中，却发现这一原理已经不成立了，因此产生了"认知不协调"。因为人有保持认知协调的倾向，所以认知不协调导致一种"紧张感"，为了消除紧张感，产生了认知动机。一旦学习者的问题得到解决，认知紧张感得以消除，由此产生一种轻松、愉悦、满足的情绪体验。这种积极的情绪体验对认知动机起到一种强化作用。因此我们看到知识的获得能加强学习动机。

相反，如果总是学不懂新知识，此时，认知不协调引起的"紧张感"不仅得不到解除，而且逐渐加剧，因此引发困惑、苦恼、失望的消极情绪。这种消极情绪对认知动机起着"惩罚"作用。最终学习者会采取自我保护措施：为防止紧张感持续过久而采取放弃思考的态度。

认知不协调理论对数学教学的启示应该是，在教学过程中教师应创设情境使学生产生"紧张感"，但这种"紧张感"不能持续过长时间，应帮助学生特别是学习困难学生及时消除紧张感。

在数学教学中，使学生产生"紧张感"实际上依赖于学生"惑"的产生，因为数学是思维的科学，而"惑"是思维发生的根源。惑是一种古老的精神现象，也是生命中常有的现象。在我国，古代几大哲学流派都对"惑"有所研究。如儒家的韩愈的"人非生而知之者，孰能无惑，惑而不从师，其为惑也，终不能解也""师者，所以传道授业解惑也"；在道家学说中惑的含义是对道的不明或不解，如"多则惑，少则得"(《老子》)；在佛学中"惑"是一切烦恼的总称。

惑这种心理现象在数学教学中主要发生在学生遇到数学知识发生发展的生长点和衔接点、数学思想方法的转折点、数学思想的症结点等时机。而惑的解除必须发展学生的认知能力。依据认知不协调理论，无论是惑的生成还是惑的解除，都是产生学习动机的机会。因此从这个角度说，教师进行数学教学的过程就是创造情境使学生产生"惑"和消除"惑"或产生新的"惑"的过程。

---

① 张庆林，赵玉芳. 心理发展与教育. 重庆：重庆出版社，2006.9.

我们知道学习动机是学习的原动力，认知不协调理论解释学习动机的意义就在于，在进行数学教学时，促进学习动机的产生可以通过为学生创设一个思维环境，使学生产生认知不协调的方式来达到目的。也就是说教师可以通过使学生产生“惑”，从而利用解“惑”的方式来促进学习动机的产生，但教师为学生创造的产生“惑”的环境却一定要适当，要能够使学生通过教师的引导和自己的思维能够得以解决。

2.4.2 习得性无助感的消除

“习得性无助感”理论是行为主义心理学的一部分。“习得性无助”来源于心理学家塞利格曼和梅尔(Seligman & Maier)用狗做的一项实验。实验中把狗关在笼子里，只要蜂音器一响，就给狗以电击。多次实验后，在蜂音器响后，给以电击之前先把笼门打开，研究者发现狗不但不会从笼门逃跑，而且不等电击出现就先倒地开始呻吟和颤抖。本来可以主动逃避电击的狗却在开放的笼子中绝望地等待痛苦的来临，心理学家把这种在受到多次挫折后产生的无奈感叫做习得性无助感。

习得性无助感不但发生在动物身上，也会发生在人的身上。习得性无助感的不良后果，主要表现在动机、认知和情绪三个方面。首先，习得性无助感使得个体不再积极努力作出逃离困境的尝试，显得呆板、倦怠，绝望地等待环境给他们安排的任何结局。其次，习得新无助感使个体的认知功能受到阻碍，学习能力明显下降。最后是情绪的不良影响，主要表现为绝望、沮丧、恐惧、退缩、被动、抑郁、神经过敏等。

数学由于其研究对象的抽象和研究方法的严密等特点，对思维能力还正在形成的中学生来说很容易形成习得性无助感。教师的教学要尽量避免习得性无助感的产生。在目前流行的“应试”教育中，由于教师或其他方面是通过学生的考试成绩来鉴别学生的；因此，对那些考试成绩不好的学生就很难避免产生“习得性无助感”。其实，仔细观察我们就能注意到，学生从小学到中学，随着学龄的增加，学生在考试中体验到的失败也不断增加，而一次次的失败，使学生的学习积极性不断受到挫败，为了避免再次体验失败，许多学生便采用了放弃对考试结果的期待的措施，实际上，这就是“习得无助感”对学生数学学习的影响。为使这种影响降到最低状况，教师在每次考试后应及时引导，特别是对成绩不理想的学生更要鼓励，以免产生恶性循环。

2.4.3 发挥元认知对数学学习的作用

现代认知心理学提出了一个学生自我启发、自我监控的概念——元认知(metacognition)。元认知作为一个科学概念是由美国心理学家费拉威尔(Flavell J)

于1976年正式提出的。元认知意指以人的认知过程为对象，并对人的认知过程进行监控、调节，其实质就是对自己的认知活动的自我意识、自我评价和自我调节，是思维品质的内源，也就是说，元认知是对认知过程的认知。

元认知理论对问题解决的数学教学具有重要的启示。问题是数学的心脏，问题解决是数学教学的重要内容与形式。数学学习的一个重要目标就是提升学生解决数学问题的能力。依据元认知理论，在问题解决的过程中，应提倡学生反思。所谓反思，就是从一个新的角度，多层次、多角度地对问题及解决问题的思维过程进行全面的考察、分析和思考。数学学习中的反思主要是对自己的解决问题的过程进行反思，通过反思发现问题，再进行解题策略的调整，这样反复思考，最后解决数学问题。

如钟面问题"在一列数 1,2,3, … ,12 的每一个数的前面都添上'+'或'−'号，所得的代数和能不能为零?"的解决过程。

学生通过试错的办法，碰运气。先在一些数值前面添加负号，然后将钟面上的负数和正数分别相加，如果所有的负数之和的绝对值不等于所有的正数之和的绝对值，就作适当的调整，如此经过几次这样的调整，就可以得出一个正确的答案来。

这样的做法有很大的偶然性，并且虽然得到了一个正确的解答，但仍不知道怎样去找第二个解答，更难知道一共有多少个解答。因此应该去探究解题的规律，也就是进行反思。

由于 $1+2+3+\cdots+12=78$，因此本题相当于"将 1,2,3, … ,12 这十二个数分成两组，使这两组数的和分别为39，然后在任意一组的每个数的前面添加负号"。因此解题的关键在与从十二个数值中任意取出若干个，使其和为39。

为防止遗漏或重复，取数时我们遵循"由小到大"的原则。

注意到这十二个数中最大的三个数

$12+11+10=33$ 小于 39

所以至少要取四个数，于是有：

(1) 四数组

(12,11,10,6),(12,11,9,7),(12,10,9,8)。

注意到 $11+10+9+8=38$ 小于39，所以四数组中必须包括12。每一个数组多可以添负号，也可以都不添负号(数组以外的数都添加负号)，因此一个数组代表两个解答，共得到6个解答。后同。

(2) 五数组

在四数组的基础上考虑，使其前三个数不变，前两个数不变等等，并且保持由大到小的顺序。

(12,11,10,5,1),(12,11,10,4,2),(12,11,9,6,1),(12,11,9,5,2),

(12,11,9,4,3),(12,10,9,7,1),(12,10,9,6,2),(12,10,9,5,3),
(12,11,8,7,1),(12,11,8,6,2),(12,11,8,5,3),(12,11,7,6,3),
(12,11,7,5,4),(12,10,8,7,2),(12,10,8,6,3),(12,10,8,5,4),
(12,10,7,6,4),(12,9,8,7,3),(12,9,8,6,4),(12,9,7,6,5),
(11,10,9,8,1),(11,10,9,7,2),(11,10,9,6,3),(11,10,9,5,4),
(11,10,8,7,3),(11,10,8,6,4),(11,10,7,6,5),(11,9,8,7,4),
(11,9,8,6,5),(10,9,8,7,5)。

共得到60个解答。

(3) 六数组

(12,11,10,3,2,1),(12,11,9,4,2,1),(12,11,8,5,2,1)
(12,11,8,4,3,1),(12,11,7,6,2,1),(12,11,7,5,3,1),
(12,11,7,4,3,2),(12,11,6,5,4,1),(12,11,6,5,3,2),
(12,11,9,5,2,1),(12,10,9,4,3,1),(12,10,8,6,2,1),
(12,10,8,5,3,1),(12,10,8,4,3,2),(12,10,6,5,4,2),
(12,10,7,5,4,1),(12,10,7,5,3,2),(12,10,6,5,4,2),
(12,9,8,7,2,1),(12,9,8,6,3,1),(12,9,8,5,4,1),
(12,9,8,5,3,2),(12,9,7,6,4,1),(12,9,7,6,3,2),
(12,9,7,5,4,2),(12,9,6,5,4,3),(12,8,7,6,5,1),
(12,8,7,6,4,2),(12,8,7,5,4,3)。

得到58个解。

又由于七数组,八数组分别与四数组、五数组重复,故不必考虑。

综上所述共有 $6+60+58=124$ 个解答。

数学学习中,反思历来具有重要的地位和作用。荷兰数学家和数学教育家弗莱登塔尔(Freudenthal H)指出,"反思是数学思维活动的核心和动力","通过反思才能使现实世界数学化"。美籍数学教育家波利亚也认为"如果没有了反思,他们(指学习者)就错过了解题的一次重要而有效益的方面",因此,在数学教学中,我们应提倡学生进行反思,凡有利于促进学生反思自己的思考过程并进一步调节自己思考策略的手段都可以用来作为元认知的训练手段。

《新课程标准》指出:"人们在学习数学和运用数学解决问题时,不断地经历直观感知、反思与建构等思维过程,这些过程是数学思维能力的具体体现,有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和做出判断。"同时提出,评价应关注学生"能否不断反思自己的数学学习过程,并改进学习方法。"通过反思,可以深化对问题的理解,优化思维过程,揭示问题本质,探索一般规律;通过反思,可以沟通知识间的相互联系,从而促进知识的同化和迁移,产生新的发现。因此,反思是一种积极的思维活动,在教学中引导学生学会积极的反思,对于培养

学生学会学习是非常重要的。

2.4.4 促进有意义学习的形成

有意义学习理论是人本主义学习理论的一部分。有意义学习是指一种学生自主、自觉的学习，这种学习要求学习者能够在相当大的范围内自行选择学习材料，自己安排适合于自己的情境。认为学习者不应该经受那种因升留级制度或统一规格的考试而带来的失败感，教育的目标不应该是培养学究式的人。教师的作用是帮助自力更生的学生，是学习的促进者。

为什么自主、自觉的学习是一种有意义的学习呢？人本主义心理学理论认为，依靠机械记忆进行的无意义学习，通过学生的自由选择，可以转化为有意义的学习。例如，面临一大堆枯燥乏味的学习材料时，如果学生自己自由选择其中自己感兴趣的学习材料，那么这时的学习就可以转化为有意义的令人兴奋的事。

有意义学习理论对数学教学的启示是：教师不应按千人一面的教学思路设计教材，教学中应注意选择性。例如在进行例题教学时，要注意一题多解，这样不同的学生可以按自己的兴趣选择解法，从而理解和解决问题。

2.4.5 促进知识的主动建构

知识主动建构理论是建构主义学习理论的一部分。这一理论认为学习是一种学习者主动建构知识的过程，也就是说，世界是客观存在的，但是对于世界的理解和意义赋予却是由每个人自己决定的。学习者是以自己的经验为基础来解释现实、建构现实，由于个体的经验以及对经验的信念不同，于是对外部世界的理解也不同。因此，教育者应关注学习者的原有经验、心理状况等，并关注学习者是怎样来构建自己的知识的。

在目前的数学教学中，一般是教师系统讲解新知识，学生通过模仿和记忆巩固所学知识。评价一个学生是否学会了某一数学知识，也往往是看学生能否识记、复述和模仿练习，学生大都不能真正理解所学知识，更谈不上灵活运用了。实际上，人的知识分为显性知识和隐性知识（或缄默知识），能够系统讲解的知识是显性知识，而理解这些显性知识却要依靠隐性知识。有学者将人的知识比作冰山，显性知识是浮在海面的冰山的一角，缄默知识却是隐藏在海面下的冰山基座。所以构筑坚实的缄默知识基础，并在学习显性知识的时候，将缄默知识转化为显性知识，是学生将数学学习转变为意义建构的基本过程。

对于数学而言，显性知识应该是那些能够通过教师或书本传递给学生的知识，如公式、定理、定义等；而隐性知识应该是蕴涵在显性知识内部的数学思想方法、数学信念、数学精神等。隐性知识在学习显性知识的过程中获得，又在学习新的显性知识的过程中发挥重要的作用，所以显性知识和隐性知识是相辅相成

的。依据这一观点，教师一方面要注意显性知识的教学，而为了使学生的学习保持持久，更应该注意隐性知识的教学。

建构主义理论认为，新知识的学习是以已有知识经验为基础的一个主动意义的建构过程，建构的方式是同化和顺应。同化和顺应是概念转变的机制。同化，使原有认知结构的内容在量上得到充实和丰富；顺应，使原有认知结构得到重组或重构，发生了结构性变化。从知识的上述分类来看，无论是同化还是顺应都是将显性知识转化为緘默知识的过程。

本章思考题

1. 简述20世纪数学学习理论的发展。
2. 建构主义学习理论对数学学习具有什么指导意义？
3. 中学数学学习具有什么特点？
4. 如何认识有效的数学学习活动过程？
5. 建构主义对数学教学有哪些影响？
6. 比较各种学习理论的异同并论述对教学的启发作用。
7. 依据学习理论对某一节课的教师的教学过程及学生的学习过程进行分析。

第3章 数学教学基本原则

3

教学原则是根据教学目标、教学的客观规律，在总结教学实践经验基础上制定的、为教学工作所必须遵循的一般原理或准则。教学原则是反映人们对教学活动本质特点和内在规律的认识，是指导教学工作有效进行的原理和行为准则，它是教学实践的总结，也是提高教学质量的保证。教学原则贯穿于教学活动的整个过程，对教学中的各项活动起着指导和制约的作用。教学原则在教学活动中的正确和灵活运用，对提高教学质量和教学效率发挥着一种重要的保障性作用。教学原则确定之后，对教学活动中的内容、方法、手段、形式的选择，都有着积极而重要的作用，巴拉诺夫指出："教学论原则决定教学方法，选择教学方法和论证其效果有赖于作为这些方法基础的教学论原则，教学论原则体系，就是对学习和掌握教材的基本途径的总的说明。"

教学原则的制定主要依据教学目标、教学规律、教学实践三个方面。一定的教学原则受一定的教学目标制约，为实现一定的教学目标服务。不同的历史时期，教育的性质不同，科学技术发展对教育的要求不同，教学的目标也具有不同的特点。与此相关联的，教学原则也具有一定的时代特点。任何原则的制定都必须符合相应的客观规律，教学原则也应符合教学规律，违反教学规律的原则不但不能促进教学，而且会使教学陷入困境。教学原则也应与教学实践相符和，脱离实践的原则是无效的。

除了上述制定教学原则的主要依据外，数学教学的原则的制定还必须依据教学的一般原则。中国一直都是对教育十分重视的国家，从古到今我们已经积累了一些有效的教学原则，主要有以下几条。首先是启发诱导的教学原则。在世界教学史上，启发式教学思想是孔子最早提出的。孔子认为，任何学习活动都要建立在学生自觉需要的基础上，应当充分调动学生的主动性和积极性。其次是循序渐进的教学原则。这是中国古代儒家提倡的教学原则，指教学既要按照内容的深浅程度由易到难，又要按照学生的年龄特征由浅入深。第三是因材施教的教学原则。因材施教，就是按一定的教学目标，针对学生的个体差异和具体特点，采取不同的教学措施。第四是教学相长的教学原则。教学相长，即教与学的相辅相成，体现了教与学的辩证关系。第五是量力性教学原则。是指教学应当建立在学生通过一定的努力可能达到的知识水平和智力发展水平上，并据此

来确定教学知识的广度，难度和教学的进度。除上述的主要方面之外，中国古代许多思想家，教育家也都提出了一些对教学原则和教学思想的卓越见解。如温故知新、复习巩固、学以致用、学思结合等原则和思想，这些教学原则和思想对我们今天的教学具有重要的指导意义。

数学教学是教师根据一定的教学目标，组织学生有计划、有目的地进行数学学习的过程。为了达到教学目标，教师在教学中必须遵循一定的教学原则。而在制定数学教学原则时，一般来说，我们要依据以下几个方面的原则。首先我们必须依据教育的一般原则，因为数学教育是教育的一部分，因此，教育的一般原则对数学教育有指导意义，数学教育也必须遵循一般的教育原则。其次我们必须依据数学本身的特点，因为数学教育的特点是将数学作为实体的教育，因此，必须符合数学的特点。最后，也是最重要的依据，是必须依据学生的年龄特征。因为教育的对象是学生，教育的最终目的是学生的成长，学生是教育的主体，教育原则的制定必须以学生的发展状况为依据。

3.1 理论与实际相结合的原则

理论与实际相结合，既是认识论又是方法论的基本原则，也是教学论的基本原则，是各门学科的教学都应遵循的原则。在数学教学过程中贯彻落实这一原则，一方面要注意加强中学数学的理论学习，另一方面也要注意数学理论与实际相结合，培养学生运用数学理论解决实际问题的能力。

3.1.1 大力提高中学数学教学的理论水平

理论联系实际的教学原则，首先强调的是数学理论的学习。要求在数学教学的过程中加深对相应理论的理解，从而有助于提高中学数学的理论水平。它有两方面的作用：一方面，只有加深理解，提高中学数学理论水平，才能更有效地用于实际；另一方面，只有提高中学数学的理论水平，才能牢固掌握有关的数学知识。显然，对前期理论的理解，有利于数学后期的学习和应用。

1. 一些要注意的现象

目前，在高中数学教学中，由于应试的需要，许多学校将讲解理论的时间压缩（如三年的课程两年学完，剩下一年用来准备高考的复习）。学生对数学概念、定理等理论知识理解不深刻，这为以后运用知识解决问题留下隐患。在教学观念上，部分教师将数学教学等同于解题教学，对数学知识的产生、形成、发展，以及知识之间的内在联系和网络结构缺乏必要的揭示和认识。导致对数学概念和逻辑体系理解不准确，不深刻，难以形成自身的知识网络，给知识的灵活运用增加了困难。这不仅影响了学生解决数学问题的能力的提高，而且，对学生的学

习兴趣的培养也是极为不利的。因为知之深，才能爱之切。学生对数学知识不理解，也就不可能对数学产生热爱之情。所以这种教学也不利于激发学生的求知欲望和学习兴趣，不利于提高学生的数学能力，不利于发展学生的数学思维，不利于学生数学素养的提高，不利于形成学生的良好心态，不利于学生的可持续发展。这是在教学中我们应该避免的问题。

长期以来，中学数学教学不仅没有注意理论的理解，而且也严重脱离实际，这主要体现在两个方面。一方面，由于上述原因，教师不能将教学的注意力放在帮助学生理解理论上，表现为理论水平不高，缺乏理论指导，所以教学上倾向于记忆加模仿，而不是侧重于理解、系统化和真正掌握。因此，当学生面对一些新的实际问题时，由于找不到可以模仿的程序，又找不到相应的理论，也就表现出不知所措。另一方面，教学内容虽然包括大量需要应用高度解题技巧的难题，但教师缺乏一般解题思想的总结与介绍，所以学生对解题模式的理解也就只能停留在模仿或记忆一些题型上，难以归纳和系统化。所解决的问题又是严重脱离实际的，所以学生无法将所学的知识运用于理解和解决实际问题。

提高中学数学的理论水平主要靠加强一般原理和一般方法的教学，而不应该盲目提高中学数学的理论要求，特别是不应该把内容深奥、关系隐蔽、方法精巧作为理论高的标志。因为加强一般原理和一般方法的教学，无论是在实践性或在能力培养上都具有最广泛的指导作用。例如，代数中的综合除法要比因式分解的一些具体方法和技巧有更高的理论和实践价值，用微分的方法解决有关切线和极值问题，都能进一步提高中学数学的理论水平，也有利于联系实际和能力培养。

加强一般原理和方法教学的关键在于使学生对这些原理和方法有透彻的理解和掌握，重要的不是针对这些原理和方法配备大量高难度的习题，而在于对原理本身的透彻理解、牢固掌握和灵活运用，关键在于透彻理解。

2. 理解的意义

理解，当然不是对有关内容的记忆，也不是停留在对结论证明过程的掌握，甚至也不能满足于当时能运用于解决问题。理解是一个综合性的、复杂的心理过程。它以对现实素材的观察分析作为基础，以对这些现实的素材的本质属性的抽象、概括为关键，以进一步的广泛的具体化、并经类比而与有关的其他理论形成有机的系统联系为结束。最后，还需要以能否解决相应的基本问题作为是否理解的衡量标准。基本问题包括理论问题也包括实际问题。

所以从认识论的角度考虑，理解一个理论，就是完成“从具体到抽象，再到尽可能广泛的具体”。从心理学的角度考虑，理解一个理论，就是将之同化于已

有理论的体系之中，并保证有利于这理论今后的发展[①]。

例如，我们通过绝对值的教学、方程的教学（以字母为系数），可以引导学生概括、抽象出一种基本的数学方法——类分法（或分情况讨论的方法）。这种解决问题的思想方法在实际生产、生活中有广泛应用，同样在数学中也有广泛应用。这个方法要求各种分出的各种情况合并起来恰好是问题包含的所有可能情况，而任何不同的两种情况之间是互相对立的。学生在理解这一方法时，首先必须通过具体的实例抽象出这一方法，然后再将抽象出的思想方法运用于解决数学或其他问题，只有能通过这样的过程，才能说是基本理解了这一思想方法。

又如学生在中学要学习函数的“变量说”和“对应说”两种定义方法。理解就应该使学生对用这两种方式刻画变化的优势加深理解。能够理解变量说是从运动变化的观点反映两个量之间的联系；对应说是从两集合元素之间的联系来反映两个量之间的关系，应该说它们分别从宏观和微观的角度来刻画变化规律。这样的理解不仅能够使学生认识两种定义的相互依赖性，而且也能够使学生认识给出两种函数概念的定义的必要性。

再如，在介绍指数函数、幂函数和对数函数等初等函数时，不仅应使学生对这些函数的性质和定义加深理解，还应使学生理解这些函数的研究意义，使学生认识学习这三种函数的必要性。其实在自然界中，虽然变化的方式是多种多样的，但可以归纳为三种基本的情况，也就是快速变化、中速变化和慢速变化，而这三种函数模型，便可以分别用来描述快速变化、中速变化和慢速变化的过程。

可以看出，理解本身就蕴涵着联系实际，理解本身就孕育着发展，理解本身就意味着知识系统化的要求。理解是一个过程，而且理解的过程也就是各种能力的提高过程。

既然理解是一个过程，教学的关键又是要求保证学生理解相应的知识。所以教学过程应当按理解的要求进行整体设计，全面地考虑。必须透彻理解的有哪些内容？透彻理解这些内容的标志是什么？这些内容的理解过程应当是什么样的？在理解这些内容的各个阶段分别应当达到什么要求？以什么样的练习作保证？检验是否达到各阶段要求的具体标准是什么等等。

3.1.2 加强中学数学与实际的联系

20世纪下半叶以来，数学应用的巨大发展是数学发展的显著特征之一。当今知识经济时代，数学正在从幕后走向台前，数学和计算机技术的结合使得数学能够在许多方面直接为社会创造价值，同时，也为数学发展开拓了广阔的前景。我国的数学教育在很长一段时间内，对于数学与实际、数学与其他学科的联系未

① 十三院校. 中学数学教材教法. 北京：高等教育出版社，1985.

能给予充分的重视，这些问题都应该在今后的教学中注意改进。近几年来，我国大学、中学数学建模的实践表明，开展数学应用的教学活动符合社会需要，有利于激发学生学习数学的兴趣，有利于增强学生的应用意识，有利于扩展学生的视野，应该将数学建模的思想运用于数学的课堂教学。

基础教育改革在加强应用数学的意识方面也作了改进，把培养学生应用数学的意识贯穿在教材的始终，注意把数学知识应用到相关学科和生活、生产实际中去，引导学生在解决实际问题过程中提高分析问题和解决问题的能力。

新课程对高中数学教学的应用意识做了规定，高中数学课程应提供基本内容的实际背景，反映数学的应用价值，开展"数学建模"的学习活动，设立体现数学某些重要应用的专题课程。高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用、数学与日常生活及其他学科的联系，促进学生逐步形成和发展数学应用意识，提高实践能力。中学数学与实际的联系应当注意以下几点：

1. 联系实际的教学内容要更新

为了适应社会发展的要求，不仅要革新中学数学的理论内容，而且在联系实际的观念上、选材上和处理方法上都要有所更新。由于数学研究对象具有抽象的层次性特点，因此数学中的实际不仅指真实的生产、生活的实际问题，也有数学本身的问题。凡是相对于所学理论来说更为具体的问题都应被认为是实际问题，所以实际问题应具有层次性，既包括学生生活中的问题，也包括数学本身的问题。如相对于具体的实际来说，三角形是数学的抽象概念，但相对于讨论一般的多边形来说，三角形又是实际。

2. 中学数学与中学其他学科的配合

中学数学教学应当注意与其他的学科教学紧密配合，数学教师应当了解同年级开设的各科的进度和对数学的要求，以便提前向学生讲授。同时，要注意吸收这些课程中的有关实例，以充实数学教学内容，体现教学过程的理论联系实际的原则。

3. 从实际问题中抽象出数学内容

一些实际问题比较难解，往往不在于数学知识和方法的掌握，而在于对实际问题缺乏理解。因此学生不仅需要一些实际知识，还需要善于从实际问题中抽象出相应的数学模型。在解决实际问题时，关键是从实际问题中抽象出数学内容。即从中抽象出空间形式和数量关系。一些较难的问题，往往难在如何从中揭示数学关系。

例. 在一次集会中，握过奇数次手的人必有偶数个(0 作为偶数)，试证明之。

解决此题的关键在于揭示其中数量关系：(1) 握手总次数必为偶数；(2) 握手总次数等于握奇次手的总数与握偶数次手的次数之和。在此基础上，易于分析：因为偶数不能等于偶数与奇数的和，又握偶数次手的人之总数必为偶数，故

握奇数次手的人之总握手次数为偶数，而奇数个奇数之和只能是奇数，故握奇数次手的人数必为偶数。这里所体现的数学量关系实际上就是偶数加偶数为偶数。

要从实际问题中抽象出数学内容，首先需要抽象能力。但是单凭一般的训练不一定能解决问题。所以教师在选择实际问题时应该有一个整体设想。也就是说，在整个中学数学教学过程中，应该掌握哪些典型的实际问题应用题，要有个基本安排，以便学生积累一定的经验。

4. 现代数学内容、数学思想和数学方法也要注意联系实际

现行中学数学教材充实了一些现代数学内容。增添这些内容的主要目的之一，是为了提高中学数学的实践性。但是，增添这些内容以后，实践性不一定就增强了，教师在进行教学时还必须注意加强与实践的联系。如高中课程中增加了“布尔代数与开关电路”、“矩阵与变换”等内容，教师应充分利用这些内容，培养学生运用数学知识解决问题的能力。

最后，贯彻理论联系实际的原则，还有一个从学生实际出发的问题。无论是理论还是实际问题都要是学生能够理解和在其认识范围内能够解决的。

3.2 加强基础与鼓励创新相结合的原则

基础与创新是两个互相联系、互相促进的统一体。过去我们在数学教学中，对基础知识的教学取得了突出的成绩，这也是中国的数学教学在全球数学教学中具有鲜明特点、立于不败之地的重要方面，保持和发扬中国的基础数学教学的特点是新一代数学教师的使命。然而，随着社会的不断发展，我国数学教学的弱势也越来越明显，一个主要的问题是，我国的学生创新意识和创新能力与发达国家相比都不具有优势。因此，保持双基教学的特色，在此基础上发展学生的创新能力，便成为我国数学教学的一个基本要求，而要达到这一要求，数学教学还必须依据数学学科本身所具有的合理的系统性和学生心理的形成与发展的规律性，精心设计教学过程，贯彻落实学习基础知识与发展创新能力相结合的原则。

“双基”教学只是优质教育的一个侧面。没有基础不行，光有基础也不行。一座大厦，总有基础和上层建筑两部分。任何建筑的基础是看不出个性的，个性显示在地面以上的部分。数学教育也一样。数学双基对所有学生都一样，区别很少。因此，双基教学必须和突出个性发展的教育结合起来，才有光辉的未来。

另外，双基必须与时俱进。社会在进步，时代在前进，人的发展所需要的基础是在不断改变的。随着时代的发展，知识正在爆炸。人的生命是有限的。知识需要压缩，数学基础知识也必然要压缩。我们应该把握“双基”教学的度，既要防止基础薄弱，又要避免基础过剩。在 21 世纪的今天，我们的任务是要在创

新的指导下打好基础。

3.2.1 利用记忆的规律,巩固基础知识

知识的掌握,包括感知、领会、巩固和应用四个既有联系又有区别的环节。感知是初步认识的过程;领会是由不知到知,由浅入深的过程;巩固是由遗忘到保持的过程;应用则是由认识到行动的过程。

学习知识的目的在于应用,而应用的先决条件是牢固地掌握知识,因而知识的保持在整个学习过程中就起着重要作用。因此,教学中只有提高学生的记忆效率,才能使学生的知识不断积累和丰富,才能进一步引导学生去发现知识,发展智能,从而提高分析问题和解决问题的能力。所以,记忆是人的知识经验宝库,是关系到一个人能否好好学习,牢固掌握知识的重要问题。

在数学教学中,如何提高学生的记忆效率呢?

1. 理解得透,才能记得牢

理解是记忆的基础。数学中的概念、定理、法则、公式和原理,都应该在理解的基础上记忆。在数学教学中,加强基本概念、关系和原理的教学,从多方面揭露数学事实、数学概念、关系和原理的本质,通过一定的逻辑体系,使这些知识联系起来,是增强记忆、巩固知识的好办法。如三角中的公式可以让学生通过推导联系起来。即,由某一公式出发,结合一些基本的公式将所有其他公式推导出来,从而形成逻辑体系。

2. 在理解的基础上,以意义识记为主,机械识记为辅,使两种记忆结合起来

意义识记就是对材料的意义有所理解的记忆,而机械识记就是对材料多次重复的背记。这两种识记相辅相成、密切相关。一方面,意义识记要有机械识记的帮助,才能确保记忆的精确性;另一方面,机械识记时要尽量意义化,提高记忆效果。

在数学教学中,根据本学科的特点,充分揭示知识与客观现实的联系、新知识与旧知识的联系,各部分知识的内在联系,适当利用各种直观化的手段,把理论与实际结合起来,将是加强意义识记的主要途径。例如,三角公式掌握了公式之间的联系,对公式就理解了,记忆时就是有意义记忆,不容易遗忘,即使遗忘,也能随时进行推导。另外,还可以利用知识之间的内在联系,利用心理学中“顺应”、“同化”等方式加强记忆。

3. 进行归纳、类比,引起联想促进记忆

学习是一个由感性认识发展到理性认识的过程。要全面地掌握客观事物,就要从特殊到一般,从表象到本质,就要揭示事物间的种种联系,促进学生形成各种联想,提高记忆效果。

联想,就是由一事物想起另一事物。在数学教学中,经常利用以下联想:

（1）类似联想。从性质接近，形状相似的同类事物引起联想。例如，双曲线与椭圆都是有心二次曲线，它们有十分类似的性质。如能先将椭圆讲深讲透，并在讲授双曲线时进行适当的类比，建立内在联系，强调差别，那么在后来应用其有关概念时，必然会引起联想，这样的记忆是比较牢固的，对有心二次曲线的认识也是深刻的。

（2）对比联想。从具有相反特点的事物引起联想。不同的数学对象有对立的方面，因此可以进行对比，形成认识上的一对矛盾。于是，当矛盾的一方出现时，可引起对另一方的联想，提高了记忆效果。例如，学习不等式时，可以和等式相应的概念和性质进行对比。学习指数函数的性质，可以和对数函数的性质进行对比联想。

（3）关系联想。从事物的因果关系、从属关系进行联想，从而追忆出有关的事物。数学知识本来就具有严密的逻辑性、科学的系统性。如果在教学中，注重知识系统，根据知识间的逻辑关系，循序渐进、逐步深化，就会使新知识不断地纳入学生的知识体系，形成牢固的知识链条。在中学数学中，有许多概念的不断扩充，还有许多结论的推广，都组成了有机的知识链。

4. 掌握遗忘的规律，合理组织复习

遗忘就是对识记过的事物在一定的条件下不能恢复，或表现为错误的再认和回忆。因此要提高记忆效果，还必须不断地与遗忘作斗争，降低遗忘率。组织复习是巩固记忆的基本途径和方法。怎样组织复习呢？

首先，心理学研究表明，遗忘的规律是先快后慢，先多后少。因此复习必须及时，复习时间间隔先密后疏，随着记忆巩固程度的提高，复习的次数可以逐渐减少，复习时间间隔可以逐渐加大。

其次，要注意分散复习。搞好平时复习、阶段复习，为防止脑力疲劳，应避免集中复习时间过长。

第三，复习方式要多样化，防止单调的机械重复。这就要求教师在复习时，要注意适当变换方式，从不同的角度提出新的理解要求。

总之，适当的记忆是形成良好基础的前提，教师的教学任务之一，就是帮助学生对一些基础知识进行记忆。

3.2.2 理解巩固与发展思维

理解和巩固知识的目的之一在于发展思维，而发展思维又有利于理解和巩固知识。

有成效的教学，不仅在于使学生深刻而又牢固地掌握系统的知识、技能和技巧，而且在于使学生的思维得到发展。现代教学理论研究表明，只有控制教学过程，促使学生的思维得到发展，才能深刻理解和巩固所学的知识，才能提高他们

的分析问题和解决问题的能力。为此我们应该努力为学生创设一个能够发展思维的教学过程。

1. 创设问题情境——明确思维目标与方向

学生的思维过程从问题开始,在寻求问题的解答中深入,在检验问题答案中发展,在实践中得到相应的成果后暂告一段落。因此,在教学中首先应创设问题情境,使学生思维方向明确,从而激发学习兴趣,促进思维的发展。

如在"虚数"引入教学中,有的教师便采用了以下情境。

首先提问:已知方程 $x^2+x+1=0$ 的一个解是 α,求 $\alpha^{14}+\alpha^{-14}$ 的值。

由条件 $(x-1)(x^2+x+1)=0$ 即 $x^3-1=0$,知 $\alpha^3=1$,故

$$\alpha^{14}+\alpha^{-14}=\alpha^2+\alpha^{-2}=\alpha^2+\alpha\alpha^{-3}=\alpha^2+\alpha=-1.$$

怎么两个偶数方之和是负数呢?

这样问题情境就出现了。学生很可能会看出原方程没有实数解,认为题目错了。此时教师适时反问:在没有学过无理数时,方程 $x^2-2=0$ 不是也无解吗?可有了无理数后有解也就天经地义了。这个方程在实数范围内无解,就要引进新的数——虚数。(这个例题的出现,有的学生还可能产生疑问,方程的解不是没有吗,不存在的"数"(实际上是指实数)的运算竟然是一个数,从而对方程的解存在提出质疑,这也可以形成引入复数的很好情境。)

本案例教师利用学生认知上的不平衡来创设情境从而产生认知上的"惑",而解惑的过程就是一个基本的数学方法的学习过程,因而这一过程可以达到提高思维能力的目的。

2. 积累数学语言与表象——保证思维原料的供给

学生的思维过程,就是对输入信息加工的过程。因而,信息就是思维的原料,只有原料丰富,思维加工才会有效地进行;要发展学生的思维,就要不断供给他们丰富的原料。在中学数学中,供给学生的所谓信息,归根到底就是语言与表象两大类,如:"集合"、"联立"、"属于"、"有且仅有"等,都属于语言信息;数学中的符号,如:$\forall$,$\exists$,$\in$,$\cup$,$f(x)$ 等以及直观图、函数图像等都属于表象信息。

在教学中,只有不断丰富和积累这些数学语言、表象,明确这些思维原料的意义,才能进一步去接收用这些信息联合起来表达的完整的数学命题及演算式子,才能促成思维的发展。如,要让学生能够正确理解直角三角形中成比例的线段的命题:"直角三角形中,斜边上的高是两直角边在斜边上的射影的比例中项",并能积极思维去推导它的正确性,就必须在这一命题提出之前,具备以下"信息":

"直角三角形"及其形象,"斜边、直角边、高";

"点在直线上的射影"及其形象;

"线段在直线上的射影"及其形象。

否则，学生对上述命题将发生理解困难。

在数学教学中，充分注意数、形结合，将有助于丰富和积累数学语言与表象，有利于思维发展。

3. 巩固概念、判断和推理的知识——发展抽象思维的形式

概念是一切科学的"细胞"，它和判断、推理构成抽象思维的三大形式。发展思维，就首先要使学生掌握基本的思维形式。

在中学数学教学中，只有首先让学生掌握一系列的数学概念之后，才能在此基础上进行正确判断，并进而进行正确的推理。如果没有概念的掌握，则推理就将成为无源之水，无本之木。

4. 积极实践，自觉掌握思维的方法

发展学生的思维还要倡导学生积极参加实践活动，在实践中自觉掌握和运用思维方法去发现问题、解决问题。从而进一步提高思维能力。

一般的说，思维方法主要有：分析与综合、比较与归类、抽象与概括、归纳与演绎、系统化与具体化等。这些思维方法是互相联系、交织在一起的，在学习和实践中，必须综合运用，才能正常地思维，才能理解和巩固所学的知识，才能在实践中发现问题、解决问题。

在中学数学教学中，"实践"主要指布置给学生的观察、实验、阅读和解题等实践活动。通过积极参加这些活动，既可运用和巩固所学知识，又可检验思维活动的结果，锻炼和发展思维能力。

3.2.3 巩固基础知识与发展创新能力相结合原则的贯彻

中学数学教学的宗旨是：使学生牢固地掌握知识、技能与技巧，同时使学生的思维得到发展，能力得到提高。因此，必须贯彻、落实巩固基础知识与发展创新能力相结合原则。我们可以从以下几个方面思考。

1. 加强基础知识

为了在数学教学实践实现这一原则，必须加强学生的基础知识的学习，为此，教师可以从以下几个方面开展工作。

（1）根据教学内容和学生思维发展的整体，善于组织不同水平的练习和复习；

（2）适时检查学生掌握的知识、技能技巧和思维发展的状况，弥补学生掌握知识方面的缺陷和排除思维发展上的干扰；

（3）注意有系统、有层次地布置练习题，在巩固和应用知识的基础上使学生的思维能力得到循序渐进的发展。

同时，为了达到巩固基础知识的目的，学生还应从以下几个方面努力：

（1）能系统而简明的掌握所学知识，并尽量树立各种实际模型巩固理性

知识；

（2）要自觉完成各类练习、作业，以巩固所学知识，锻炼和提高自己的思维能力；

（3）准确地回忆起所学的概念、定义、定理、公式及其推广，并积极实践，主动在应用中进一步加深理解、发展思维能力。

应该指出，知识的积累要靠反复认识，不断归纳、概括。而人的认识过程是反复循环、无限发展的，这种循环和发展既不是封闭式的发展，也不是直线式的前进，而是螺旋式的曲折上升运动。因此，要使学生牢固掌握数学基础知识，并能灵活运用，就要通过反复练习，不断复习巩固，这不是单纯机械的重复，而是不断加深理解，扩充知识，提高掌握知识的水平，发展规律思维能力。

应该明确，知识的积累靠记忆，靠理解之后的记忆，但这不是目的。发展思维，提高能力才是目的。

巩固知识的关键在于复习，发展思维的关键在于训练。以下就如何更有效地组织进行练习和复习的问题做一些分析，主要是对复习课的一些基本问题进行讨论。

数学复习课的教学应力求做到：温故而知新、举一反三、触类旁通，使学生的知识深化，思维得到训练和发展，能力得到提高。

首先，复习课要全面系统地复习基础知识，领会数学的基本思想和方法。

（1）注意概念的系统化，揭示概念的本质特征和内在联系；

（2）注意揭示概念的变化发展；

（3）注意揭示概念间的区别与联系；

（4）注意启发学生去总结数学学科中带有全局性的数学概念、基本数学方法、规律性的解题经验等。

此外，对中学数学的总复习，除应让学生把握知识全貌，从科学体系上掌握好基本概念和方法外，还应该尽力提炼出数学科学本质规律的基本观点，这主要依靠平时教学中的不断积累，总复习时就可以进一步系统化。

2. 努力发展创新能力

在巩固知识和发展思维的前提下，就要发展学生的创新意识和能力了。数学是数学问题的科学，是提出数学问题与解决数学问题的科学。同时，数学又是人类悟性的自由创造产物，数学问题的提出与解决就是数学创造的成果。因此，数学的本质是创造或创新。所以，数学教学就应该充分体现数学的创新精神，展示数学创新的观念，养成数学创新的意识与能力，掌握数学创新的知识[①]。由于中学教育是基础教育，因此在创新方面的教育主要是培养学生的创新意识。以

① 吕传汉，等. 论中小学"数学情境与提出问题"的教学. 数学教育学报. 2006. 2(74).

下给出一个教学案例。

案例.不同的教师对同一例题的不同的处理方法(河北省晋州一中)

这是一节不等式的复习课。课上安排了一道练习题:求函数 $\frac{a^2}{\cos^2 x}+\frac{b^2}{\sin^2 x}(a>b>0)$ 的最小值。分别由A、B两位教师在不同的班教学。

A教师的公开课上,有学生是这样解答的:

因为
$$\frac{a^2}{\cos^2 x}+\frac{b^2}{\sin^2 x}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 x}\cdot\frac{b^2}{\sin^2 x}},$$

当且仅当 $\frac{a^2}{\cos^2 x}=\frac{b^2}{\sin^2 x}$ 时等号成立,

从中解得
$$\cos^2 x=\frac{a^2}{a^2+b^2},$$

同理
$$\sin^2 x=\frac{b^2}{a^2+b^2},$$

代入上式得
$$2\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 x}\cdot\frac{b^2}{\sin^2 x}}=2(a^2+b^2),$$

所以 $\frac{a^2}{\cos^2 x}+\frac{b^2}{\sin^2 x}$ 的最小值为 $2(a^2+b^2)$.

看完解答,A老师紧接着问学生:这是否正确?学生们竟异口同声地回答"正确"。经验丰富的A老师胸有成竹,引导学生回忆应用基本不等式时要注意的三个条件:"正、等、定",即 a,b 必须取正值,当 $a=b$ 且 ab 为定值时 $a+b$ 取得最小值。通过启发,学生发现了题解不符合"定"这一条件。不过,还是有学生不明白,站起来辩解道:"把 $\cos^2 x$ 和 $\sin^2 x$ 的值代入后,不就为定值了吗?"A老师面带笑容说:"那不行,必须先为定值。学生又问:"为什么不行呢?"A老师仍然不慌不忙:"至于为什么,课本上对此没有要求,它也超出了高考要求的范围,我们在这里不作研究。"学生若有所思地点点头。

教师给出正确解答:
$$\begin{aligned}\frac{a^2}{\cos^2 x}+\frac{b^2}{\sin^2 x}&=a^2\sec^2 x+b^2\csc^2 x\\&=a^2(1+\tan^2 x)+b^2(1+\cot^2 x)\\&=a^2+b^2+a^2\tan^2 x+b^2\cot^2 x\\&\geqslant a^2+b^2+2\sqrt{a^2\tan^2 x\cdot b^2\cot^2 x}\\&=a^2+b^2+2ab.\end{aligned}$$

从而得出问题的结论。

这节课给的印象是滴水不漏，圆满完成任务，大家对它的评价都很高。

因为这一问题是学生中普遍存在的，B 老师上公开自课时也遇到了同样的解法。面对学生提出“使用基本不等式”，为什么必须先确定值，而代入后为定值说不对的问题，B 老师很顺嘴地说：“这个问题大家可以来讨论。”于是学生们争先恐后地发言，积极性很高。然而，直到下课铃声响起，也没争个水落石出。B 老师一时也拿不出满意的答复，这时课已拖延好几分钟，只得草草结束。

回到办公室，B 老师直懊悔不该把学生引到一个自己没有考虑成熟的问题上去，既耽误了时间，又丢了面子。听课教师们则对这节课议论纷纷，或归之为缺乏教学经验，或归之为缺乏准备。

那么从培养学生创新意识的角度来分析，B 教师的教学应该说更具有这一特点，因为，在 B 老师的教学中学生有充分发表自己意见的机会和互相交流的机会，而在这一过程中，学生的学习积极性便可以被激发出来，各种创新的思路也就有可能出现。而且 B 老师的课堂对保持学生的学习积极性也提供了一个环境。

这里还想指出的是，对一节课的评价往往具有导向的作用。要培养学生的创新意识和能力，有时候是需要花费时间的，而且也不一定有结果，从表面看是效率不高的，但如果从培养学生创新素质来看，还是有意义的。

3. 全面理解巩固基础知识与创新能力培养的关系

巩固基础知识和发展创新能力是数学教学中一个问题的两个方面，是对立统一的。只有牢固的基础知识而没有创新能力，知识的作用难以发挥；只有创新的意识而没有基础知识，创新的愿望难以实现。其实创新是在具有牢固的基础知识之上的创新，即便是一个数学问题的创新的解法也是建立在具有一定的基础知识之上的，如下例。

求证 $(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)(1+\tan 3°)\cdots(1+\tan 44°)=2^{22}$.

证　由 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$

于是

$$\begin{aligned}&(1+\tan 1°)(1+\tan 44°)\\=&1+\tan(1°+44°)\cdot(1-\tan 1°\tan 44°)+\tan 1°\tan 44°=2.\end{aligned}$$

同理

$$(1+\tan 2°)(1+\tan 43°)=2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1+\tan 22°)(1+\tan 23°)=2.$$

故

$$(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)(1+\tan 3°)\cdots(1+\tan 44°)=2^{22}.$$

在这一数学问题的解决过程中，我们发现如果不具有一定的基础知识，如没

有掌握正切的和角公式，则不可能解决这一问题，但如果只知道正切的和角公式，而不具有一定的创造性思维（这里体现在对公式的灵活运用上），则也不能解决这一问题。这也就是说，基础知识和创新能力是相辅相成的，教师在教学时要将这两方面有机结合起来。

3.3 适度形式化与情感培养相结合原则

自从数学家韦达将符号意识引入到数学以后，数学符号的充分运用便成为数学的基本特点，从这个意义上说，韦达的这一工作具有划时代的意义。符号的充分运用，也使形式化成为数学的显著特点，如代数学起始于字母形式地表示数，随后，代数关系、运算律、运算法则等都被形式地表示。因此从某种意义上说，学习数学就是学习一种有特定含义的形式化语言，以及用这种形式化语言去表述、解释、解决各种问题。

现代数学具有两个特点，一方面是其理论研究进一步抽象化、形式化；另一方面是与实际问题的联系越来越紧密。因此我们在贯彻理论联系实际的教学原则的同时，还要贯彻适度形式化的教学原则。这一原则的贯彻一方面要使学生能够将问题转化为数学问题，形成建模思想，也就是使学生的思维数学化；另一方面，在数学化的基础上再进一步形式化。

数学的形式化使数学远离现实生活，完全进入一个纯形式的演绎推理的境地。如公理化从直观性的公理化（也就是可以借助于直观理解公理的意义，如欧几里得公理体系），发展到完全形式化的公理体系（也就是公理系统内的公理完全是一种人为的规定，只要内部不产生矛盾就可以，如希尔伯特公理体系）。形式化体现数学的抽象，也正是因为数学的形式化的特点，使学生难以接近数学，甚至远离数学，放弃数学的学习。如前不久作者对部分中考的学生填报志愿的情况进行调查，有的学生填报某一学校的原因是“听说这所学校不开数学课”，这使我们感觉到对学生在数学学习中进行情感的培养的重要性。然而我们不能通过降低形式化的要求来迎合学生，那样的话数学也就不再是数学了。如何处理好既保证达到中学生应达到的形式化要求，又不使学生的情感受到不利影响，这就是数学教学中应该认真思考的问题，也是我们将适度形式化与情感教育相结合列为教学原则的意义。

在运用这一原则时，我们一方面不能放弃数学的形式化，另一方面要将数学知识尽量与学生的实际相结合，以学生能理解的方式讨论问题，从而增强学生学习数学的信心和兴趣。

3.3.1 学习数学化[①]

数学化是弗赖登塔尔提出来的。他认为，数学作为人类的一种活动，它主要特征就是数学化，数学学习过程就是数学化的过程。与其说是学习数学，不如说是学习数学化。帮助学生数学化，就是学会用数学的观点考察现实，运用数学的方法解决问题。如一个中学生面对一个情景时，应该分析这是方程问题，还是函数问题，或是概率问题，或是几何问题，或是这些问题的综合，接着还应该判断这个问题应该怎么解决。

将数学化运用于数学教学，就是要正确设定教学目标，突出教学内容中数学的本质，显示课程所具有的数学价值。如教学"函数概念"，仅仅让学生记住定义，或能够辨析那些关系是函数关系，是不能达到数学化的目的的。必须使学生理解和认识到，函数是用变量之间的关系来研究现实世界的各种变化，并试图寻找规律。也就是说，函数是刻画现实世界变化规律的数学模型，函数的性质（如增减性、对称性等）是现实世界变化的属性在数学中的抽象，这样一来，学生就能将现实世界中的许多问题归结为数学中的函数问题，这便是数学化的过程。

数学化的能力是由数学的抽象、形式化的语言特点决定的一种特殊的能力。用数学解决实际问题，首先就是要将实际问题转化为数学模式。由于处于不同思维水平阶段的学生，往往拥有不同层次的数学现实，掌握着不同形式的数学语言，也具有不同程度的数学化水平。所以数学教学要遵循思维发展和认识过程的规律，在不同的思维水平阶段，提出不同的数学化的要求，才能真正循序渐进并取得实效。

3.3.2 适度形式化

1. 运用数学语言的能力的培养

如前所述形式化是数学的特征。自从20世纪初，数学家希尔伯特提出形式主义哲学观以来，数学的形式化特征更加浓烈。形式化有助于数学理论体系的简单化、严格化和系统化。由于形式化能够简洁明了地表示纯粹的数量关系，因而可以帮助人们不断澄清思想、理出线索，寻找本质联系。形式化的另一重要作用，是有助于数学的发现和创造。已有数学知识的形式结构，可以为探索和确定未知的数学形式结构提供猜想、类比的基础或借鉴的模型。

数学的形式化包括"符号化、演绎化和公理化"3个层面。

数学是符号的语言。用一套表意的数学符号，去表达数学对象的结构和规律，从而把对具体数学对象的研究转化为对符号的研究，并生成演绎的体系，这

① 张艳霞．数学教学原则研究．数学教育学报，2007．2（24~27）

就是数学的形式化。数学符号是数学形式化的基础，如果说，语文是方块字符号按汉语语法组成的篇章，那么数学就是用数字、字母和运算符号，依照逻辑联结、描述数量关系和空间形式的知识体系。可以说，数学的世界是一个符号化的世界。毫无疑问，如果没有符号体系，数学将迷失在文字的荒原。

数学符号化、形式化后，每一种数学语义，或者每一个数学概念、关系等一般都有一种确定的数学符号表示。数学教学的重要目标是会使用符号，按照逻辑关系写成定理或公理，借以表达客观规律，简明准确，彰显理性。

在数学教学中我们应培养学生运用数学的语言的能力。一种符号可能表达多种意义，这就构成了数学符号化的一大特点，要培养学生语义转化的能力。如在平面直角坐标平面内，点 (a,b) 到原点的距离是由 $\sqrt{a^2+b^2}$ 表示；复数域中，$a+b\mathrm{i}$ 的模代数表示为 $\sqrt{a^2+b^2}$；而 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的最基本的意义是表示 a 与 b 的平方和的算术平方根；若 a,b 是正数，$\sqrt{a^2+b^2}$ 还表示以 a,b 为直角的直角三角形的斜边。

数学的另一显著特点是运用的推理方法，而推理的基础是一套公理，并运用演绎推理于其上。公理（axiom）一词来源于希腊文，意思是“认为有价值”①。希腊人引入了公理的概念，即如此自明的真理，没人能够怀疑它。

在许多类型的推理中，只有演绎推理能保证结论的正确性。如果发现1 000个或更多个三角形的内角和为 180°，就确定三角形的内角和为 180°，这是归纳推理，结论是不可靠的，只有通过演绎证明，才能确定三角形的内角和为 180°。但如果承认三角形的内角和为 180°，而又承认 ABC 为三角形，则其内角和一定为 180°，这就是三段论推理，其结论是可靠的。在演绎推理中，亚里士多德还加入了矛盾律和排中律，在数学教学中，努力使学生掌握演绎推理的方法是具有重要意义的，也是数学教学的主要目标之一。

2．注意数学的可接受性

上述我们讨论了数学形式对数学研究的重要性，但数学毕竟不是形式，生动活泼的数学内涵不能淹没在形式主义的海洋里。20 世纪中叶，人们渐渐觉得，形式化固然是数学基本特征，但是不能走极端，使得数学变得枯燥乏味，远离大众，脱离现实。一页数学符号很难对人有吸引力，过分强调数学的抽象语言，就会将光彩照人的数学美女拍成 X 光照片下的一副“骨架”。于是人们开始了数学“非形式化（Informal）”的研究。

用形式化数学语言表达的数学内容，是它的学术形态，具有严谨、简明、准确的特点，教师进行数学教学的一个重要目标，就是进行再创造，将学术形态转化

① ［美］M. 克莱因著．数学与知识的探求．刘志勇译．上海：复旦大学出版社，2007．2(49)．

为学生易于接受的教育形态,也就是将数学适当地进行非形式化处理。贯彻形式化原则关键是适度,过于非形式化,学生难以体验数学的特点,难以体会和掌握数学研究问题的方法,但过于形式化,学生又难以接受,所以关键是要依据学生的特点把握好形式化的“度”。如在中学数学教学中,我们没有必要向学生介绍公理化的发展过程,即由直观性公理体系发展到形式公理体系的过程,但是我们可以通过教学渗透公理化思想方法。

形式化是数学的基本特征之一。在数学教学中,学习形式化的表达是一项基本要求,但是不能只限于形式化的表达,要强调对数学本质的认识,否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里。数学的现代发展也表明,全盘形式化是不可能的。因此,高中数学课程应该返璞归真,努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质。一些数学教育专家认为,数学课程要讲逻辑推理,更要讲道理,数学教学应通过典型例子的分析和学生自主探索活动,使学生理解数学概念、结论逐步形成的过程,体会蕴涵在其中的思想方法,追寻数学发展的历史足迹,把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态。

3.3.3 注意数学情感的培养

1. 数学情感的意义

情感是客观事物是否符合人的需要与愿望而产生的一种心理体验。它对学习活动具有定向、启动、调节和维持的作用,是数学素质不可缺少的重要组成部分。由于所有非智力因素都伴随着情感因素,因而情感是非智力因素的核心。现代教学理论指出,课堂教学不仅是师生之间知识输出——输入的认识过程,而且也是师生间情感交流过程。

中学数学教学大纲指出:数学教学不仅要培养学生的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力,而且还要培养良好的学习心理素质、个性品德和审美素质。在以知识和智力为中心的传统教育中,非理性的、非逻辑的情感因素未给予应有的重视,造成了种种缺陷,给实施素质教育设置了许多障碍,造成了一些不良的后果。如:许多教师辛辛苦苦的工作结果却事与愿违——成绩不尽如人意;真正喜欢数学的学生很少,数学“尖子”并不愿意报考数学专业;学生学了数学知识以后无处可用,无处能用……。这些现象令人担忧和深思。调查表明,学生学习效果的好坏在一定程度上取决于对该学科喜欢的程度,而对该学科喜欢的程度主要视该学科内容是否有趣、有用以及对老师是否喜欢等因素。

因此,在数学教学中,全面注重和发挥各种情感因素的作用,使认知和情感有机协调,水乳交融,引起学生愉悦的情感体验,学生就会主动轻松愉快地掌握知识,从而使数学教学成为令学生真正向往的积极愉快的活动。

2. 原则的贯彻[①]

（1）创设问题情境，激发学习动机

心理学认为，思维是由人们的认识需要引起的，没有认识的需要就不会引起积极的思维。认识需要来自于学习过程中出现的新问题，创设一些学生似乎熟悉但又不清楚、不能立即解决的问题，这时学生就会产生一种强烈的求知欲望而去积极思考，对激发学习动机是有帮助的。因此，教师要善于将那些枯燥、抽象的教学内容设计成若干有趣、诱人且易于接受的问题，使学生在对这些问题的积极思维中去品尝学习的乐趣。

（2）挖掘知识魅力，引发学习兴趣

布鲁纳说过："学习的最好刺激乃是对所学材料的兴趣。"从本质上讲，学生的学习兴趣是蕴涵在知识本身之中的，我们必须挖掘教材的魅力，用教学内容去刺激学生学习的积极性。实践证明，知识本身的魅力比分数和考试的刺激更吸引人，是推动学生努力学习更持久、更深刻的强大动力。数学中存在许多奇异之美，如复数产生于负数开偶次方的问题，但与平面中的点和向量却有着内在的联系，将这些联系运用于数学问题解决，能产生奇异的效果，使人不得不赞叹数学的魅力。教师在教学中要善于引导学生发现这些蕴涵在教材中的美的源泉。

（3）展示数学美的特点

教师应结合教学内容想方设法、不失时机地向学生展示数学蕴涵的内在美（不变美、对称美、相似美、类比美、简洁美、和谐美、创造美、严谨美等），学生通过鉴赏，无不感到激动，产生热爱数学的情感。

3.4 问题驱动原则

当今衡量一个人学习能力、生存能力的高低，不在于他掌握了多少知识，而在于他探索、研究、创造能力的高低。因此，在数学教育中，培养学生的探究、创新能力和实践能力，成为教育的重要价值取向。而培养学生的探究、创新能力和实践能力，就必须在教学中贯彻问题驱动原则。因为无论自然科学还是社会科学的研究都是由问题驱动的，所以中国古代把"研究"称为做"学问"。数学主要以问题的方式出现，"问题是数学的心脏"。数学问题是数学发展的原动力。中国古代数学经典《九章算术》就是一本问题集。1900 年希尔伯特的 23 个问题，曾预言了数学的发展方向，成为 20 世纪数学家奋斗目标。费马猜想、庞加莱猜想的解决，更被当作人类智慧的象征。

《基础教育课程改革纲要（试行）》（2001 年）明确提出，要"改变课程实施过

---

① http://www.ls910.com/lunwen/200708/5180.html.

于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状，倡导学生的主动参与、乐于探究、勤于动手，培养学生搜集和处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力。”因此，在数学教学中，在传授系统知识的同时，注重学科的基本结构、知识间的内在逻辑联系，从而使学生对本学科有一个全局、整体的认识，进而形成一种积极、能动地解决问题的能力，不失为一种好的方法。

数学问题可以直接来源于实际，也可以来源于数学本身。正是由于数学的发展是问题驱动的，所以数学教学也必须由问题来驱动。在数学教学实践中，问题驱动是十分有效的教学方式。在教学中，我们应该从创设问题情境，引导学生将实际问题转化为数学模型，从而由解决数学问题进而解决实际问题。

从学习的角度看，“数学是做出来的”，“数学学习是解决问题”，课后练习是演练“问题”，数学考试是回答问题，研究性学习也是研究问题。数学教学既要让学生会解决常规问题，也能解决非常规问题，在解决问题的过程中学习数学。可以说，问题是贯穿数学教学活动的一条主线。

问题驱动作为一个教学原则，是因为在数学教学中，培养学生的解决问题的能力已经越来越受到人们的重视，但是培养学生提出问题的能力，在我国数学教学中还未引起足够的重视。因此，理解和贯彻这一原则，必须从两个方面进行——首先是解决问题，另外是提出问题。

3.4.1 数学问题的设计原则

培养学生解决问题的能力，需要教师精心设计问题，数学问题的设计是数学问题解决教学的基础。要使问题解决教学取得良好成效，必须预先将问题设计好。好的数学问题应当具有较强的探索性，它要求人们具有某种程度的独立见解、判断力、能动性和创新精神；具有现实意义或与学生的实际生活有着直接的联系，具有趣味性和魅力；具有多种不同的解法或有多种可能的解答，即开放性；能推广或扩充到各种情形。在设计数学问题时要遵循以下原则。

1. 可行性原则

在设计数学问题时，教师首先要细致地钻研教材，研究学生的思维发展规律和知识水平，提出既有一定难度又是学生力所能及的问题。要选择在学生能力的“最近发展区”内的问题。这些问题既能有效地激发学生的求知欲望，又能使学生积极主动地去寻求解决问题的策略，并通过一定的努力或小组讨论、探究，最后归纳出具有一般规律性的结果。

2. 渐进性原则

渐进性原则要求问题设计要有层次性，要由浅入深，由易到难。人类认识数学对象的过程，是一个渐进过程，是从认识最简单的对象开始，逐步发展到对数

学对象之间的相互关系及它们的内部结构的认识。人们对于数学问题的认识，如同对数学对象的认识一样，也是一个渐进的过程。因此，在数学问题的设计中就要遵循由浅入深，由易到难，有层次、循序渐进的原则。使学生在问题的探究中不断获得成功，逐步树立起学好数学的自信心，培养勇于探索、敢于攀登的精神。如当学生观察下面这些等式：$1\cdot2\cdot3\cdot4+1=?$，$2\cdot3\cdot4\cdot5+1=?$，$3\cdot4\cdot5\cdot6+1=?$，$4\cdot5\cdot6\cdot7+1=?$ 时可以发现，它们分别等于 5，11，19，29 的平方。这时可以提出问题："从这些等式中你能发现什么规律？"当学生通过探索发现并提出一种归纳猜想时，可以进一步提出证明猜想的问题。然后，再进一步让学生观察类似的问题：$1\cdot3\cdot5\cdot7+16=?$，$3\cdot5\cdot7\cdot9+16=?$，$5\cdot7\cdot9\cdot11+16=?$，$7\cdot9\cdot11\cdot13+16=?$ ……能不能提出类似的猜想？进而从等差数列的角度，能否再提出几个类似的问题？最后，能否把上面这些问题的共同规律找出来？这样，根据由浅入深、由易到难、循序渐进的原则，依次提出问题，逐步展开问题的探究，不仅可以把学生的探究活动步步引向深入，而且还可以培养学生学习数学的兴趣。

3. 应用性原则

随着数学的发展，它的应用越来越广泛，世界各国的数学教育也越来越强调数学的应用，这是当前国际数学教育的重要动向。各国都在数学课程中增加现代数学中具有广泛应用性的内容。注重从生活实际和学生知识背景中提出问题，结合生活中的具体实例进行数学知识的教学，增强课堂教学中的实践环节，重视培养学生用数学的意识和用数学的能力，使学生能主动尝试用数学知识和思想方法寻求解决问题的途径。在数学问题的设计中，要考虑能将数学思想方法和数学模型用于探究所提出的问题。

陶行知先生说过"生活即教育，社会即学校"，我们学习的终极目标在于指导生产、生活。只有将数学学习与生活联系起来，学生才能热爱数学、体验数学、理解数学、应用数学，从而主动探索数学、发展数学。

德国一位学者有一句精辟的比喻：将 15 克盐放在你的面前，无论如何你难以下咽。但当将 15 克盐放入一碗美味可口的汤中，你早就在享用佳肴时，将 15 克盐全部吸收了。生活之于教育，犹如汤之于盐。盐需溶入汤中，才能被吸收。教育需融入生活中，才能具有生命的活力。

对于什么是数学教学中的问题，虽然目前尚无统一看法，而且对于不同的学习对象问题也不一样。大体说来，它有以下特点：一是非常规性，问题很难通过模仿过去的解题程序得以完成；二是重视情境应用，教师给出的是一种情境，一种实际需求，以克服一种现实困难为标志，而往往不是直接的数学问题；三是探究性，问题的解决过程应该是一个探究的过程。由于问题解决教学是近年来受到广泛重视的一种教学模式，它强调把学习设置到复杂的、有意义的问题情境

中，通过让学习者合作解决实际问题来学习隐含于问题背后的科学知识，形成解决问题的技能，并形成自主学习的能力。所以，问题解决教学是通过高水平的思维来进行学习，来建构知识的。

例 1 组合数公式 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 和 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$，如果仅用组合数公式予以逻辑验证，学生会感到单调乏味，而且很容易忘掉。但若在实际问题的基础上引导学生“发现”这两个公式，学生不仅学习兴趣有较大的提高，而且对公式的理解也更深入，运用公式解决问题也就更顺利了。

问题的设置最好是学生了解的事情，如：

问题 1 某班每天派 4 位同学值日，要求 1 人打水，3 人扫地，问有多少种分派方法？（先确定 1 人打水，剩下 3 人扫地，有 C_4^1 种方法；先确定 3 人扫地，剩下 1 人打水，有 C_4^3。虽然考虑问题的角度不同，但结果是相同的，故有 $C_4^1 = C_4^3$）。

问题 2 在 8 件产品中有 1 件是次品，随机抽 3 件进行检验，有几种可能？（3 件中有一件是次品，两件是正品，有 C_7^2 种可能；3 件中全是正品，有 C_7^3 种可能，根据加法原理有 $C_8^3 = C_7^2 + C_7^3$）。

学生通过解决以上两个特殊问题和一些类似的问题，抽象出数学公式，再经过数学的证明过程确定公式的正确性，从而获得公式，这便是一个完整的问题解决过程。

例 2 以下典型例题的教学：

已知 $m, a, b \in \mathbf{R}^+$，且 $a < b$，求证：$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$。

这个简单的不等式，却有丰富的生活背景：如在糖水中加糖（m），糖水会变得更甜（因加糖后的浓度 $\frac{a+m}{b+m}$ 大于加糖前的浓度 $\frac{a}{b}$）；又如，在一间窗户面积（a）小于地板面积（b）的房间里，窗户的面积和地板的面积同时增加 m，则采光条件可变好。给一个抽象的结论以鲜活的解释，抽象的东西也会变得具体、生动和充满活力。教师可以充分利用这些生活背景来设置问题，使学生的学习由直接接受的过程逐步转化为容探究和接受于一体的过程。

例 3 函数奇偶性的教学设计。

函数的奇偶性的教学是研究的比较多的教学，下面给出一些这一教学内容的情境设计。

情境一：将 $y = x^2$ 和 $y = x^3$ 的图像及被遮去部分的图像同时展示（用多媒体），让学生将遮去的部分恢复。学生在观察后将发现其对称性，并依据对称性将图像恢复；

情境二：展示 $y = \begin{cases} x^3, x < 0 \\ x^4, x \geq 0 \end{cases}$ 的图像，但不出现解析表达式，让学生发现特

点，当学生提出“关于原点对称”时，教师让学生用对称的方法（即一个点可以找到关于原点对称的另一点），学生发现，图像关于原点并不对称。

于是，提示学生仅仅凭观察是靠不住的，从而为给出定义奠定了基础。

情境三：怎样给出奇函数和偶函数的定义。

教师引导学生探索发现特点，然后归纳总结出定义。也就是说，将几何中发现的对称特点用数学符号语言表示出来，但教师必须提出，要使问题有意义必须对定义域提出对称的要求，从而解决学生容易遗漏的问题。

为了使学生更清楚地将归纳的知识运用于解决问题，教师可以再提出问题：判断函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-x-1, x>0\\ x^2-x+1, x<0\end{cases}$ 的奇偶性。

思考：（教师给出解答）易知函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，根据定义，若 $x>0$，则 $-x<0$，所以 $f(-x)=(-x)^2-(-x)+1=x^2+x+1=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数。

有学生对此提出疑问：还应该考虑 $x<0$ 的情况。

于是，提出了以下更完善的解法。

若 $x<0$ 时，$f(-x)=-(-x)^2-(-x)-1=-x^2+x-1=-f(x)$，综合两种情况得到 $f(x)$ 为奇函数的结论。

但又有学生提出，第一种解法是完善的，不需做补充。

于是引导学生从定义来分析。设函数 $y=f(x)(x\in D)$，其中的定义域满足 $x\in D$ 时必有 $-x\in D$。

若 $x>0$ 时 $f(-x)=-f(x)$ 成立，也可以看成，当 $x<0$ 时，$f(-x)=-f(-(-x))$ 恒成立。由此可见，思考所得的结果是必然的。

如前所述，在问题解决教学模式中的“问题”有时是指那些非常规性的或者条件不充分、结论不确定的开放性、探究性问题。“问题”常常给出联系实际的情境，主体必须要将它数学化，并且必须探究解决问题的策略（数学方法）。

3.4.2 激发学生提出问题

我们常说，提出一个问题比解决一个问题更重要，但是在目前的教学中还是存在学生很难提出问题的状况。

先看一个教学案例：“老师，我忘了”

一位学生来问问题。

生：老师，您今天上课讲的复合函数的单调性知识我还不明白。

师：哪里不明白？能不能举个具体的例子？

生：我都不太明白。

师：我们今天讲了 $y=f[g(x)]$ 这种类型的函数的单调性，首先对它进行换元，令 $y=f(u)$，$u=g(x)$．根据定义，如果在 $g(x)$ 的定义域内，若 $x_1>x_2$ 有 $u_1>u_2$ 那么 $g(x)$ 是单调递增的，而在 $y=f(u)$ 中，若 $u_1>u_2$ 有 $y_1>y_2$ 那么 $y=f(u)$ 是单调递增的。结合起来有 $x_1>x_2\rightarrow y_1>y_2$，由定义可得 $y=f[g(x)]$ 是单调的函数。其他情况类似，上课时还给出了一个表，明白吗？

生：明白。

师：好，我们看一个例子，比如判断 $y=2^{x^2}$ 的单调性，$y=2^{x^2}$ 可看成哪两个函数复合而成的？

生：……

师：能不能看成 $y=2^u$，$u=x^2$ 呢？

生：对，可以。

师：好，你看 $u=x^2$ 的单调性如何？

生：x 大于 0 是递增的，小于 0 是递减的。

师：很好，那么 $y=2^u$ 的单调性呢？

生：是递增的。

师：那么把它们复合起来，$y=2^{x^2}$ 的单调性如何？请你对照这个表来分析。

生：（在老师指导下）当 $x>0$ 时，$y=2^{x^2}$ 是递增的，当 $x<0$ 时，$y=2^{x^2}$ 是递减的.

师：对，很好，现在你明白了吗？

生：明白了。

几天后教了对数函数的性质，这位同学又来问问题了。

生：老师，这道题求 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8)$ 的单调区间我不会做。

师：前几天我不是给你讲过这样的问题了吗？你看，首先要对函数进行换元，应该怎样换元呢？

生：令 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$，$u=(x^2-2x-8)$

师：接下来干什么？

生：判断它的单调性。

师：在什么条件下判断它的单调性？

生：……

师：看书上定义，在定义域内判断函数的单调性。

生：对，我忘记了。

师：$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8)$ 的定义域是什么？

生：$(x^2-2x-8)>0$，也就是 $x<-2$ 或 $x>4$。

师：好，请你在定义域内判断这个函数的单调性.

生：$u=(x^2-2x-8)=(x-1)^2-9$，当 $x<1$ 时 u 是减函数，当 $x>1$ 时 u 是增函数，$y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 是减函数.

师：这样对吗？要在定义域范围内考虑单调性，它的定义域是什么？通过图像把两者联系起来考虑。（画图）。

生：那就是当 $x<-2$ 时，$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8)$ 是增函数，当 $x>4$ 时是减函数.

师：很好，现在这类问题清楚了吗？

生：清楚了。

一个星期后进行了数学单元测验，考了类似的求单调区间的问题，这位同学又做错了。教师问她，这道题我不是给你讲过了吗，怎么考试又做错了？她不好意思地说："我忘了"。

案例中的情况教师在教学中经常会遇到，教师自认为讲得很清楚，学生受到了一定的启发。但是反思后却发现，学生并没有掌握，是什么原因？一方面，教师的讲解并没有很好地针对学生原有的知识水平，没有从学生的实际情况出发，甚至没有弄清学生的困惑究竟在哪里，从而难以从根本上解决她存在的问题。也就是说教师在进行讲解时，并不知道学生的真正问题究竟在哪里，因而尽管经过多次反复的讲解，也不能很好地解决学生的问题。另一方面，教师只是一味地想要她按照某个固定的程序去解决这一类问题（如记住表格）。学生虽然说明白了，却并不真正理解问题的本质性的东西，只是知道了这个程序，所以题稍微变动就不会解。由于教师没有在她原有的知识水平，经验的基础上帮助进行建构，引导学生注意新知识中的某些关键点，因此她的思维过程无法连续地进行，新旧知识的联系不牢固，表面上看是记忆的问题："忘了"其实她还是没有真正理解的内容。这恐怕也是学校教育中的普遍存在的一种现象。

其实，上述案例给我们的启示是：在教学中，我们往往忽视学生的问题，或我们在基本没有理解学生的问题的前提下，按照自己的思路进行教学，这样不仅达不到教学要求，而且对学生提问题的积极性也受到挫伤，长此以往，学生就不愿意或完全不能够提出问题了。因此在教学中，给学生充分的时间表述自己的问题，教师也应对学生提出的问题给予足够的重视，并依据问题进行教学，这对学生提出问题的能力和意识的培养都是十分重要的。

这一案例也说明，学生提出问题也很重要。在此案例中，其实学生自己也不知道自己的问题是什么，这在教学中，也是常见的情况。在数学学习过程中，我们很少看见学生对教师的教学或对教材提出质疑，看见的只是学生问一些数学题的解法。这也就说明，学生不善于发现自己学习中的问题。

美国教育家布鲁巴克认为："最精湛的教学艺术，遵循的最高准则，就是学生自己提出问题。"哈佛大学流传的名言："教育的真正目的就是让人不断地提出问题、思索问题。"他们认为学生总是充满好奇和疑问的，他们走进教室的时

候，带着满脑子问题，老师在回答他们问题的过程中，有意通过情境、故事、疑问、破绽等激发学生产生更多的问题。学生带着问题走进教室，又带着更多的问题走出教室。因此在新世纪的教育改革中，为了培养创新型人才，我们必须培养学生提出问题的能力。

3.5 渗透数学思想方法原则

数学思想方法的研究是中国数学教学的特色之一。自从徐利治先生倡导数学思想方法的研究以来，我国出版了不少的相关著作。目前许多高师院校数学系将《数学思想方法》列为一门课程，给予数学思想方法足够的重视。数学思想方法的内容包括宏观的数学思想方法，如数学哲学思想、文化价值、美学观念、数学建模思想、数系扩充思想、方程思想、函数思想、微积分思想、随机思想等，还包括一些普通的数学思想方法，如数形结合思想、化归思想、关系—映射—反演思想等，这是数学研究的基础，应该将其渗透在中学数学的教学之中。

数学科学的内容，包括数学知识和蕴涵于知识中的数学思想方法两个组成部分。在中学数学教学中，概念、定理、公式等知识，亦即数学的外在表现形式，其教学价值早已被广大教师所认同，但隐于知识背后的思想方法的教学价值却未能充分引起人们的高度重视，其中原因主要还是人们对数学思想方法的地位和作用认识不够所造成的。实际上，数学思想方法作为数学知识内容的重要组成部分和精髓，是数学的一种指导思想和普遍适用的方法，是对数学具体内容的概括，是铭记在人们头脑中起永恒作用的精神和态度，它能使人领悟数学的真谛，懂得数学的价值，学会数学地思考和解决问题。人们所学的数学概念、数学定理、数学公式，如果长期不从事与其相关的工作，经过一段时间后都会遗忘。但伴随着数学知识学习所形成的数学思想方法却能长期留在人的记忆中，成为人的基本素质的一部分。古人云："授之以鱼，不如授之以渔。"这也道出了科学思想方法的重要性。因此，我们认为脱离数学思想方法的教学不仅是空洞的训练，而且也是丢了西瓜捡了芝麻的教学。这种教学不仅增加学生的负担，而且也难以使学生领悟到数学的精髓。因此，许多数学教育家都强调："数学教学，与其说是数学知识的教学，倒不如说是数学思想方法的教学，是数学思维过程的教学。"①

中学数学内容丰富，彼此之间存在着内在联系，呈现出很强的层次性和系统性。将数学内容整合的一个重要方法，就是提炼数学思想方法。因此将大量的解题实践提炼为数学思想方法，是数学教学的基本要求。在数学教学中，不仅要

---

① 綦春霞.数学课程论与数学课程教材改革.北京：北京师范大学出版社，2001.12(88).

重视数学知识的学习,更要注重数学思想方法的掌握,培养学生的数学思维能力。为此,必须从以下几个方面开展工作。第一,建立良好的认知结构,理解和掌握数学思想方法。第二,加强基本观点的教学,巩固和强化数学思想方法。第三,关注逆向思维,深化数学思想方法。

传统的中国文化对今天的数学教育依旧有深刻的影响,这种影响有正面和负面两个方面,这里我们主要注意其负面影响。就教育观来说,传统文化中基本的教学公式是“苦读 + 考试”,而对思想和精神的领悟却往往是忽视的部分。在这一观念下所产生的大量的训练,深深的题海,导致学生并无学习数学的乐趣,对数学难题缺乏“好奇”,学习的目的无非是考上大学。爱因斯坦说,旧学校给学生太多的“好胜心”,却缺乏对大自然的“好奇心”。虽然我们的学校已经不是旧学校,但部分学校存在的学生对数学学习缺乏兴趣,教师的教学缺乏对数学思想方法的总结和归纳,依然是数学教育的隐忧。

就数学观来说,当前部分教师的看法依然是“计算 + 逻辑”,中国传统数学以“计算”和“算法”见长,中国学生的计算能力在世界上是首屈一指的。在计算机时代,算法则尤其显得重要。但是,计算的价值是随着时代变迁而变化的,繁重的人工计算必须交给计算机去做。现在国内有些地方提倡一种“速算法”,到处表演,作为数学“杂技”而存在,自有一定的意义,但主张在小学教育中推广或强化这种训练,就不大合乎时宜了。

“苦读 + 考试”、“计算 + 逻辑”的传统是优点和缺点并存,长处和短处互见,我们的任务是扬长避短,使中国数学教育走向新的高峰。另外,我国的数学教育目前还存在着重结论,轻过程;重形式,轻内容;重招数,轻思想;重解题,轻应用等现象。表现在教学中,过于强调对定义、定理、法则、公式的灌输与记忆,不注意这些概念与知识的发生、发展、应用过程的解释,不善于将这一过程中丰富的思维因素开掘出来,不善于将知识中蕴涵的丰富的思想方法化隐为显地进行概括。如果这一现象长此下去,无疑将严重阻碍学生创造力的发展与培养。因此,我们要改革教法,要以数学方法论为指导,进行课堂设计和课堂教学。既教给学生以知识,又教会学生思考,既教演绎证明,又教归纳和直觉,不断促进数学思想方法的形成。正是基于这一思想,我们将渗透数学思想方法作为一条基本的教学原则。

3.5.1 数学思想方法

“数学思想方法”一词无论在数学、数学教育范围内,还是在其他科学中,都被广为使用。中学数学课程标准(教学大纲)已将数学思想方法列为数学目标之一。但是,什么是数学思想?什么是数学方法?却不像数学概念那样可以明确给出定义,只能给出一种解释或界定。

思想是客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果。它是从大量的思维活动中获得的产物,经过反复提炼和实践;如果一再被证明为正确,就可以反复被应用到新的思维活动中,并产生出新的结果。所谓数学思想是对数学知识的本质认识,是从某些具体的数学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点,它在认识活动中被反复运用,带有普遍的指导意义,是建立数学和用数学解决问题的指导思想;例如:字母代数思想、化归思想、极限思想、分类思想等。①

方法是指人们为了达到某种目的而采取的手段、途径和行为方式中所包含的可操作的规则或模式。数学方法是指在数学地提出问题、解决问题(包括数学内部问题和实际问题)过程中,所采用的方式、手段、途径等。例如:变化数学形式、笛卡儿模式、递推模式、一般化、特殊化等。

数学思想和数学方法是紧密联系的,思想指导方法,方法体现思想。同一数学成就,当用它去解决别的问题时,就称之为方法,当评价它在数学体系中的自身价值和意义时,称之为思想。当我们强调指导思想,解题策略时,称之为数学思想;强调操作时,称为数学方法,往往不加区别,泛称数学思想方法。

例如:化归思想方法是研究数学问题的一种基本思想方法。我们在处理和解决数学问题时,总的指导思想是把问题转化为能够解决的问题,这就是化归思想。而实现这种化归,就是将问题不断地变换形式,通过不同的途径实现化归,这就是化归方法,具体的化归方法有多种,如恒等变换、解析法、复数法、三角法、变量替换、数形结合、几何变换等。

在数学思想中,有一类思想是体现或应该体现于基础数学中的具有奠基性和总结性的思维成果,这些思想可以称之为基本数学思想。基本数学思想含有传统数学思想的精华和近现代数学思想的基本特征,并且也是历史地形成和发展着的。

基本数学思想包括:符号与变元表示的思想,集合思想,对应思想,公理化与结构思想,数形结合的思想,化归的思想,对立统一的思想,整体思想,函数与方程的思想,抽样统计思想,极限思想(或说无限逼近思想)等。基本数学思想有两大"基石"即符号与变元表示的思想和集合思想,又有两大"支柱"即对应思想和公理化与结构思想。有些基本数学思想是从"基石"和"支柱"衍生出来的,例如"函数与方程的思想衍生于符号与变元表示的思想(函数式或方程式)、集合思想(函数的定义域或方程中字母的取值范围)和对应思想(函数的对应法则或方程中已知数、未知数的值的对应关系)。所以我们说基本数学思想是体现或应该体现于"基础数学"(而不是说"初等数学")的具有奠基性和总结性的思维

① 钱珮玲,邵光华.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999.7(2).

成果。基本数学思想及其衍生的数学思想,形成了一个结构性很强的网络。中学数学教育、教学中传授的数学思想,应该都是基本数学思想。

数学方法具有以下三个基本特征:一是高度的抽象性和概括性;二是精确性,即逻辑的严密性及结论的确定性;三是应用的普遍性和可操作性。

数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用:一是提供简洁精确的形式化语言,二是提供数量分析及计算的方法,三是提供逻辑推理的工具。现代科学技术特别是电脑的发展,与数学方法的地位和作用的强化正好是相辅相成。

中学数学中常用的基本数学方法大致可以分为以下三类:

(1) 逻辑中的数学方法。例如分析法(包括逆证法)、综合法、反证法、归纳法、穷举法(要求分类讨论)等。这些方法既要遵从逻辑数学中的基本规律和法则,又因运用于数学之中而具有数学的特色;

(2) 数学中的一般方法。例如建模法、消元法、降次法、代入法、图像法、向量法、比较法、放缩法、同一法、数学归纳法等。这些方法极为重要,应用也很广泛;

(3) 数学中的特殊方法。例如配方法、待定系数法、加减法、公式法、换元法、拆项补项法、因式分解诸方法,以及平行移动法、翻折法等。这些方法在解决某些数学问题时起着重要作用,不可等闲视之。

3.5.2 思想方法教学的心理学意义

1. 懂得基本原理的学科更容易理解

心理学认为"由于认识结构中原有的有关观念在包摄和概括水平上高于新学习的知识,因而新知识与旧知识所构成的这种类属关系可构成下位关系,这种学习便称为下位学习"。当学生掌握了一些数学思想、方法,再去学习有关的数学知识,就属于下位学习了。下位学习所学知识"具有足够的稳定性,有利于牢固地固定新学习的意义"及时新知识能够较顺利地纳入学生已有的认识结构中去。学生学习了数学思想、方法就能够更好的理解和掌握数学内容。

2. 有利于记忆

布鲁纳认为,"除非把一件件事情放进构造得好的模型里面,否则很快就会忘记"。"学习基本原理的目的,就在于保证记忆的部分丧失不是全部丧失,而遗留下来的东西将使我们在需要的时候得以把一件件事情重新构思起来。高明的理论不仅是现在用以理解现象的工具,而且也是明天用以回忆那个现象的工具"。由此可见,数学思想、方法作为数学学科的"一般原理",在数学学习中是至关重要的。有人认为,对于中学生"不管他们将来从事什么业务工作,唯有深深铭刻于头脑中的数学的精神、数学的思维方法、研究方法,将随时随地发生作

用，使他们受益终生。”

3. 学习基本原理有利于“原理和态度的迁移”

布鲁纳认为，“这种类型的迁移应该”是教育过程的核心——用基本的和一般的观点来不断扩大和加深知识”。曹才翰教授也认为，“如果学生认知结构中具有较高抽象、概括水平的观念，对于新学习是有利的”，“只有概括的、巩固的和清晰的知识才能实现迁移”。美国一些心理学家通过实验证明，“学习迁移的发生应有一个先决条件，就是学生需先掌握原理，形成类比，才能迁移到具体的类似学习中”。学生学习数学思想、方法有利于实现学习迁移，特别是原理和态度的迁移，从而可以较快地提高学习数学的质量和能力。

4. 强调结构和原理的学习，“能够缩小‘高级’知识和‘初级’知识之间的间隙”

一般的讲，初等数学与高等数学的界限还是比较清楚的，特别是中学数学的许多具体内容在高等数学中不再出现了，有些术语如方程、函数等在高等数学中要赋予它们以新的含义。而在高等数学中几乎全部保留下来的只有中学数学思想和方法以及与其关系密切的内容。如集合、对应等，因此，数学思想、方法是联结中学数学与高等数学的纽带。

3.5.3 渗透数学思想方法原则的贯彻

为落实数学思想方法的教学，应注意以下几条原则：

1. 渗透性原则

“渗透”就是把某些抽象的数学思想逐渐“融进”具体的、实在的数学知识中，使学生对这些思想有一些初步的感知或直觉，但还没有从理性上开始认识它们。要渗透的有集合思想、对应思想、公理化与结构思想、抽样统计思想、极限思想等。也就是将数学知识的教学作为载体，把数学思想方法的教学渗透到数学知识的教学中。数学思想方法的教学不能离开数学知识，纯粹追求数学思想方法的教学，会成为缺乏基础的空谈。知识的教学中虽然隐含着思想方法，但是，若不是有意识地把数学思想方法的教学作为教学对象，则不能使学生重视和得到熏陶。

渗透是随年级逐步深入的。例如集合思想，初中是用文氏图或列举法来表示集合，不等式(组)的解集可以用数轴表示或用不等式(组)表示；高中则是列举法、描述法、文氏图三者并举，并同时允许用不等式(组)、区间或集合的描述法来表示实数集的某些子集。又如对应思想，初中只用文字、数轴或平面直角坐标系来讲对应，高中则在此基础上引入了使用符号语言的对应法则。

2. 层次性原则

必须根据知识的内容分层次地进行渗透和教学。教师对教材中所反映的数

学思想方法要有明确的认识，对教材内容应从思想方法的角度作认真的分析，按照各个年级学生的年龄特征，知识掌握的程度，理解能力和可接受性由浅入深，由易到难分层次地贯彻思想方法的教学。

3. 反复性原则

数学知识的学习要经过听讲、复习、做习题等过程才能掌握和巩固。数学方法也是经过不断反复地训练才能熟练掌握，因为数学方法的教学是通过数学知识的教学渗透的，所以一次、两次也许还不太明确，经过多次的反复运用，才能形成自觉的意识。

4. 概括性原则

根据教材的内容，教师讲完后，对这一部分所用到的那些数学方法能给予提炼和概括，让学生有明确的印象，另外，数学方法分散在各个不同的部分，而同一问题又可以有不同的数学思想方法来解决，教师要注意归纳和引导学生概括。

3.5.4 数学思想方法的教学模式及具体实施的建议

由于数学思想方法是基于数学知识又高于数学知识的一种隐性的数学知识，要在反复的体验和实践中才能使个体逐渐认识、理解，内化为个体认知结构中对数学学习和问题解决有着生长点和开放面的稳定成分。只有将数学思想方法贯穿与数学教学之中，才能达到使学生在学习数学的过程中，掌握数学思想和方法。

1. 教学模式

数学表层知识与深层知识具有相辅相成的关系，这就决定了他们在教学中的辩证统一性。基于上述认识，我们给出数学思想方法教学的一个教学模式

操作—掌握—领悟

对此模式我们做一些说明：(1) 数学思想、方法教学要求教师较好地掌握有关的深层知识，以保证在教学过程中有明确的教学目的；(2)“操作”是指表层知识教学，即基本知识与技能的教学。操作是数学思想、方法教学的基础；(3)“掌握”是指在表层知识教学过程中学生对表层知识的掌握，学生掌握了一定量的数学表层知识，是学生能够接受相关深层知识的前提；(4)“领悟”是指在教师引导下学生对掌握的有关表层知识的认识深化，即对蕴于其中的数学思想方法有所悟，有所体会。

数学思想方法教学是循环往复螺旋上升的过程，往往是几种数学思想、方法交织在一起，在教学过程中依据具体情况在一段时间内突出渗透与明确一种数学思想或方法，效果可能更好些。

2. 具体教学实施策略

(1) 转变观念,提高认识

目前,在部分学校数学教学中存在的重结论、轻过程,重形式、轻内容,重技巧、轻思想,重解题、轻应用的弊端,严重影响了数学教学质量的提高,束缚了学生思维能力的发展,从而导致学生学习数学的兴趣不浓。为此,每一位数学教育工作者,要站在培养跨世纪人才的高度来改进数学教学,用现代教学观指导教学,把数学思想和方法的教学提到应有的高度,通过数学知识这个载体循序渐进,有层次地培养学生的数学思想和方法,使数学教学踏上新的台阶,使数学知识和数学思想方法成为人的学习和工作不可缺少的文化素质。

数学思想和数学方法,既可以理解为数学中深层次的基础知识,又可以理解为解决问题时的思维策略。教师应对其在学生的素质方面的作用有充分的认识,要将追求长远的学生发展作为教学的主要目的。这样一来,才能重视数学思想方法的教学。

(2) 充分挖掘教材中的数学思想方法

数学思想方法是隐性的更本质的知识内容,因此教师必须深入钻研教材,充分挖掘有关的思想方法。如在进行函数概念教学时,教师应以数学建模的思想指导概念学习,将函数看成是由实际问题中抽象出来的数学模型。

数学思想方法是数学的精髓,所以在教学中要将数学思想方法的教学体现出来。如在教对数函数的定义时,许多教师将注意力纠缠于为什么要规定对数函数 $y = a^x$ 的底数 $a > 0, a \neq 1$,而且对这一问题进行了许多解释。实际上,如果我们从数学思想方法的角度来理解对这一问题是很好解释的。对数函数就是一个数学模型,模型的建立是为了对这一模型进行研究,从而解决与这一模型有关的问题,这就是数学的模型思想。而模型方法的原则之一就是简单化原则,如果不作出上述规定,将给这一模型的研究带来困难,甚至无法研究,也就无法解决问题了。如当 $a < 0$ 时,并不是对于任意的 x , $y = a^x$ 都有意义,也就是说对自变量的取值便有限制,这就不能很方便地研究函数的性质,因此做这一规定的目的主要是使模型简单。这样的解释学生便容易接受。这就也是数学思想方法在教学中的运用。

(3) 有目的有意识地渗透、介绍有关数学思想方法

在进行备课时,可以思考以下问题:在教学中,应渗透、或介绍或强调哪些数学思想方法?要求学生在什么层次上把握这些数学思想方法,是了解、还是理解或掌握?在对这些问题进行了充分考虑时,将数学方法的教学问题贯穿于教学设计的过程之中,做到有目的、有意识地进行数学思想方法的教学。

(4) 有计划有步骤地渗透、介绍有关思想方法

例如,在知识的形成阶段,可以选用观察、实验、比较、分析、抽象、概括等抽

象化、模型化的思想方法、字母代替数的思想方法、函数的思想方法、方程的思想方法、极限的思想方法、统计的思想方法等等。

在知识结论的推导阶段和解题教学中可选用分类讨论、化归、等价转换、特殊化与一般化、归纳、类比等思想方法。

在知识的总结阶段可采用公理化、结构化等思想方法。

本章思考题

1. 数学教学的原则有哪些？这些原则的意义是什么？

2. 结合对数学的理解论述在数学教学中如何贯彻适度形式化与数学情感培养相结合的原则。

3. 谈谈你对数学思想方法的认识和理解。

4. 对中学数学教学中数学思想方法的教学进行调查，针对调查结果提出教学建议。

第 4 章 中学数学课程目标

4

数学课程目标是数学教学的指南,对数学教学具有导向和引领的作用。我们应该对我国数学教学目标有一定的把握,对教育目标的发展过程有一个较清楚的了解。应该通过对确定中学数学课程目标的依据、《全日制义务教育数学课程标准》和《高中数学课程标准》基本理念、中学数学课程目标的分析,了解影响教学目标的因素,并对这些因素有较清楚的认识。

课程目标是预期的学生学习的结果,即教学结束后学生能够做什么。它既是课程实施的出发点,又是课程实施的归宿。它要求简明扼要,具有明确的导向性和概括性。从本质上说,课程目标所反映的是个体与社会发展的需要,既要符合学生的知识、能力、年龄等特点,又要符合社会对人才培养和公民素质的要求。因此,课程目标的制定离不开对社会和个人需要的分析,它必须以对个体和社会需要所作的系统评估为依据。

从制定者角度看,课程目标有两个层次:一是宏观目标(goals),是由国家规定的课程本身要实现的目标。主要是由国家和课程专家来制定的,所规定的是课程学习的主要内容及其标准,是对课程目标的一般性描述。二是微观目标(objectives),是在一节课上要完成的目标。这类目标是宏观目标的具体体现,是宏观目标的一部分。目标的陈述主要表现为学习者需要掌握、形成哪些具体的知识、技能、态度,它主要由教师来制定,又称课程学习目标。

4.1 我国数学学科课程目标的依据

课程目标所要解决的是关于培养质量和发展规划的问题,这在教育发展史上有着不同的认识与主张。有的强调德育,有的注重智育,也有主张和谐、全面发展的。马克思主义关于人的全面发展的学说,是制定我国课程目标理论依据,也是制定数学学科课程目标的理论依据。

由于数学教育既要符合社会发展的需要,又要符合学生发展的需要,还要符合数学自身的发展需要。除此之外数学教育还要符合教师发展的需要、学校发

展的需要等，因此制定课程目标必须对各方面需要进行评估①。国家课程目标是国家教育部门对各科课程目标所作出的宏观的、概括的、一般性规定，是以需要评估的结果为基础的。在我国数学课程目标的制定之前，相关的专家从如下角度进行了评估。

1. 社会发展对数学的需要

数学作为一个学科，其教育目的受到国家教育目的的制约的，因而要依据社会发展对教育培养人的质量与规格的要求来确定数学教育培养人的质量标准。研究专家通过理论和现状分析，从科学技术发展、人文社会科学发展、经济发展三个角度阐述了数学在社会发展中所起的作用。具体需要分析的结果是：科学技术的飞速发展对公民的科学素养提出了更高的要求，由于科学技术与数学的紧密关系，使得数学素养成为公民基本素养不可或缺的重要部分，因此应该对基础教育中的数学课程内容和结构进行相应的改革；人文社会科学的发展日益提高了对数学方法的要求，数学方法已经成为这类科学发展的重要工具，因而对数学方法的掌握就成为人的基本素质；经济理论的发展和研究，经济生活的日益纷繁复杂，越来越离不开数学的支持，也要求数学课程发生相应的变革以适应其需要。

上述我们可以看出，社会对数学的需要，主要体现在数学的思想方法，因此我们应该将数学思想方法的培养作为主要的教学目标。我们知道社会对未来青年的数学要求不只是能够解决一些数学题，甚至可以说，有些学生一旦走出校门可能再也不会遇到需要证明某两个三角形全等或其他的数学题，但却经常需要运用数学的思维对事物进行判断或推理。因而，为了满足社会发展对数学教学提出的要求，数学教学的重点应该放在培养学生的数学思维上，特别是培养理性精神上，而不是解数学题上，这也就是数学素质教育的意义。

2. 生活变化对数学的需要

研究者采用调查新闻媒体来分析数学在公民的社会生活中的需要。得出的结论是：生活中需要的数学语言越来越多，各种统计图表、数学符号向公民传递大量的信息。数学课程内容应该反映公民的数学需求，课程内容的呈现要使学生感受到数学与现实的联系，让学生从现实生活背景中学习数学。因此将数学运用于生活实际，也应该是数学教育的重要目标。

3. 学生身心发展的需要

研究者主要从学习型社会对终身学习的需要，数学课程应该合乎学生心理特征和身心发展状况两个角度，对数学课程目标作了分析。进而指出，数学学习

---

① 皮连生. 实施《基础教育课程改革纲要（试行）》的心理学基础. 上海：上海教育出版社，2004. 4 (76)

应该是一个主动建构的过程,应该转变学生的数学学习方式;应该重视学生在数学学习中的个性特征,应该关注数学学习中的情感、态度、价值观等因素;数学教学必须以促进学生自主、全面和可持续发展为目的。

基础教育阶段的教育对象是正在成长的青少年,因此确定数学的教育目标,一方面要考虑教育对象的智力发展水平及其局限性。对数学基础知识的深度、广度和基本技能、基本能力的要求,必须符合学生的认知发展水平和理解能力,并能进一步丰富其知识,培养和发展学生的个性心理品质与智能水平,有利于学生的身心健康。另一方面,要充分考虑到青少年的可塑性大,他们的智力水平和实践经验在数学教学活动中会迅速发展和丰富,有很大的潜力可以挖掘,因此数学教育应该有利于学生在接受教育的过程中得到充分的发展。

新课程的数学教学目标,不仅关注学生的知识和技能,而且特别强调知识与技能、过程与方法以及情感、态度与价值观 3 个方面的整合,这体现了一种新的价值追求。学生的学习过程,是以学生的整体心理活动为基础的认知活动和情意活动不断相互统一的过程。在学生的学习过程中,认知因素和情感因素一直是同时发生、交互作用的,这两个方面共同组成了学生的学习心理,从两个不同的角度对学生的学习过程给予重大的影响。其实,在学习过程中,这两个方面是相互依赖的,如果没有认知因素的参与,学生的学习任务不可能完成;同样如果没有情感因素参与,真正的学生的学习活动既不能发生,也不能维持。情感不仅是指学习兴趣、学习热情、学习动机,更是指学生学习过程中的内心体验、心灵世界的丰富和乐观的生活情趣①。因此在制定教学目标时,应充分考虑情感因素的目标。

4. 数学发展的需要

研究者分析了当今数学发展的三个特征:(1) 数学得到了空前的应用,具有“技术”的性质;(2) 经典数学得到了蓬勃发展,形成了许多新成果和新思想;(3) 数学研究的方式发生了变化,“做数学”的过程更加明显。以此为基础,研究者进一步指出,数学课程应该体现数学刻画现实世界的过程和全貌,使学生体会数学与现实世界和人类进步的密切关系;应该使学生体会数学研究的基本方法:观察、实验、收集信息、猜测、验证、反思、调控等;数学教育必须重视培养学生的应用意识、培养学生的数学头脑。由此可见,数学教学的内容必须适当调整,必须符合数学发展趋势的要求,提高数学实验的要求。

5. 解决当前数学课程问题的需要

研究者着重分析数学课程所存在的问题,找出课程的理想目标与现实目标之间的差距。研究者对学生数学学习中所存在的问题作了如下归纳:(1) 学习

① 乔荣凝.高中学生数学课堂中的情绪障碍与学习成绩的关系.数学教育学报,2003.3(60).

目标狭窄,难以适应学生的发展需要。这表现为基础知识和基本技能的目标成为数学学习目标的主体;课程目标难以适应学生个性化发展需求;对培养学生创新精神和实践能力的关注不足;缺乏对学生良好的情感体验和个性品质的关注。(2) 数学学习与社会实际相脱离,不能很好地满足学生利用数学解决生活问题的需要。(3) 在学习内容上,过分追求逻辑严谨和体系形式化;在不同程度上存在"繁、难、偏、旧"的状况;数学教材类型贫乏,选择余地小。(4) 在学习方式上,学生以被动接受为主要特征;对主动获取知识以及学会学习的能力、态度、习惯、方式的培养重视不够;信息技术在数学学习中的应用是一个薄弱环节。(5) 学生对数学考试的态度消极,数学考试的形式、内容、效果都有待改善。因此课程目标的确定必须将解决目前数学教学中所存在的问题作为重要的依据。

6. 与国际接轨的需要

研究者概括了国际数学课程目标改革的特点:(1) 注重问题解决;(2) 注重数学应用;(3) 注重数学交流;(4) 注重数学思想方法;(5) 注重培养学生的情感、态度与自信心。结合国际数学课程内容改革的特点,研究者提出了数学课程的基本出发点是促进学生全面、持续、和谐地发展,应该面向全体学生,为每个学生提供最有价值的数学,重视学生的情感、态度、价值观的培养等建议。

课程的本质是知识。一般说来,首先是在认知领域开始构建教学目标。然而知识也有个学以致用的问题,如何把知识化为技能并应用到实践中去,自然为人们所关注,教育目标的编制又逐渐扩大到技能领域。另外,知识并不是孤立的,它常常与一定的世界观和方法论联系,并受其支配。例如,学习自然科学,以培养科学思想与科学作风相联系;学习哲学,可扩大精神世界;学习数学,有助于思维严密进行逻辑思考;学习文学艺术,有助于思想情操的陶冶。由于知识技能的传授带来了进行思想教育的要求,因此,教学目标的编制又扩大到思想情感域,包括品德、意志、态度、性格、兴趣等在内。

基于上述需要分析,制定了义务教育阶段的数学课程目标为"通过义务教育阶段的学习,学生能够:(1) 获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的重要数学知识以及基本的数学思想方法和必要的应用技能;(2) 初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会,去解决日常生活中和其他学科学习中的问题,增强应用数学的意识;(3) 体会数学与自然以及社会的密切联系,了解数学的价值,增进对数学的理解和学好数学的信心;(4) 具有初步的创新精神和实践能力,在情感态度和一般能力方面都能够得到充分发展"。具体阐述见下表。

知识与技能	经历将一些实际问题抽象为数与代数问题的过程,掌握数与代数的基础知识和基本技能,并能解决简单的问题 经历探究物体与图形的形状、大小、位置关系和变换的过程,掌握空间与图形的基础知识和基本技能,并能解决简单的问题 经历提出问题、收集和处理数据、做出决策和预测的过程,掌握统计与概率基础知识和基本技能,并能解决简单的问题
数学思考	经历运用数学符号和图形描述现实世界的过程,建立初步的数感和符号感,发展抽象思维 丰富对现实空间及图形的认识,建立初步的空间观念,发展形象思维 经历运用数据描述信息、做出推断的过程,发展统计观念 经历观察、实验、猜想、证明等数学活动过程,发展合情推理和初步的演绎推理能力,能有条理地、清晰地阐述自己的观点
解决问题	初步学会从数学的角度提出问题、理解问题,并能综合运用所学的知识和技能解决问题,发展应用意识 形成解决问题的一些基本策略,体验解决问题策略的多样性,发展实践能力和创新精神 学会与人合作,并能与他人交流思维的过程和结果 初步形成评价和反思的意识
情感与态度	能积极参与数学学习活动,对数学有好奇心和求知欲 在数学学习活动中获得成功的体验,锻炼克服困难的意志,建立自信心 初步认识数学与人类生活的密切联系及对人类历史发展的作用,体验数学活动充满着探索与创造,感受数学的严谨性和数学结论的确定性 形成实事求是的态度以及进行质疑和独立思考的习惯

高中数学课程的总目标是:使学生在九年义务教育数学课程的基础上,进一步提高作为未来公民所必要的数学素养,以满足个人发展与社会进步的需要。具体目标如下:

(1) 获得必要的数学基础知识和基本技能,理解基本的数学概念、数学结论的本质,了解概念、结论等产生的背景、应用,体会其中所蕴涵的数学思想和方法以及它们在后续学习中的作用。通过不同形式的自主学习、探究活动,体验数学发现和创造的历程;

(2) 提高空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力;

(3) 提高数学地提出、分析和解决问题(包括简单的实际问题)的能力,数学表达和交流的能力,发展独立获取数学知识的能力;

(4) 发展数学应用意识和创新意识,力求对现实世界中蕴涵的一些数学模

式进行思考和做出判断；

（5）提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度；

（6）具有一定的数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，形成批判性的思维习惯，崇尚数学的理性精神，体会数学的美学意义，从而进一步树立辩证唯物主义和历史唯物主义世界观。

4.2 我国数学教育目标的发展

4.2.1 新中国成立以来我国教育目标的发展过程

我们先简单回顾半个多世纪以来我国数学教学目标的变革，各阶段中学数学课程标准（或教学大纲）教学目标的表述和说明。

1951 年，新中国颁布了第一份数学课程标准，其教学目标包括形数知识、科学习惯、辩证思想和应用技能等四个方面；

1952 年，数学教学大纲突出了思想品德方面的要求，也扩大了技能的外延，但删除了 1951 年课程标准中培养科学习惯的要求，实际上舍弃了其精华部分；

1956 年，数学教学大纲第一次明确提出培养学生的逻辑思维能力与空间想象能力，初步确定了我国现代数学教育的能力观；

1963 年，教育部制定了《全日制中学数学教学大纲（草案）》，其中确定的中学数学教育目标是"使学生牢固地掌握代数、平面几何、立体几何、三角和平面解析几何的基础知识，培养学生正确而且迅速的计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力，以适应参加生产劳动和进一步学习的需要。"1963 年大纲具有两个特点：其一，充实了数学基础知识，把平面解析几何作为一门学科充实到中学数学教学体系中去；其二，明确提出了数学教学要培养三种能力，即计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力，表明我国现代数学教学的能力观基本确定。大纲的缺点是忽视了思想品德的教育和个性品质的培养，因而当时的数学教育目的观还是不够完善。另外，对教学目的的提法，数学教育就是掌握知识，至于它的来源，与现实的关系，如何去运用都没有提，重点突出的是著名的"三大能力"。至于如何适应参加生产劳动的需要，没有具体的说明。1963 年教学大纲所确定的目标，减弱了数学的实用功能，但加强了思维素质培养的功能。

1978 年，教育部制定的《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》，提出了新的中学数学教育目标"使学生切实学好参加社会主义革命和建设以及学习现代科学技术所必需的数学基础知识，具有正确而且迅速的计算能力，一定的逻辑推理能力和一定的空间想象能力，从而逐步培养学生分析问题和

解决问题的能力。通过数学教学,向学生进行思想政治教育,激励学生为实现四个现代化学好数学的革命热情,培养学生辩证唯物主义观点。"

1988年,教育部制定了《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用)》,1995年6月该大纲第二版指出,初中数学的教学目标是"使学生学好当代社会中每一个公民适应日常生活,参加生产和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识与基本技能,进一步培养运算能力,发展逻辑推理能力和空间观念,并能用所学知识解决简单的实际问题,培养学生良好的个性品质和初步的辩证唯物主义观点。"

1996年,国家教育委员会基础教育司编定的《全日制普通高级中学数学教学大纲(供试验用)》,2000年2月又颁布了修订本,确定了高中数学的教学目的"使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识和概率统计,微积分的初步知识,并形成基本技能,进一步培养思维能力、运算能力、空间想象能力、解决实际问题的能力,以及创新意识,进一步培养良好的个性品质和辩证唯物主义观点。"

以上简单回顾我们发现,我国数学教学目标不断成熟和完善,数学教育目标,我国在各个历史阶段的侧重点不完全一样,但总体来说是大同小异。应该说,数学教育目标是一个"与时俱进"的、动态的、变化着的研究课题。而且20世纪90年代后,我国数学教育目标反映素质与能力的发展比较多。

4.2.2 对我国数学教学目标变革的思考

综观新中国成立以来的数学教学目的的变迁,我们看到,教学目标从内容上经历了一个由较为笼统到较为具体的过程,教学目标对培养能力的要求逐步增强。教学目标越来越体现出注重人的发展对数学的需求。由过去的完全注重社会的需要,发展到注重社会和个人需要的协调发展。学生学习数学不仅仅为了参加社会主义建设,也为了适应未来的日常生活和更好的生存,提高生命的质量。因而,数学教育应该为此作出努力;另外,教学目标越来越明确了数学教育要实施素质教育的方向。教学目标的内容结构趋于完善。从只谈传授知识与技能技巧,到包含了传授基础知识基本技能,培养基本能力和进行个性品质与思想品德教育三部分内容结构。

中学数学教学目标的发展过程,使我们认识到,要实现教育目标必须具有与之相适应的数学教育方法,并且要对教学内容进行相应的变革,而最重要的是教师的教学观和教学理念要随着社会和教育的发展而不断发展。我们知道,无论怎样的教育目标都需要数学教师的努力才能实现,没有教师的积极支持,任何教学目标都不能落到实处。

4.3 我国教育目标的研究

教育目标一方面是国家对教学的要求，是教学工作的指南；无论教学内容的确定，教材的编写，还是教学原则的贯彻与教学方法的选择，都必须以教育目标为依据。另一方面也是考核学生的成绩和检查、评估教育教学质量的重要标准。因此，作为教师，对教育目标必须有明确的认识，为此必须进行较为深入的研究。必须全面、深刻地掌握数学教学目标。只有这样才能使自己的教学既符合社会发展的需要，又符合学生发展的需要。当前在中学数学教师中还存在着不研究教育目标和教学大纲（或课程标准），只依靠两本书（教科书与教学参考书）进行教学的现象，必须尽快改变。

在这里我们对三个问题进行研究，即从基础知识和基本技能、数学能力、思想品德修养三个方面，来对我国数学教育目标进行研究。

4.3.1 数学的基础知识与基本技能

中国数学教育有许多特点，但以双基教学为主要特征。"重视基础，重视训练"是中国传统教育的精华。数学双基教学，是中华民族文化的组成部分，具有悠久的历史。

1. 数学基础知识

一般认为，数学教学大纲（或课程标准）中规定的知识都属于数学基础知识的范畴。由于中学教育是基础教育，所以应该加强基础知识的教学。中学数学基础知识并不是数学科学的逻辑基础，而是指数学科学的初步知识，也就是进一步学习各门近现代数学理论，学习物理、化学等相邻科学以及参加生产劳动所必需的最基本的数学知识。数学基础知识的教学是数学教学的首要任务，任何削弱基础知识的做法都会产生严重的后果。

数学基础知识具有层次之分，根据抽象程度的高低，可以把数学基础知识划分为基本概念、基本原理和基本思想方法三类。应当指出，数学基础知识教学的任务不仅要使学生明确数学的基本概念，掌握教材中的各种公式、定理、法则及应用，更重要的是使学生掌握好隐含在教材内的数学思想方法，而且数学思想方法的掌握应该是数学教育的最重要的目的之一。因为掌握好数学思想方法，不仅可以促进学生对数学概念和原理的掌握，而且有助于培养学生运用数学知识分析和解决实际问题的能力。

当前，在中学数学教学中忽视数学思想方法的问题是比较突出的。例如，对虚数单位 i 和对数的底数 a，只讲规定 $i^2=-1$，$a>0$，$a\neq1$，而不讲原因。由于学生不理解为什么要作这样的规定，因而只能死记硬背，这对掌握数学的思想方

法是不利的。其实这里分别蕴涵着数学解决问题的符号思想和数学模型思想等。另外,教材中许多基本的数学方法和数学思想在教学中教师也缺乏系统的讲述,缺乏提炼和总结,使学生对数学思想方法的掌握若明若暗,也就很难有高水平的运用。在解决问题时常表现出思路狭窄的情况。例如,有研究者用以下三题测试某重点高中二年级学生,结果全班得分率只有 34.7%。究其原因,是学生普遍缺乏反证的思想,以简役繁的思想和划归分类思想。

例 1 求证 $\cos 10^\circ$ 是无理数;

例 2 分解因式 $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

例 3 求证在平面上任意五个整点(坐标均为整数)中,至少有两个点,其连线中点仍为整点。

数学思想方法的掌握由于需要比较长的时间,不可能在一节课,或者一个学习阶段掌握,因此,被许多教师忽视。实际上,在中学无论是数学教师还是学生,对数学思想方法的理解都还有待于加强,有些学生几乎在中学的学习过程中没有听过数学思想方法这一名词。由于数学思想方法是数学的精华所在,对人的素质有及其重要的影响。教师要努力在教学中体现数学思想方法的教学,对教学的评估也应该将数学思想方法的教学作为重要的评估项目。

2. 数学基本技能

按教育学和心理学的理论,广义的技能可以分为三类,第一类是动作技能,也称为操作技能;第二类是智慧技能,也称为心智技能;第三类是一种特殊的智慧技能,也就是现代认知心理学中所说的认知策略。关于数学技能,张孝达先生指出,“技能是按照一定程序或步骤进行并完成局部性的一种操作”,“数学技能是可以按照一定步骤来进行的简单运算,基本作图和画图,简单推理,以及用数学符号、语言来表述简单的数学事实”,“数学技能是发展数学能力的基础,我们不能脱离技能的训练来发展学生能力”。张建跃先生指出“数学基本技能界定为‘按照一定的程序与步骤进行运算、推理、处理数据、画图、绘制图表’等是比较科学的。”①

上述专家对技能的解释,使我们不仅认识了技能的含义,而且对技能的掌握途径也有一定的理解。数学基本技能是在熟练运用数学基础知识的过程中形成的技能。例如,按一定的步骤和程序熟练的完成作图是绘图的技能,按一定的步骤和程序处理数据是处理数据的技能,按一定的步骤和程序去推理是推理的技能。一般的说,高中数学中的基本技能,主要是运算技能、处理数据的技能和绘图技能。

技能要通过操作训练的方式才能掌握的。数学的练习与习题发挥的作用之

① 张有德,等.“数学双基”问题的相关研究与思考.数学教育学报,2004.4(28).

一就是培养和训练技能。技能的训练需要把握一定的"度"。目前,部分数学教师过度地强调了通过练习训练技能的要求,重复练习过多,在一定的程度上加重了学生的学习负担。关于技能,目前在基础教育中还有一个问题值得注意:技能的训练过于单一,只围绕解题开展训练,而对于其他技能的训练则相对忽视。这不仅加重了学生的负担,而且也会使学生的发展出现不协调现象。

3. 基础知识和基本技能的深广度

在现行高中数学大纲的"教学目的"中,对"双基"的深广度使用了四个层次:了解、理解、掌握、灵活运用。新的课程标准也对基础知识提出了不同层次的要求,教师应该针对不同的学习内容和不同的学生好好把握各个层次的要求,并结合学生的实际情况灵活运用。

4. 用发展的观点看待双基

"双基"教学是中国数学教学的经验与特色。半个世纪来我国数学教学一直很重视基础知识和基本技能的教学。知识的学习使学生的数学学习有了坚实的基础,技能的熟练使学生在运用知识解题时,能够思维清晰、准确、快捷、高效,可以将时间和注意力集中在思考问题的本质上。这是我国数学教学的重要成就,在新的历史发展时期,我们应该保留和发扬光大。

然而,在看到我国的优势的同时,我们还应该用发展的眼光来对待"双基",使我国的双基教学不断发展和不断完善。特别是在新课程改革中我们更应该立足双基教学,完善双基教学,形成有中国特色的数学教育。这首先要求我们的数学教师对"什么是双基?"作深入分析,我们不能将"双基"等同于各个孤立的"知识点",而应该从认知的角度全面理解"双基"。在数学教学中,我们不仅应该帮助学生较好地掌握基础知识,并应注意引导学生将基础知识联系起来,形成整体性知识网络。在进行基本技能训练时,我们也不应该仅仅停留在重复训练上,也应注意帮助学生学会在各种变化的条件下如何能对此作出辨认和应用。而且技能的训练也要均衡。

4.3.2 培养数学能力

一般认为数学能力是由基本能力和一般能力构成的,数学基本能力指思维能力、运算能力和空间想象能力;一般能力包括观察能力、记忆能力、注意能力、提出问题的能力等。我们对其中的部分能力做一些讨论。

1. 思维能力

思维能力是所有能力的核心,在思维能力中逻辑思维与非逻辑思维能力都是最基本的成分。而且在中学也主要是培养学生这两个方面的思维能力。

逻辑思维能力,就是按照逻辑思维的规律,运用逻辑思维的方法进行思考、推理和论证的能力。在高中数学教学中应当培养的逻辑思维能力主要包括三个

方面：

(1) 运用分析、比较、综合、抽象、概括的方法形成概念的能力；

(2) 运用演绎方法进行推理论证的能力；

(3) 运用分类方法建构知识体系的能力。

因此培养学生的逻辑思维能力也就可以从这三方面入手。

非逻辑思维能力主要指归纳、类比及直觉思维能力。在高中数学教学中，培养学生的非逻辑思维能力主要有三个方面的内容：

(1) 要使学生熟悉正确的思维过程，即从特殊到一般的抽象化过程和从一般到特殊的具体化过程；

(2) 要重视数学思想和数学方法的教学，使学生掌握各种逻辑思维方法与非逻辑思维方法；

(3) 利用直觉思维和合情推理，培养学生提出假设与猜想的能力。与培养学生的逻辑思维能力类似，培养学生的非逻辑思维能力也就可以从以上三方面入手。

2. 认识和把握数学的特点及其现实水平的能力

数学的特点是内容的高度抽象性，推理的严谨性和应用的广泛性。

(1) 数学抽象的特点

人类是通过抽象获得对自然界的本质认识的。正如列宁所说："认识是人对自然界的反映。但这并不是简单的、直接的、完全的反映，而是一系列的抽象过程，即概念、规律等等构成、形成过程。"正是通过抽象，"我们从有限中找到无限，从暂时中找到永久"，在思想上从个别性提高到特殊性，然后再从特殊性提高到普遍性，从而能够真正地、深刻地理解和把握现实世界。①

数学抽象性主要体现在内容、方法和抽象程度上。首先，从内容来看，数学抽象撇开研究对象的具体内容，仅仅保留空间形式和数量关系，这些形式和关系是一些形式化的思想材料。其次，从方法上看，数学是以逻辑为链条的形式化符号系统，数学的形式化方法决定了数学能对纯粹的量进行独立地、理性化地、系统地、深入地研究，并且独立地创造出思想成果，推动数学自身的发展。另外，从抽象程度上看，数学的抽象是逐步发展的，它达到的抽象程度大大超过了自然科学中的一般抽象，从直接概述现实对象属性的抽象，到拓扑空间、代数结构等高水平的抽象，每一次抽象都是理性思维的结晶，体现了人类思维的最高层次。

要使学生理解数学的抽象性，首先必须使学生认识数学抽象性，要求教师在教学中，将数学对象的抽象过程作为教学的重要内容，要改变只注意结论的教学，这样学生才能在学习过程中体验抽象的内涵。另外在教学中，我们还必须使

---

① 钱珮玲，邵广华．数学思想方法与中学数学．北京：北京师范大学出版社，1999.7(66)．

学生意识到抽象对于数学的重要意义。在此基础上,学生才能有意识地将抽象贯穿数学学习的过程中,并从中学会抽象的方法。

(2) 数学严谨性的特点

数学严谨性要求建立数学理论必须依靠严密的逻辑推理来保证,每一个数学分支都是以逻辑为链条的演绎系统。数学推理中对事物主要基本属性的准确把握,本质上源于公理化方法,而公理化的严谨性是数学的基本特征。具体地说数学严谨性有以下几个方面的特点。首先,数学结论的叙述必须精炼、准确;其次数学推理必须严格、缜密;另外,数学所有的推理得出的结论被组织成一个严谨的逻辑体系。

在数学教学中,无论对于教师还是学生对严谨性也有一个认识和把握的问题。对教师来说,就是一个"度"的问题。要在教学中既保证数学的严谨性,又保证学生的可接受性。对学生来说,就有一个认识和理解的问题,要使学生体会严谨性对数学研究的作用和意义,并自觉将严谨性运用于数学研究和学习。

(3) 数学应用的广泛性

数学应用的广泛性表现在,一切科学技术原则上都可以用数学体系来解决有关的问题,数学成了一切科学的工具。从日常生活到社会科学的各个分支学科,也无一能离开数学。另外数学应用的广泛性还表现在数学思想方法的独特性(如可靠性、抽象性、辩证性、超前性、优美性等)日益为社会所广泛理解和接受,成为解决其他学科理论和实践问题的一般方法,数学语言已经成为自然科学的通用语言。

数学的重要性还体现在其研究对象和研究方法上,数学不是对某个事物进行研究,而是研究具有共同属性的一类事物,如数学研究的三角形,不是某个三角形,而是一般的三角形,于是,研究的结果也就适合所有三角形。这是数学的抽象性的特点,也是数学应用广泛性的特点,更能体现数学与其他科学的区别。另一方面是数学的研究方法,数学采用推理论证而不是实验的研究方法,所得结论不会因时间和地点发生变化而变化,因此具有可靠性。数学的研究对象和研究方法的特点决定了数学对科学,对人的思维的发展具有其他学科所不能取代的作用,因此,数学成为基础教育的重点学科,也是每一次课程改革最受关注的焦点。

在研究数学的特点时,有一个问题是值得注意的。目前有两种似乎相悖的情况,一方面是数学自身的发展对社会发展的影响越来越大,另一方面是人们对数学越来越疏远。这一现象的原因是多方面的,但主要还是因为数学自身的特点所造成。数学的严谨性就使许多人觉得难以理解和接受。为了说明这一点,我们来看一个数学小幽默:

有人问数学家一个问题:

"树上有十只鸟,开枪打死一只,还剩几只?"

数学家反问:

"是无声手枪或别的无声的枪吗?"

"不是"

"枪声有多大?"

"会震得耳朵疼。"

"那就是说有 80~100 分贝?"

"是"

"在这个城市打鸟犯不犯法?"

"不犯。"

"您确定那只鸟真的被打死了?"

"确定"提问的人已经不耐烦了,"拜托,你告诉我还剩几只就行了,OK?"

"OK,树上的鸟有没有聋子?"

"没有。"

"有没有关在笼子里的?"

"没有"

"有没有残疾的或饿得飞不动的鸟?"

"没有"

"算不算还在肚子里和孵在鸟窝里的鸟蛋?"

"不算"

"打鸟的人眼有没有花?保证是十只?"

"没有花,就是十只"

提问的人已经满头大汗,但数学家继续问:

"有没有傻到不怕死的鸟?"

"都怕死"

"会不会一枪打死两只?"

"不会"

"所有的鸟都可以自由活动吗?"

"完全可以"

"如果你的回答没有骗人的话",数学家满怀信心地说"打死的一只要是挂在树上没有掉下来,那就剩一只,如果掉下来那就一只不剩"

提问的人当场晕倒!

当然这只是一则幽默,但也说明数学的严谨性特点使数学与人们的一般思维相差比较远,这给人们接受数学带来一定的障碍。数学的抽象性也使人们对数学产生了距离。这无疑给数学教学带来了困难,数学教师应该在数学教学中,

努力培养学生理解和认识数学的能力，使学生既能认识和把握数学特点，并能将数学的思维融合于学生的日产生活和未来的工作之中，只有这样才能使学生在对数学有充分认识的基础上理解数学的特点，也才能使数学教学与社会对数学的需要相符合。

3. 运算能力

运算是一个广义的概念。运算能力是指会根据法则、公式正确地进行运算、处理数据并理解算理，能根据问题条件，寻求与设计合理、简捷的运算途径。高中数学中的运算不仅包括数值的计算，还包括各种代数运算，初等超越运算，分析运算以及表达式的变形等。具体来说，高中数学中的运算有五种形式：第一，六种代数运算，即加、减、乘、除、开方、乘方运算；第二，指数、对数、三角等初等超越运算；第三，求导、微分、积分等分析运算；第四，统计与概率运算；第五，集合运算。

从结构上看运算能力包括四个要素，即准确程度、快慢程度、合理程度和简捷程度，这四个要素反映出运算能力的大小。运算能力具有综合性、层次性和发展规律性的特点。

综合性，是指运算能力是一种综合能力，因而，培养学生的运算能力是一项复杂的系统工程，要有计划有步骤地长期进行培养和训练。

层次性，是指运算能力的形成必然要经过从简单到复杂、从低级到高级、从具体到抽象的循序渐进的过程，它的发展具有鲜明的层次结构。因此，对学生运算能力的培养必须贯穿于数学教学的全过程。

发展规律性，就是指随着社会的发展，对学生运算能力的要求也在不断提高。例如20世纪50年代我国高中要讲计算尺，20世纪70年代开珠算课，进入20世纪80年代以后，随着计算机的逐步普及，连数学用表的地位也下降了，而重点是掌握算法和算理。可见对运算能力的要求随着社会的发展在不断发展变化。现在国外对运算的要求是：简单的运算要用心算，尤其要会估算；一般运算可以有笔算；复杂的运算则可以用计算器或计算机。

依据上述运算的特点，教师在教学中，应该努力使学生掌握更先进的运算工具进行精确运算，而且要掌握估算的方法。

4. 空间想象能力

空间想象能力主要是指能够由实物形状想象几何图形，由几何图形想象实物形状。能够想象几何图形的运动和变化。能够从复杂的图形中区分出基本图形，并能分析其中的基本元素及其关系。能够根据条件作出或画出图形，会形象地提出本质问题。

空间想象能力的发展具有明显的阶段性，空间想象能力的第一个发展阶段是空间知觉，如婴幼儿能从外形认出父母。第二个阶段是空间观念，这主要在义

务教育阶段完成。如能够由简单的事物想象出几何图像，由几何图像想象出物体，能够根据条件画出图形等。第三阶段是空间想象，人们在绘制复杂的立体图像时需要这种能力。更高级的空间想象能力常见于数学家的头脑，他们从二维、三维空间出发，研究到 n 维空间，又由欧氏空间扩展到非欧空间。一般的说，第三个阶段的培养主要在高中和高等教育中培养和发展。

培养学生的空间想象能力主要有五个方面的要求：

(1) 熟悉基本图形，包括平面图形和立体图形；

(2) 能借助于图形反应并思考客观事物的空间形状及位置关系；

(3) 能够判断和识别由数学语言及数学表达式所表达的客观事物。例如对于方程组

$$\begin{cases} x = 3 + t\cos\theta, \\ y = 2 + t\sin\theta, \end{cases}$$

应当想到 t 为常数时，它表示以点(3,2)为圆心，以 t 为半径的圆，当 θ 为常数 $(0\leqslant\theta<\pi)$，t 为变数时，它表示过点(3,2)，倾角为 θ 的直线；

(4) 有较熟悉的识图能力，能分辨出复杂图形中的基本图形，并能分析基本图形及基本元素间的关系；

(5) 能根据需要构造出符合一定条件的图形。

5. 一般能力

数学教学应当培养学生的数学能力，从数学能力的结构来看，除了三大能力以外，还包括观察能力、注意能力、记忆能力以及发现和提出问题的能力等一般能力。以下仅对观察能力与提出问题的能力做简要分析。

(1) 观察能力

观察能力对于数学的研究和数学学习都是十分重要的，学生在学习新知识和解决数学问题时都需要观察，具备一定的观察能力可以帮助学生打开思路和寻找解决数学问题的途径。例如：解方程

$$\frac{x^2}{x^2+3x+2}-\frac{x^2}{x^2+5x+2}=\frac{1}{24},$$

若按通常去分母的方法则得到高次方程，若注意观察特点，并设法将方程两个分式的共同点集中，则可得

$$\frac{x}{\frac{x^2+2}{x}+3}-\frac{x}{\frac{x^2+2}{x}+5}=\frac{1}{24},$$ 令 $y=\frac{x^2+2}{x}$ 得 $\frac{x}{y+3}-\frac{x}{y+5}=\frac{1}{24}$ 从而先求 y 再求 x 则较为简捷。

高中数学教学中的观察主要表现在三个方面：第一，对各种代数式，超越式或几何式的结构与特点的观察，属于对数量关系的观察；第二，对各种图形的结

构与特点的观察，属于对空间形式的观察；第三，对各种运算、推理及证明过程的观察，属于逻辑推理过程的观察。

(2) 发现和提出问题的能力

20 世纪 80 年代以来国内外教育界对培养学生数学能力的问题十分关注，进行了许多有意义的研究和探讨，影响较大的是美国“全国数学督学联合会”提出的十大能力，其中之一就是发现和提出问题的能力，并把它放在诸能力之首。

发现问题和提出问题的能力是一种重要的能力，属于创造性思维的范畴，为了造就富于创新精神的开拓型人才，在数学教学中培养学生发现问题和提出问题的能力具有重大意义。

在我国的数学教育中，发现和提出问题是学生的一个薄弱环节，由于这一能力是创新的基础，在创新能力日益重要的现代社会，培养学生发现问题和提出问题的能力成为数学教育的重要内容。

4.3.3 个性品质的培养与辩证唯物主义基本观点的教育

教育原理指出，教学永远具有教育性，向学生传授知识的过程必然是也必须是进行思想教育的过程。数学教学同样具有培养学生个性品质的内容，依据数学的特点，可以着重从以下几个方面进行工作。

1. 培养学生的辩证唯物主义观点

辩证唯物主义观点是马克思主义哲学的基本观点，也是我们认识事物的基本观点。在中学培养学生辩证唯物主义观点有两方面的要求：

(1) 培养数学来源于实践又作用于实践的唯物主义观点。在教学中应尽量让学生通晓数学知识的来龙去脉，而且，使学生理解数学不应当停留在经验与应用上，还应上升到数学的抽象。通过学习使学生认识一些辩证统一的现象，如无限与有限的辩证统一、抽象与具体的辩证统一等。特别是无限与有限之间的关系的学习，是中学辩证思维教学的重要内容。要通过一些具体的问题使学生理解，无限是有限的变化结果，有限变化中孕育着无限，这样一对即对立又统一的关系。如在数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$，我们只能写出有限项，但在这有限项中却孕育着一个无限变化的规律，而无限变化就要通过这有限变化来实现。

(2) 培养事物普遍联系，对立统一和运动变化的辩证观点，以“一与多”为例：由 $5=1+1+1+1+1$，$1=1^{100}=1^{5\,000}$，$1=1.000\,85^0=789\,10^0$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ 从中可以看到多中不仅包含 1，而且能转化为 1，这体现出事物是可以相互转化的。

另外，在数学中充满着运动变化的思想，如函数思想、极限思想等，教师要借助于这些内容的教学，使学生体会这些思想。

2. 培养学生良好的个性品质

学生良好的个性品质的形成，主要依赖于学校的教育，当然包括数学教育。在数学教学中，我们应该主要培养以下几方面的个性品质：

(1) 正确的学习目的，学习兴趣、信心和毅力；

(2) 实事求是的科学态度，勇于探索的创新精神；

(3) 欣赏数学的美学价值。

关于数学的美学价值，论及的文章很多。但是，如何在课堂上展现数学美，培养学生欣赏数学的美学价值呢？有研究者（如张奠宙先生）提出了数学教学中的美学教育有以下四个层次：美观、美好、美妙、完美。

第一层次是美观。这主要是外观上的对称与和谐。例如，圆是对称图形，美观、均匀。正三角形、五角星等常见的几何图形都因对称而受到人们的喜爱。

数学教学中的美观认识，在算术、代数科目里也有反映。我们经常看到一些和谐的数学公式：$a^n b^n = (ab)^n$，$\frac{b}{a}\frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$，受这些式子和谐性的影响，很多学生就很习惯地认为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$。我们一方面应鼓励学生在学习数学时运用这种美学观点去认识世界，而且有一些运算也符合美学规律，如篮球运动员比赛，上半场比分是1比2，下半场是1比3，则整场比分就是2比5。另一方面，我们还应该告诉学生，美观的东西不一定都是数学的规律。上一例只是一个特殊的例子，并不适合于一般的运算，而数学的研究具有一般性，因而不能将其作为数学的运算规律。

第二个层次是美好。数学上有许多东西，只有感到其美好，才会体会到其价值。一个突出的例子是一元二次方程的求根公式：

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

这一公式无论从哪方面看，都不对称、不和谐、不美观。但是，当我们了解它、运用它、欣赏它，就会发现它的美好。这一公式告诉我们很多信息，如方程有两个根、根号中是判别式，会显示实数根的数目等。所以当你熟悉了它就会感到它的美好。

第三层次是美妙。数学中的许多定理，会给人一种很美妙的感觉。例如，最简单的勾股定理，结论很简单、和谐。但是，当你深入思考时，给出它的几十上百种证明方法是，才会体会到它的伟大和深刻。人们把它作为和外星人进行沟通的图案和公式，就传达了人们一种对其美妙性的赞叹心情。另外，每个学过数学

的人,都有过证明几何题的体会。当一条辅助线使无从着手的几何题豁然开朗时,这时候的快乐与兴奋只能用一个字来形容,那就是"妙",这就是数学的美妙。

第四个层次是完美。数学总是要做到完美无缺。大的方面说,欧氏平面几何公理体系的构建,数学证明费马定理经过了三百余年,都是追求完美的例子。从小的方面说,我们做一个题目,总是希望找到更多的解答。证明了锐角三角形具有的性质,还必须推广到其他三角形等。数学追求完美的境界,是数学思维的一个特点,如为了追求对偶性,人们引入了"无限远"点这一及富想象力的数学概念。我们运用数学的美学教育功能,就会使人的思想得到升华,思维品质得到提高,创新精神的到发扬。

4.4 微观数学教学目标的确定依据

前面,我们从宏观的角度对数学教育目标进行了讨论,本节我们主要介绍如何制定微观的课程目标,即课堂教学目标。由于在第 9 章中,我们还要对这一问题进行研究,我们这里仅做一些初步的介绍。

课堂教学目标是在一节课或几节课上要完成的目标,所反映的是学生通过一段时间学习后需要掌握、形成的具体知识、技能、态度①。在教学设计过程中,制定微观的课程目标是众多环节中的第一步。因为数学教学的目标在很大程度上依赖于课程标准的要求和数学学习目的,著名的教育设计专家笛克(Dick W)和卡里(Carey L)指出,课程目标的制定或许是教学设计过程中的最为重要的一步,如果教学目标的制定不充分、不正确,即使再好的教学也难以很好地达到其原本的目的。有了课程目标,教师在制定教学目标时,还需要对学习的目的有充分的认识。

目前,在新一轮基础教育改革中,恢复了用课程标准代替过去使用的教学大纲;我们对两者的区别做一些说明,也对数学学习的目标进行一些论述。

4.4.1 课程标准的特点

"课程标准"与"教学大纲"相比,具有以下一些特点。

(1) 课程标准主要是对学生在经过某一阶段之后的学习结果的行为描述,而不是对教学内容的具体规定,而教学大纲或教科书便是一些具体的内容和教学要求的规定。

(2) 课程标准是国家制定的某一学段的共同的、统一的基本要求,而不是最

① 皮连生.实施《教育改革纲要(试行)》的心理学基础.上海:上海教育出版社,2004.4.

高要求。因此,具有比较大的灵活性,教师可以根据具体的教学对象进行调整,这对于充分发挥教师的主体作用具有重要的意义。

(3) 课程标准对学生学习结果行为的描述尽可能做到可理解、可达到、可评估,而不是模糊不清、可望而不可即的。这有利于对教学进行评估。

(4) 课程标准隐含着教师不仅是教科书的执行者,而且是教学方案(课程)的开发者,即教师是"用教科书教,而不是教教科书"。也就是说,教师可以依据对教学内容的理解进行创造性的教学,这为教师自我价值的实现提供了可能。

(5) 课程标准的范围是从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面体现数学课程的总体目标和学段目标的基本要求。

(6) 课程标准的核心内容包括学科的性质与地位、课程目标、课程内容及各学段安排。课程标准关心的是课程目标、课程改革的基本理念和课程设计思路;关注的是学生学习的过程和方法,以及伴随这一过程而产生的积极情感体验和正确的价值观;教师在使用课程标准的过程中,主要关注的是如何利用各门学科所特有的优势促进每一个学生的健康发展,而不是具体规定日常教学中所涉及的所有知识点的要求,不是仅仅关心学生对某个结论是否记住,记得是否准确,某项技能是否形成,并且运用起来是否得心应手,在规定的时间内能否完成教学任务和达到教学目标。

(7) 课程标准对教材编写、教学要求、教学建议、教学评价等也都做出相应的规定和要求,不再包括教学的重点、难点、时间分配等具体内容。这是课程标准与直接指导教学工作的教学大纲的本质区别。

以上对课程标准的简单介绍,不仅使我们对课程标准有一定的认识,也为我们正确利用课程标准制定微观教学目标提供了依据。我们在制定课程目标时,要依赖课程标准,但也要充分发挥教师自身的主动性,在对教学内容理解的基础上,依据学生的实际提出可行的教学目的。

4.4.2 数学学习的目的

"为什么要学习数学?"、"为什么学那么多的数学?"、"为什么世界各国都把本国语文和数学作为最重要学习科目",对将本国语言文学作为重要学习科目,是比较好理解的。因为,人们每天都要用语言进行交流,因此其重要性是明显的。但要回答为什么将数学也作为与语文同等重要的科目,这就需要进行认真的分析了,而对此问题的理解又直接影响数学教育目标的确定。

对为什么要学数学的问题的回答可能是:

"数学有用"。俗话说"学了语文会写信,学了数学会算账。"

"数学能训练人的思维",一句名言说"数学是思维的体操"

"数学是升学的主课"。常言道"数学是筛选人才的过滤器"

这些回答实际上就反应了数学的基本功能:

1. 实用性功能

例如,数学在日常生活中有用,在今后就业有用,在从事科学技术活动中有用。

2. 思维训练功能

例如,数学能够提升思维品质,养成严谨、准确、符合逻辑的思维习惯,形成科学的思维方法,养成优良的心理素质,培养正确的世界观,以及欣赏数学的美学价值等。

3. 选拔性功能

数学教人聪明,数学智力是其他智力的基础。升学选拔以"数学、语文、英语"为主要科目。

由于数学的基本功能是多方面的,我们在制定课程目标时,也应该从多角度、多方面进行思考,提出比较全面的课程目的。

关于课堂教学目标的具体制定问题,将在第9章中进一步讨论。

4.5 国际数学教育目标的比较与思考

不同的国家所处的社会背景不同,政治制度、经济发展、文化历史等方面都存在差异,这些差异的存在自然表现为数学教育目标观差异的存在,这里我们对近年来一些国家关于数学教育的目标的观念做一些比较、分析。

4.5.1 不同国家数学教育目标观

1. 美国数学教育目标观

在1957年苏联把第一颗人造地球卫星送上天的强烈震撼下,美国的数学教育就开始了不断的轰轰烈烈的改革。经过20世纪60年代的"新数学"运动和70年代的"回到基础"运动之后,20世纪80年代起美国掀起了全国性的数学教育改革。美国国家研究委员会自1984年以来,陆续发布了一系列关于振兴美国数学教育的报告。全美数学教师理事会(NCTM)于1989年公布的《学校数学课程与评价标准》(以下简称《标准》)。

《标准》中指出了美国数学教育的目标,并将其明确地分为社会目标和学生应达到的目标。他们认为:从历史上看,社会建立学校的目的是把文化的各个方面传给学生和引导学生前进,并为他们提供自我表现完善的机会。数学教育的目的要反映社会的需要和学生的需要两个方面,社会目标是为了使数学教育适应科学技术高速发展的信息时代,其具体目标为:

(1) 具有良好数学素养的工作者;

(2) 具有终身学习的能力;

(3) 机会人人均等(创立一个人人都享有同等的接受数学教育机会的社会);

(4) 明智的选民(数学使民众作出明智的判断成为可能)。

《标准》还提出了学生应达到的五个具体目标:

(1) 懂得数学的价值;

(2) 对自己的数学能力怀有信心;

(3) 具有解决数学问题的能力;

(4) 学会数学交流;

(5) 学会数学的思想方法。

《标准》中指出,"这些目标的意图是:学生必须具有数学素养。这一术语表示了这样一项独特的能力,它既包括探索、猜想和逻辑推理的能力,也包括有效地利用多种数学方法去解决问题的能力。"

美国数学教育目的观在一定程度上反映了时代精神和具有改革意义的数学教育思想。首先,美国数学教育目的强调了数学教育的立足点是培养适应于在当今和未来美国社会生活的大众,是为了每一位学生,要提高所有学生的数学素养。其次,突出了问题解决和数学应用的意识,认为问题应该贯穿于数学教育的始终。第三,学习数学即做数学,提倡进行数学实践,把数学学习作为一种探索数学、发展数学、创造数学和培养解决问题能力的生动过程,指出要"把课堂看作经常用重要的数学思想探索有趣问题的场所。"第四,注重数学交流和与他人合作,这也是生存于信息时代的需要。第五,强调学习与发展,以适应未来不断变化着的工作与生活环境。第六,重视对数学的价值的认识,特别是数学的社会价值与教育价值。事实上,数学的价值观决定着其目的观。我们也注意到,美国强调培养学生解决问题的能力,提高学生的数学素养,却不够重视包括思想素质在内的人的整体素质及数学基础知识在学生发展中的重要作用。事实上,数学的能力的培养与数学素养的提高离不开数学的基础知识。

2. 英国的数学教育目标观

英国当代的数学教育目标观,集中地反映在以下两个文件中:1982 年出版的国家学校数学教育研究委员会的报告《数学算数》和 1989 年英国国务大臣签发的《国家课程中的数学》。

《数学算数》是 20 世纪 80 年代英国数学教育改革的纲领性文件,在国际数学教育界也产生了广泛而深刻的影响。报告的核心是:数学教育的根本目标是为了满足学生离校后的生活、就业和进一步学习的数学需要。报告明确指出了数学课程和数学教师的具体任务是:

第一,在每个学生的能力范围内,发展其以后的成人生活,就业和进一步学习,参加培训所需的数学知识与技能,同时要注意到部分学生在学习中将会遇到

的具体困难；

第二，向每个学生提供学习其他学科所需要的数学知识；

第三，尽可能地帮助每个学生发展他对数学的兴趣和爱好，以及对数学在科学技术和人类文明发展中的作用的认识；

第四，更重要的是要使每个学生认识到数学为其提供了交流信息的有力手段。

报告指出："数学课程的各个阶段，教师都要帮助学生理解如何运用所学的概念与技能去解决问题"。报告适度地提出了发展逻辑思维能力，精确性和空间观念的问题，但认为"发展这些能力并不构成学习数学比其他科目更为重要的理由"。

英国在1988年议会颁布教育改革法以前，没有统一的学制，也没有统一的国家课程。教育改革法颁布后，学制相对统一。教育改革法1992年开始实施。文件论述了数学的价值：数学提供了感知现实世界的途径；数学是探索新世界的工具；数学能提供预见；数学技能是达到目的的手段；数学是奇妙与欣喜的源泉，指出数学的应用过程是生动的以及数学教学的统一性与多样性。文件规定的中小学数学教学的五项成绩目标为：

目标1. 运用和应用数学

其要点是：应用；数学交流；推理、逻辑和证明；

目标2. 数

其要点是：数的知识和运用；估计和近似；度量；

目标3. 代数

其要点是：模式与关系；公式；方程与不等式；图像表示；

目标4. 图形和空间

其要点是：图形；位置；位移；度量；

目标5. 数据处理

其要点是：收集与处理；表示与解释；概率。

英国的数学教育思想与数学教育目的观念的特点为：

(1) 实行水平区别化。国家课程数学的目标与教学进度是按水平来决定的，而不是依照年龄或年级，按照学生的实际能力，选择适合于他们的水平目标与教学进度，从而取得最大可能的学习效益；

(2) 注重应用。"运用与应用数学"单独列为国家课程数学成绩目标中的一项，而且贯穿于整个数学课程，成为其他四项目标的灵魂与核心。不仅此目标，其他目标也突出应用数学于解决实际问题与日常生活问题；

(3) 注重过程，注重学生的探索活动。国家课程数学除了明确成绩目标外，在学习大纲中还规定了学生应从事的活动，对教学活动的组织也十分重视。相

对于此，他们对“知识点”，对各种现成的数学结论包括公式、定理、法则等远不及我国那么重视，不仅数量少，对于记忆的要求也不高；

（4）注重数学教育目标的实施。

3. 苏联和俄罗斯的数学教育目标观

苏联是世界上数学科学研究与数学教育发达的国家之一，其数学教育的思想与经验都值得我们研究与借鉴。

目前俄罗斯中小学数学教学所执行的教学法大纲是苏联国家教育委员会制定并于1990年颁布，1991年开始实施的。大纲认为学校数学课程具有两方面的意义：一是实践方面的意义，它关联着人们在生产劳动中必须的工具的制造和使用，这一意义在于数学对象是现实世界中的空间形式和数量关系；二是精神方面的意义，它关联于人的思维，联系于掌握认识世界和改造世界的一定的方法……数学方法。数学教育对形成人的精神世界，造就人的个性的理性成分和民族道德成分的意义，显示了巨大的一般社会和一般文化价值。

大纲明确了数学教育对人教育、培养、发展的作用，决定了普通中学数学教育的基本任务：

（1）使学生掌握作为现代社会的人在日常生活和生产活动中所必需的，并足以适应能力其他学科的学习和继续学习之要求的数学知识、能力和技能；

（2）使学生形成关于数学的思想、方法及其对认识世界之作用的概念；

（3）用数学手段培养和发展学生个性的理性品质。

新的数学教学大纲反映了苏联与俄罗斯在数学教育目标观念上，既重视学生的理性发展，又重视学生人文精神的培养；突出了在数学教育过程中，学生是具有个性的主体；注重学生对数学的本质及其思想方法的认识与掌握；强调数学的实践功能与精神功能两个方面，认为数学是将学生培养为合格的现代社会人的重要手段。

4. 日本的数学教育目的观

日本学校学科教学内容是根据文部省颁布的学习知道要领来确定的，目前使用的《算术.数学学习指导要领》是1989年颁发的，初中和高中分别于1993年和1994年正式实施。

新的初中数学学习指导要领的基本思想是：

（1）重视审查基础知识和实际技能；

（2）重视逻辑思维能力和直接观察能力的培养，进一步发展灵活应用数学的能力；

（3）提高用数学观点对事物进行观察的能力，认识、理解数学思想的优越性；

（4）明确指导的重点，力求达到小学、初中及高中的连贯性。

新的高中学习指导要领有三大特点：

（1）强调数学的素养（mathematical literacy）和数学的思维（mathematical thinking）；

（2）全部课程的教学划分为基础核心部分和选择部分；

（3）为灵活运用计算机而准备配套教材。

我们看到，日本的数学教学目标观强调培养学生的数学素养，包括基础性数学知识的理解与掌握和具备基本数学能力。同时重视学生的个性发展及其对数学的多样化的需求，重视数学的应用，重视计算机文化及计算机技术对数学教学的影响。

4.5.2 比较与思考

从上述列举的几个国家的数学教学目的来看，有以下一些共同特点。

（1）重视问题解决是各国的一个显著特点。各国都将问题解决作为中学数学教学的重要组成部分；

（2）增强实践环节是各国教学目的的重要体现。各国都增加了具有广泛应用的数学内容，对学生的应用数学能力给予了足够的重视；

（3）强调数学交流是各国课程发展的新趋势。数学交流是数学教育的重要内容之一。数学作为一种科学语言，为人们提供了强有力的、简洁的、准确的交流信息的手段，也是人际交流和学术交流的一种工具。因此，不仅要求培养学生能够进行各种数学语言的转化，还应培养学生会使用数学语言准确、简洁地表达自己的观点和思想；

（4）强调数学对发展人的一般能力的价值，淡化纯数学意义上的能力结构，重在可持续发展；

（5）注重数学应用和思想方法。大多数国家倾向于通过解决实际问题，使学生在掌握所要求的数学内容的同时形成那些对人的素质有作用的基本的思想方法，如实验、猜测、模型化、合理推理、系统分析等；

（6）增强数学感受和体验。让学生体验做数学的成功乐趣，培养学生的自信心是数学教育的重要目标之一；

（7）加强计算机的应用，将计算机作为一项人人需要掌握的技术手段。

针对过去面向成绩好的学生、忽视不同程度学生需求的缺点，设计弹性更大的数学课程，使学生能根据自己的程度、兴趣和未来职业有所选择，这是课程改革现代化发展的一个重要趋势。该意见在20世纪80年代由荷兰数学教育家汉斯·弗莱登塔尔提出，之后成为世界各国数学教育的目标之一。

本章思考题

1. 确定数学课程目标的依据有哪些?

2. 从数学教育的角度来看,数学具有什么特点?

3. 比较“课程标准”与“教学大纲”的主要区别。

4.《全日制义务教育数学课程标准》的基本理念是什么? 义务教育阶段的数学课程总目标是什么?

5. 高中阶段数学课程目标是什么?

6. 研究教学目标对于数学教学有什么重要意义,请举例说明。

7. 教学目标的发展与社会发展的关系如何?

第5章 中学数学教学方法

对教师来说，人人都希望自己的教育与教学活动能高效率，但这并非易事。它涉及方方面面的诸多因素，如自己的工作能力、教育的大小环境等主客观原因，还有教育观念等主观原因。但无论如何，学习、掌握、借鉴各种优秀的教育、教学方法对教师是非常必要的。

5.1 中学数学教学方法概述

1. 教学方法的概念

什么是教学方法？当今教育家们较为一致的看法是：教学方法是为了达到教学目的，实现教学内容，运用教学手段而进行的以教师为主导、学生为主体的师生相互作用的活动。因此，教学方法一方面是师生共同进行的认知活动，另一方面，教学方法又是由一定的教学模式所组成的活动方式。对于年轻教师，对基本教学方法的学习和借鉴是不可逾越的过程，同时也是教师专业化成长的有效途径。

教学有法但无定法，教学有格（格式）但不唯格。世界上没有一种放之四海而皆准的教学方法。对任何好的教学法都不能完全照搬，而应根据实际情况，吸取合理的思想和有效的成分，创立一套符合实际的教学方法。另外，在教学中不要固守一两种教学方法，要根据不同的教学内容、不同的学生采取相应的教学方法，因材、因人施教是教学方法的唯一出发点。也就是说教学中应根据不同的教学内容和学生实际，采用不同的教学方法。

2. 教学方法的基本要素

一般来说，构成教学方法的基本要素是：读、议、讲、练、看、想、问。读是指导学生阅读教材，培养学生的自学能力；议就是让学生讨论问题，发表自己的见解；讲就是教师进行启发诱导，或学生问答问题；练就是让学生主动、独立地练习，或合作练习；看就是引导学生进行观察，培养学生的观察能力；想就是让学生独立猜想、思考问题；问就是教师或学生提出问题，揭露矛盾。根据教学中运用读、议、讲、练、看、想、问的侧重点不同，而形成不同风格的教学方法。

3. 确定数学教学方法的因素

我们知道,教是为了学,没有学的活动,教也就失去了价值和意义。因此,教学方法也就主要应围绕学来选择。另外,教师要传输给学生的是知识信息,只有当知识与原有的知识体系或认知结构发生了共鸣或被顺应、内化时,知识才被学生接受,从而形成新的认知结构,也只有这时知识对于学生才会是有意义的。教学方法的选择应考虑学生原有的认知结构状况。具体地说,在确定教学方法时,应该考虑以下的几个因素。

(1) 教学目标的因素

不管采用什么样的教学方法,教师的课堂教学总是为了达到一定的教学目标而进行的,这就意味着教学方法的确定必须服从于教学目标的要求。教学目标对确定数学教学方法的影响可分为两个层次:一是每节课的具体目标要求,二是作为教师整个教学思想重要组成部分的教学目标观念。也就是说,每一节课的教学目标制约了这节课的教学方法,如教师确定了"培养学生合作交流的能力"为某节课的教学目标,则在教学方法的选择上就要有与之相适应的方法。每一个学习单元或每一个学习阶段,教师都有一定的教学目标,因而教师将在一个较长的时间里运用某一教学方式,以达到教学目的。

(2) 教学内容的因素

任何教学方法都是通过特定的教学内容而表现出来的,也是为教学内容服务的,离开了教学内容,也就无所谓教学方法。因此确定数学教学方法就离不开作为其表现载体的教学内容的因素。

例如有些数学概念可以让学生通过探索自己获得,如概率中的中位数,众数等,有些比较适合教师讲解,如集合,函数等概念。因而教学方法就应该与此相适应。

其实无论是教学方式的选择还是教学目的的确定都要通过一定的教学内容来实现,因此,教学内容在教学过程中起了一个关键的作用,内容的选择是至关重要的。

(3) 教师的能力和学生的认知水平及学习环境因素

要取得理想的教学效果,确定教学方法时还必须考虑教学对象(学生)这一重要因素。"因材施教"原则实际上也很大程度地反映了教学对象(材)对确定教学方法(教)的重要作用。如学生的年龄特征、智力发展情况、基础知识水平、学习习惯、兴趣爱好、家庭环境对数学教学方法的选择和确定都有一定的影响。

教学方法是由教师来掌握的,教师自身的教学能力也是确定教学方法时应注意的因素。如果一名教师具有一定的学科基础知识和较强的表达能力,但比较缺乏管理班级的经验,则应考虑以教师为主的"讲授法";如果教师调控能力较强,对教学内容研究较为深透,则可以选用以学生为主的"探究法"。

教学方法的选用,应适当变更、调整,发挥各自的特长,为己所用。如何针对具体内容,合理选择教学方式,是教学设计的一项重要内容。在实际教学中,根据教学设计的方案,一方面要充分考虑数学教学内容的特点,如概念教学一般是由旧概念引出新概念,所以要根据从已知到未知的思想,采用讲解法。另一方面要努力体现教学方法的多样性,有机整合多种教学模式,以达到教学效果的最优化。

4. 数学教学模式的建构和选用原则

在一节课中,综合运用多种教学方法便构成了一个完整的教学模式。结合上述内容,我们可以得出以下教学模式的建构和选用原则。

(1) 注重教学落实,不要追求形式。因为教学方法的使用,目的是为了促进学生更有效的学习,因此,在教学模式的选择上就必须以其为基本目标,任何其他的目的都应服从这一目的。

(2) 建构和选定每种教学模式都要充分体现学生的主体性、启发性、思维性。

(3) 不同的教学模式选定,取决于不同的教学内容。

(4) 不同教学模式的选定,取决于不同层次学生的认知水平。

(5) 综合应用各种模式,整体优化教学过程。

5.2 传统的教学方法

教学方法是在长期的教学过程中不断总结完善而形成的比较固定的教学形式,经过从古到今的长期积累,目前我们已经形成了一些传统的、有效的教学方式,认识这些教学方法,对我们利用其进行教学或在其基础上形成创新的教学方法都是有利的。

5.2.1 讲授法

教师通过语言系统连贯地向学生传授知识的方法称为讲授法。这是一种最基本的教学方法,其应用广泛,是各种教学方式的基础。这一方法的特点是,教师能依据自己的理解用语言对教学内容进行解释、说明和论证。如:解释概念、论证数学公式或定理、阐明解题规律、归纳知识结构等。一般的说,任何一堂课的教学都离不开讲授法,因为许多其他教学方法的运用,常常需要讲解法的配合。

讲授法的优点在于教师有较充分的主动性,易于控制课堂教学,可使学生在较短的时间内获得较多的系统知识。许多知识只有通过教师的讲授,学生才能比较透彻地理解与掌握。通过讲授,学生不仅可以学到知识本身,还可以潜移默

化地学到教师观察问题、分析问题和解决问题的方法，提高思维能力。

讲授法也有其不足，主要在于如果运用不当，学生的积极性、主动性受到压抑。因为讲授法在充分发挥了教师主体性的同时，比较容易忽视学生的主体性，所以在运用这一方法时，要充分认识到这一问题。当然，并不是说学生不发言，就说明其主体性没有得到发挥，而是学生对教师的讲解是否真正有兴趣，换句话说，也就是教师的讲述是不是围绕学生的学习来安排的，如果是这样，那么，虽然学生没有发表意见，但是他们也能深深地被教师的讲解所吸引，主动思考教师讲解中的问题，其主体性实际上也就能得到很好的发挥。所以学生主体性的发挥，并不一定表现在学生是否有发言的机会，而在于他们是否参与了教学。

关于讲解什么，庄子指出要“判天地之美，析万物之理”。关于如何讲解，刘徽指出要“析理以辞，解体用图”。关于讲解的原则，《学记》认为讲师讲解或表达时要做到“约而达”“微攵藏”“罕譬而喻”，即要求教师的讲解或表达，语言要简约而意思通达，义理微妙而说得精湛，举少量例证而使道理明白易懂。

使用讲授法时，教师要注意讲解内容的科学性和思想性，要把握教材内容的全面性和系统性，更要抓住其中的重点、难点和关键，要注意启发学生积极思维。为此，讲授内容要符合学生的接受水平，还要善于提出富有启迪性的问题，教师所运用的语言要力求明白、准确、有条理、生动。有人归纳讲授法的佳境是：

语言形象，妙趣横生；唤起联想，深入意境；循循善诱，疏导巧引；启发思维，突出特征；深入浅出，举一反三；余味无穷，欲罢不能。

新数学教师往往觉得上课时间有余，实际上许多问题是需要教师讲透的，如果教师对概念一带而过，会给学生的理解带来很大的困难。如对于方程的表述：含有未知数的等式叫方程。如果学生仅仅知道这一概念，对解方程的帮助并不大，我们认为方程问题的本质在于找未知数，在已知的数之间建立起某种关系，这种关系是等式关系，这才是方程最为核心的部分，应该让学生理解。而要学生理解就离不开教师有效的讲解。

5.2.2 阅读法

一个人在学校中学习的时间是有限的，能在课堂中学到的知识更是十分有限的，因而课堂教学要解决的重要的问题，是培养学生学习的能力，而学习能力的重要方面是阅读能力，因此数学教学中对学生阅读能力的培养就显得十分重要。阅读法也就成为一种重要的教学方法。

其实阅读法不仅对于培养学生的阅读能力有重要意义，它也是一种十分有效的教学方法。只要不是教材中的难点，也不是例题分析型的课，估计学生有能力理解教材中的知识内涵及思想方法，这些情况下都可以让学生自己阅读。根据不同的情况，阅读的形式可以灵活一些。当然教师在阅读过程中的适当指导

也是必不可少的。

阅读形式可以多种多样。有的内容可以由学生自己通过阅读掌握，如求两曲线的交点等知识，这种阅读形式可以称为自学式阅读；有的教材内容难度较高，单靠学生阅读或但靠教师讲解都不能达到最好效果，那么可以让学生先进行预习式阅读，再由教师进行系统讲解，也就是说将阅读和讲解有机结合。

在学生阅读的过程中，发现问题和提出问题也是十分必要的，我们前面已经讨论了这一问题，这里再结合阅读进行一些具体分析。在运用阅读法进行教学时，一定要将阅读与熟悉内容区分开来。如果阅读仅仅停留在对教材内容的熟悉上，那么，是达不到培养能力的要求的，而要使阅读不仅仅停留在熟悉教材上，则就必须围绕着问题来进行阅读，或在阅读中提出问题。当然培养能力并不是一节课或短时间内能完成的，所以教师应该对阅读能力的培养有全面的考虑，逐步形成学生的提出、分析、解决问题的能力。

5.2.3 问答法(谈话法)

1. 问答法的意义

问答法是教师有计划地提出问题，或由学生针对教学内容和自己在理解或运用知识等方面进行提问，教师引导学生运用已有的经验和知识回答提出的问题，借以获得新知识，巩固旧知识或检查知识的教学方法。教师提问应该是在学生已有知识的基础上的，学生能够理解的问题，但问题有不能过于简单。问题提出以后应引导学生进行积极思维，在学生独立思考后通过合作交流对问题作出回答。

课堂中好的教学同电视中好的谈话节目一样，应以具有吸引力的内容和谈话者的个人魅力感染人，以鲜活的思想触角和自由的理念碰撞吸引人，以自然亲切的谈话方式打动人，创造一个气氛热烈、场面活跃、状态自由的谈话空间，以鲜活的思想冲破权利话语的约束。而教学中较好地运用问答法，并可形成充满智慧、充满挑战、充满热情的积极向上的氛围。

问答法可以起到传授知识、巩固知识、检查知识、活跃课堂气氛、改进教学的作用。问答法比较易于集中学生的注意力，激发积极的思维活动，加强信息的双向交流，有利于教师迅速获得反馈信息。从而调整和改善教与学的活动，提高教学效果。

问答法要求教师有较高的教学艺术水平，善于提出通俗易懂、含义明确、便于理解、前后连贯且富有启发性的问题进行诱导，并能控制整个教学过程，同时，也需要学生有一定的基础。

人们在认识事物的过程中，总是先发现了问题(矛盾)，感到解决矛盾的需求，才能引起积极思维，产生主动思考的精神。问答的过程正是揭示矛盾、解决

矛盾的过程。

教师发问前要有周密的准备。问题应明确,且必须抓住重点。对于诸如:在什么地方发问?问什么?怎样问?估计学生如何回答?对可能有误答如何加以纠正等问题,教师都要考虑周全。

教师应根据学生的反应和教学目标的要求,恰当运用提问技巧,如根据每个学生被提问均等的原则,通过提问使全体学生卷入学习。但对回答不出问题的学生应该继续启发,而不宜将问题转移到另外的学生。对于回答正确但不完整的学生,教师要给学生补充信息,使其将问题回答完整。

2. 教学用数学问题的构成

课堂教学中教师使用的问题始终是课堂教学的焦点,一般教师提问应从以下几个方面设置问题。

(1) 元认知问题。此类问题的作用在于促进思维的启动,启发学习的生成。这类问题的一般形式是"我们现在应该研究什么?"、"怎样研究?"、"你能进一步解释吗?"

(2) 开放性问题。此类问题的作用在于促进学生多角度地考虑问题,保证思维发散性。如"指数函数和对数函数有哪些关系?你打算怎样研究?"、"我们可以有哪些方法来解决目前的问题?"。

(3) 导向性问题。此类问题的作用是趋向目标,促进思维的维持。如"从前面的研究我们可以得出什么结论?"。

(4) 理解性问题。此类问题的作用是保证思维结果的合理性,保证思维的合目的性。如:"这个结论是怎样得到的呢?"、"你能把你的思路告诉我们吗?"。

(5) 唤起性问题。此类问题的作用是为后期学习准备知识基础。如"过去我们学习过函数的概念吗?是怎样的?"、"为什么要学习今天的内容?"。

(6) 判断性问题。此类问题的作用是为思维开始或维持做准备的。如"指数函数的这一性质,对应于对数函数有什么相应的性质呢?"、"上面的解答过程有什么问题吗?"。

不同类型的数学问题对促进学习者认知能力的发展所起的作用是不同的。在教学实践中,教师应结合教学目标,合理设计数学问题,并应根据问题类型特征恰当选择提问方式。

3. 鼓励学生提出问题

问答法不仅应注意教师对学生提问,同时还应注意学生对教师的提问或学生对其他同学的提问。或者说,我们更应该注意让学生提出问题。孔子曰:"疑"是"思之始,学之端"。美国教育家布鲁巴克也指出:"最精湛的教学艺术,遵循的最高准则是让学生自己提出问题。"因此鼓励学生质疑、培养学生提问,是培养学生学会学习的重要途径,也是问答法教学运用是否有成效的重要标志。

“学贵有疑”，培养学生质疑提问的意识，首先应给学生营造一个宽松、民主、和谐的学习气氛，或者说使学生感到安全，不会因为提问的情况而受到来自教师或同学的嘲笑；其次根据具体的内容，诱导学生通过观察、类比、猜想，提出概括性、置疑性、探究性或猜想性的问题，并鼓励学生去大胆地解决。另一方面，教师要善待学生提出的每个问题，学生由于正在学习的过程，所以有些问题可能会显得简单或不着边际，但能提出问题说明学生认真思考了，这就值得鼓励。

5.2.4 讨论法

1. 讨论法概述

讨论法是根据教材要求，拟定讨论课题，集体研究探讨、切磋琢磨、集思广益、共同提高的一种教学方法。

课堂讨论能充分发挥集体的智慧，各人从不同的角度、不同的侧面提出问题，各种意见得到发表与交流，使认识更全面，问题解决得更彻底。讨论中也会暴露出不少问题，便于教师抓住学生的思维脉搏，因势利导。

如教材中有些难点，特别是概念性较强、障碍较多的新知识课，通过讨论，自然会集中到那些“难点”、“障碍”上去，经过反复研究，概念及知识的获得就会比较科学且比较完整。如“曲线的切线定义”一节可以从“曲线的切线该如何定义”这一话题开始，进行讨论。

2. 教师的工作

在讨论法教学中，教师的主要工作有以下几个方面。

(1) 设计讨论的问题。问题的选取应该是贴近课程的精髓；适合于学生思考；问题难易、大小、简繁适当；能激发学生的讨论兴趣。

(2) 组织讨论过程。在讨论开始前，教师应该有具体的讨论方案，并要善于将方案顺利实施。在讨论的过程中，要善于营造学生乐于参与的氛围。

(3) 启发学生思维。在讨论的过程中，教师要通过多种多样的方式、方法、手段，启发学生的思考，启迪学生的智慧，开发学生的潜能。

(4) 引导讨论的方向。教师应该在讨论的过程中，引导学生思维和讨论的方向，指导学生在曲折中前进，让学生体会克服困难的乐趣。

上面不全面地介绍了一些教学方法。在实际教学中一般都是以某种方法为主，多种方法的综合应用，并且应该从实际出发，根据学生的特点和教学的进程，随机调整教学方法，才能取得良好的教学效果。

5.3 中学数学教学方法的改革

数学教育发展的主要趋势是各个国家的数学教育互相学习，共同发展。从

中学数学教学实际来看，我国的教学方法与西方发达国家的相比，存在着一些不同，主要表现在以下几个方面。

1. 教师与学生在教学过程中关系和作用不同

我国大部分的传统的教学方法都是以老师为中心，有“重教轻学”的倾向，在教学过程中大都是采取灌输式的教学方法，这主要是我国长期的应试教育导致的结果。尽管我国的教育改革努力向素质教育的方向发展，但由于中考、高考对学校和学生及各方面的影响仍然很大，使得大多数学校教育自觉或不自觉地滑向了题海战术、应试教育。这样的教学方法虽然有利于学生记住数学概念、数学公式，在一定程度上掌握了较深、较难的数学知识。但弊端是很明显的，它不能很好地调动学生的兴趣，束缚了学生学习的主动性。而国外特别是发达国家的教学方法重视学生自学能力的培养，注意运用探索的教学方法，注意培养学生的好奇心；多采用启发式教学方法，注重应用教育，鼓励学生发展。在教学过程中讲究自愿，学生享受学习的充分自由，学习比较轻松愉快。

数学教学中学生与老师的关系不同也造成教学气氛有明显的差异。发达国家中，老师和学生基本上是朋友关系，可以互相自由地交往、交流，教师在教学过程中起辅导提示的作用。课堂上老师有目的地让学生讨论，有时老师甚至可以别出心裁地把课堂放到野外，与学生们一起在明媚的阳光下、柔和的清风中愉悦地学习。这种教学方法能促进学生积极开动脑筋，增加对学习数学的快乐，减轻学生压力，造成欢快的教学气氛。但我国学生长期以来处于严格的课堂管理中，强调教室、强调自己的座位，老师也不敢放开，担心过分放松，会造成课堂上活泼有余、严肃不足和自由散漫的混乱场面，因为学习到底不是娱乐。同时由于我国传统思想习惯的影响，在教学过程中教师往往过分严肃，学生过分紧张，再加上数学不同于文科，故事性的内容少，容易使学生失去学习的兴趣，学生很容易感到疲惫懈怠，致使一部分学生特别是后进生把学习数学当成是服“若役”。

2. 对培养能力与个性发展的重视程度不同

在发达国家中强调个性的培养，鼓励学生自由发展，因而分层次个体教学方法使用得比较多。强调自学，注重因材施教，能较好地培养学生自学能力，满足不同学生学习的需要。但这样的教学方法也存在一定的弊端，如教师的主动讲解相对比较少，对学生的帮助和影响的机会也就比较少，也使学生很少接触到课本以外的数学知识，影响学生的社会化。我国一般采用的教学方法大多是集中型的统一的教学。这样的教学方法虽然有利于学生系统地掌握知识，有利于教师全面考虑、统筹安排，教师易于把握节奏。但是容易造成优差生的严重分化，教学没有针对性，不利于因材施教，也容易忽视个性的差异。

在国外的数学教学中，注重对学生的了解和沟通。如美国一些学校使用的教学日记法，学生以日记的形式记录教学中的思维过程、心理状况，使学生与教

师能经常通过日记进行交谈,教师易于了解学生的认知水平、知识经验、兴趣及个人思维风格等非智力因素的个体差异,教师能从学生的这些资料中综合出各种学生的成就抱负水平、焦虑水平、意志水平,从而设计出教学方案,提高教学水平。而我国教师过分注重智力因素,相对忽视了非智力因素,教师和学生的交流少,自然而然在他们之间形成隔膜,老师对学生的心理、情感、动机、兴趣难以了解,无法得到反馈,学生的焦虑、交际需要等得不到及时的满足。容易使学生学习积极性不高,也容易使教师的教学增加盲目性。

3. 培养学生的数学意识与应用数学教育的思想存在差异

国外的教学方法一般注意培养学生的数学意识。重视应用数学教育,具体反映在注重数学与日常生活的联系,数学教学中采用的例子尽量来源于现实生活。如日本的 CRM 教学法(复合的现实数学教学法),在教学过程中选取一些学生熟悉的事物,针对其中所包含的数学知识进行讨论和探索,最后得出结论。这种教学方法深化了学生对数学知识的理解,有利于培养他们用数学眼光看问题和建构数学模型的意识,有利于培养学生用数学方法解决实际问题的能力,学生毕业后能较好地适应社会的需要。当然如果过分地联系难免牵强附会。我国的教育目标虽然理论上也重视应用教育,但由于没有与之协调的教学方法,因而在教学中落不到实处,教学基本上是从数学本身的结构出发培养学生的数学素质,造成曲高和寡的情形。

4. 教学中使用的工具和教学媒体存在着差异

国外特别是一些发达国家,由于经济和科技发达,直观教学手段有了极大提高,计算机辅助教学及各类教学媒体普遍被使用。随着我国教育的改革,中国也力争改善教学手段,如多媒体教学,但由于观念、经济、科技及教师状况等方面的原因,多媒体的普及还没有实现。对于多媒体辅助教学,其优势是直观、形象、容易吸引学生的注意力,但过多使用,对培养学生的思维能力和想象能力也存在不利因素。

上述比较我们发现,我国的数学教育在方法上虽然有优势,但也存在明显的不足,因而不断的完善和发展教学方法应该成为教育改革的重要内容。为了在保持我国优势的基础上学习先进的教学方法,当前,我国中学数学在教学方法上进行了多次改革,并取得了一定的成效,以下介绍几种教学方法。

5.3.1 开放题教学与开放性教学

随着时代的发展,对创新人才的培养提出了迫切的要求,自尊、自强、自信,不盲从权威,不迷信书本是这种人才的基本特征。数学开放题的教学有利于激发学生的好奇心和求知欲,为学生主动地学习和独立人格的培养创造了条件。

1996 年 2 月,“开放题——数学教学的新模式”立项为全国“九五”规划重

点课题，以戴再平教授为首的部分学者，集中对开放题及其教学进行了研究，这里对这项研究成果进行简单地介绍。

1. 国际国内研究概况

(1) 国际情况简介

“数学开放题”作为一个特定研究项目，是在20世纪的下半叶形成的，当人们对数学教育中培养学生的自主性和创新精神有更高要求时，才引起人们的注意的。

1971年，在日本以岛田茂为首的一个学者小组接受了文部省的一个特定研究项目：“开发算术。数学科学的更高的评价方法”。在这个项目的研究中，该小组提出了数学开放题(opened problem)的概念。在当时，对开放题的研究只是为了证实其可以作为更高目标的一种评价手段。但随着研究的深入，开放题教学逐渐转为课堂教学的新模式。人们开始注意到开放式教学具有很大的教育价值，主张通过开放题来丰富课堂教学过程，使数学课堂教学得以改善。20余年来日本的研究没有间断。日本的研究前期以未完结问题(open-ended problem)为重点积极利用答案的多样性来开展课堂教学，整合已学过的知识、技能和思考方法，然后去发现新的知识。开发了几类问题，这里介绍一类，即数值化问题。

常见的数值化问题有在一定的情景下求数据，如投石问题：A，B，C三人做投石的游戏，结果如图5.1，这个游戏是以石子离散的程度最小者为优胜，请想一想怎样用“数”来表示这个“散度”，然后确定优胜者。(每个矩形中五个点代表石子)

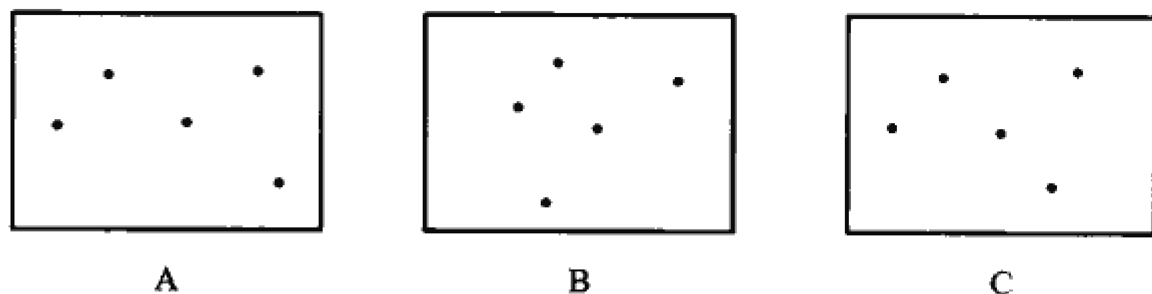


图5.1　投石游戏示意图

这个问题的核心是如何确定散度，但题中并没有说明什么叫散度。确定散度的方法可能有：

联结五点的多边形面积

联结五点的多边形周长

联结任意两点的线段长度的最大值

联结任意两点的所有线段长度的和

覆盖5点的最小圆的半径

每两点之间距离的标准差

……

这个问题的优点在于，学生在解题过程中可以有以下一些收获。首先，由于解决问题的关键是给散度适当的定义，也就是说建立概念，在这一过程中，学生体验了数学概念对解决数学问题的重要意义；另外，由于给出概念的定义可以不一样，使结论产生差异，由此不仅可以使学生认识问题对概念的依赖性，还能使学生对问题优化，即寻找一个公认为适当的定义。这其实就可以使学生体验研究数学的基本方法，也可以使学生领会数学的演绎性特点。数学研究对概念的依赖性特点，即无论前提（这里是定义）是否正确，只要承认了前提，就必须承认由前提得出的结论。本题还有一个显著的优点就是，无论怎样程度的学生对这一问题都可以作出解答。这些优点其实就是一个优秀的开放题所应努力体现的特点。

日本学者的研究工作，对美国、欧洲和其他一些国家的数学教育也产生了广泛的影响。美国的数学教育一般的说比较注意学生的个性的发展，他们对数学开放题的研究是从问题解决开始的。1980 年，美国全国数学教师理事会（NTCM）就提出了"问题解决是数学教学的核心"的口号。在这个口号下，要求教师创造一种使问题解决得以蓬勃发展的课堂环境。在这一过程中，一些被认为是"好"的数学问题，有许多就是开放题。

1985 年，美国著名学者舍费尔德（Schoenfeld A）在《数学问题解决》《Mathematical Problem Soving》一书中论述了"发现式解题策略"，提出解决非常规、非标准的问题的一些策略与技巧，如：

设想问题已经解决，由此逆推思考，能得出哪些结论，这些结论与问题的解决有怎样的联系；

将问题置于某种特殊情况下求解，由此也许可得出一般情况时的解法；如果原题难以解决，不妨先去解决一个只满足一部分条件的过渡性问题，以此为基础再去解决原题；

选择几个特殊值，获得对问题的初步印象，然后做进一步探讨；

这些策略和技巧都与解数学开放题有密切关系。

（2）我国的研究情况

首先使开放题材进入中学数学课堂试验，是 1993 年在浙江省的几个初中进行的，试验的题目共三题，其中有一题是钟面数值问题：

钟面上有 1，2，3，…，11，12 共十二个数，请在某些数的前面添上负号，使钟面上的所有的数的和为零。

这一问题也有许多优点，首先任何水平的学生都可以用自己的方式解决这一问题，但却可以在解决问题的过程中产生差异，另外这一问题的答案也很多。

开放题试验的结果是极其令人振奋的，"学生的思维是相当活跃的"。近十

年来，数学开放题作为一个具有时代特色的数学教育改革亮点，已日益引起我国数学教育界的关注，逐渐成为数学教学改革的一个热点。“钟面问题”也成为我国的数学名题。目前有许多数学教师将开放题的教学引入课堂教学，创造了许多优秀的开放题，形成数学教学的新模式。

2. 开放性教学

开放性教学是创新教学的一种模式，其宗旨是通过开放性问题的解决，促进学生的自主活动和积极思考，从而使学生的知识与技能、思想与方法、兴趣和爱好等得到和谐发展。采用这种教学模式的关键是设计出系列的探索性问题，让学生多方面寻求答案，解决疑问，并从中发现、提出和解决问题，使探究活动不断走向深入。如下例。

例 平面向量开放式探索课的设计：

教学设计的过程和设计

基本素材：已知向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$ 满足：$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=0$，$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|=1$。

开放设计 1 你能得出什么结论？并如何加以解决？

学生初探可以得出以下一些结论：(1) 向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$ 均为单位向量，且任意两个向量的和与另一个向量是互为相反向量；(2) O 是 $\Delta P_1P_2P_3$ 的外心；(3) 向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$ 的两两夹角都相等；(4) 向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$ 的大小均相等。

教师呼应：教师向大家出示的结论与学生得出的(3)，(4) 相似，即 $\Delta P_1P_2P_3$ 是正三角形。

开放设计 2 有哪些方法可以证明这一结论？(学生交流)

思路 1 从数量积入手，求向量的夹角。

由
$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OP_3},$$
得
$$(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})^2=\overrightarrow{OP_3}^2.$$

设向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$ 的夹角为 θ，

则
$$2+2\cos\theta=1,\quad \cos\theta=-\frac{1}{2},\quad \theta=120°.$$

同理可得向量 $\overrightarrow{OP_2}$ 与 $\overrightarrow{OP_3}$，$\overrightarrow{OP_3}$ 与 $\overrightarrow{OP_1}$ 的夹角均为 120°，故 $\Delta P_1P_2P_3$ 是正三角形。

思路 2 从消元法入手，求向量的大小。

由
$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OP_3}$$

得 $$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}|=1,$$

而 $$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_3},$$

故 $$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2=(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_3})^2$$

$$=\overrightarrow{OP_2}^2-2\overrightarrow{OP_2}\,\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_1}^2$$

$$=2(\overrightarrow{OP_2}^2+\overrightarrow{OP_1}^2)-(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})^2$$

$$=2(1+1)-1=3.$$

于是 $$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{3}.$$

同理可得 $$|\overrightarrow{P_2P_3}|=|\overrightarrow{P_3P_1}|=\sqrt{3},$$

故 $\Delta P_1P_2P_3$ 是正三角形。

还可以从几何,坐标等方面入手进行证明。

开放设计3 你能以上述问题为出发点,通过变式、引升或拓展,提出一些探索性问题吗?(学生分组讨论再交流)

探索1 把题设中第二个条件变为 $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|=r(r>0)$,结论是否成立?

研究 把1改为 r,不影响证题的结论,只是正三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 的边长变为 $\sqrt{3}r$。

探索2(逆向引申) 已知向量 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$ 满足 $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|=1$, $\Delta P_1P_2P_3$ 是正三角形,则

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=0.$$

研究 由于 $\Delta P_1P_2P_3$ 是正三角形,由题意 O 为其外心,故必为其重心,于是该命题成立。同理可证明,若 $\Delta P_1P_2P_3$ 是正三角形, $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=0$,则

$$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|.$$

探索3(升维拓展) 已知向量 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$, $\overrightarrow{OP_4}$ 满足 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}=0$, $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|=|\overrightarrow{OP_4}|=1$, P_1,P_2,P_3,P_4 构成凸四边形,则四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为正方形。

研究 增加一个向量后,无论从数与形哪个角度,都很难证明结论,于是提出质疑:该命题是真命题吗?通过构造发现:以 O 为原点的单位圆其内接矩形均符合题设,但结论未必成立。

反思猜想 四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 是否一定为矩形?

研究分析 由 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=-(\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4})$

得
$$(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})^2=(\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4})^2,$$
$$\overrightarrow{OP_2}^2+2\overrightarrow{OP_2}\,\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_1}^2=\overrightarrow{OP_3}^2+2\overrightarrow{OP_3}\,\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_4}^2,$$
$$2(\overrightarrow{OP_1}^2+\overrightarrow{OP_2}^2)-(\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_2})^2=2(\overrightarrow{OP_3}^2+\overrightarrow{OP_4}^2)-(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_4})^2$$

于是
$$|\overrightarrow{P_2P_1}|^2=|\overrightarrow{P_4P_3}|^2,$$

即
$$|\overrightarrow{P_2P_1}|=|\overrightarrow{P_4P_3}|.$$

同理 $|\overrightarrow{P_3P_2}|=|\overrightarrow{P_4P_1}|$，$|\overrightarrow{P_3P_1}|=|\overrightarrow{P_4P_2}|$。故四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 是矩形。

还有一些其他的探索。

开放设计 4 课后请你收集一些以该题为背景的数学问题和物理问题，并做解释。

开放式教学与开放题不同之处就在于，开放教学是有一系列问题构成，而每一个又有一定程度的开放性。开放式教学的目标应是：充分尊重学生的主体地位，通过数学教学，在获取数学知识的同时，让学生主动学习并自行获取数学知识的方法，学习主动参与数学实践的本领，进而获得终身受用的数学能力、创造能力和社会活动能力；在教学中，设计不同的问题，让学生能够按各自不同的目的、不同的选择、不同的能力、不同的兴趣选择不同的数学并得到发展，能力较强者能够积极参与数学活动，有进一步的发展机会；能力较低者也能参与数学活动，完成几项特殊的任务。这个过程体现了教学目标的多元整合性，使学生可以全面发展。

5.3.2 案例教学法

1. 案例教学的内涵

“案例教学”(case methods of teaching)就是运用“案例”开展教学的一种方法。那么，什么是“案例”呢？简单地说，一个案例就是一个实际情境的描述，在这个情境中，包含有一个或多个疑难问题，同时也可能包含有解决这些问题的方法。数学案例教学是运用数学教学案例作为典型引路，启发学习者创造性地思考一些问题。数学教学案例具有三个基本特性：客观性、典型性、有效性。

在西方，“案例教学”最先运用于哈佛大学的法学院，大约在 1870 年，到 1910 年所有的居于领衔地位的法学院都使用案例方法教学。在基础教育界得到运用和发展大概是 20 世纪 70 年代以后的事情了。案例教学的较好实施，可以使学生在教师的科学指导下，通过能动的创造性学习活动，实现自主精神的充分发挥。

2. 案例教学的实施方案

(1) 案例的编写

案例的编写是数学课堂教学实施“案例教学”的基础和前提。它必须具备以下三个方面的内容:标题、正文、提出问题。

需要指出的是,编写的每一个案例都必须带有问题。但是,问题的表现形式可以是明确的,也可以是隐蔽的,没有问题的案例在教学中的作用是很小的。

(2) 案例教学的实施过程

案例教学的实施过程可以概括为:精选案例——呈现案例——分析讨论——总结评述。

3. “案例教学”一例

案例

孰 是 孰 非

甲、乙、丙、丁四位同学是好朋友,他们经常在一起讨论学习问题。有一次他们为了一道练习题争得面红耳赤。这道题是这样的:

对于函数 $y=f(x)$,若满足 $f(x-1)=f(1-x)$,则 $y=f(x)$ 的图像:

A 关于直线 $x=0$ 对称;

B 关于直线 $x=1$ 对称;

C 关于直线 $x=-1$ 对称;

D 以上结论都正确。

四位同学各自用自己的解法,得到了四种不同的结果:

甲(换元法):令 $t=x-1$,则 $f(t)=f(-t)$。显然 $f(t)$ 为偶函数,所以 $f(t)$ 的对称轴为 $t=0$,由 $t=x-1$ 可以知道,$t=0$ 时,有 $x=1$,所以,函数关于 $x=1$ 对称。故选 B。

乙(换元法):令 $t=x-1$,则 $f(x)=f(t+1)$,由 $f(t)=f(-t)$,知 $f(t)$ 为偶函数,$f(t)$ 的对称轴为 $t=0$,所以 $f(t+1)$ 的对称轴为 $t=0-1$,因为 $f(x)=f(t+1)$,所以,$f(t)$ 的对称轴就是 $f(t+1)$ 的对称轴。把 $t=x-1$ 中的 t 换成 x,得 $x=-1$,所以,函数关于 $x=-1$ 对称。故选 C。

丙(图像法):因为 $f(x-1)=f(1-x)$,所以,从 $f(x)$ 的图像,可以想象出 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{(x-1)+(1-x)}{2}=0$,故选 A。

丁(特例):令 $f(x)=1$,显然满足 $f(x-1)=f(1-x)$,而 $f(x)=1$ 的对称轴有无数多条。故选 D。

到底谁的答案对呢?

学生通过教师给出的案例,经过研究和分析,可以加深对知识的理解,也可以避免一些错误的发生,还能提高运用知识解决问题的能力。因此,一个好的案例,教学收益是多方面的。

4. 案例教学的特点

(1) 案例教学有利于激发学生对数学学习的浓厚兴趣

案例来自生动的数学实践,有情节、有细节,易引发学生的探究心理,形成多种认知矛盾,使学生在学习过程中成为活动的主体,展开独立的学习活动,进行相互之间观点的交流、切磋和争鸣,取长补短,相互促进提高,发挥集体教学对学生个体的促进作用。"学习并不能被看成孤立的个体行为,而是"学习共同体"的共同行为,在成功的案例教学中常出现踊跃发言,展开激烈讨论,这是常规教学鲜有的现象。

(2) 案例教学有利于提高学生分析问题和解决问题的能力

根据美国著名心理学家马斯洛的著作《人的动机理论》(1943)我们知道,一个人的心理一旦形成了"自我实现需要",就会为实现自己需要的满足而努力开发自己的潜能,就会想方设法置疑释疑,使自己分析问题和解决问题的能力得到提高。案例教学是一种动态的开放式的教学方式,由于案例与学生的学习状况有直接的联系,又是学生容易忽视的问题,所以比较容易使学生产生"这样有问题吗?"之类的"惑",从而形成要对问题弄清楚的需要,也就是形成"自我实现"的需要。

(3) 案例教学有利于促进学生学会沟通与合作

现代科学技术的发展都是人们合作探索的结果。社会人文精神的弘扬也把乐于合作、善于合作作为重要的基石。案例教学的过程需要经过小组、集体合作思维的撞击,在合作中互相沟通,在沟通中增进合作,从而学会尊重他人,关心他人。

(4) 案例教学有利于培养学生的综合素质

案例教学改变了单一通道的知识传递方式,使学生的学习有了更大的自主发挥空间,师生之间有了更多的信息传输、情感交流和意向沟通。在案例学习中学生不仅需要理解,还需要表达和交流,有利于形成一个和谐的教学环境,这对于培养学生健康的学习心理和个体综合素质有着很大的作用。

(5) 案例教学有利于实现教与学的统一

数学教学是教师与学生围绕着数学教材这一"教学文本"进行对话的过程。在教学过程中,教与学是不能分离的,教学需要"沟通"和"合作"。这说明真正的教学最明显的表征是师生互动,教学相长。让学生参与学习过程,教师负有引导的责任。如何让学生进入问题情境,使用案例是有效的方法之一,因为案例提供了广阔的问题情景和自由的思考空间,学生对问题的思考有较大的发挥余地,能较好地体现学生的主体作用,尤其是探究性案例。

需要指出的是,案例教学也有一定的局限性。这是由于案例教学主要体现阅读、思考、交流等认知活动,也有兴趣、情趣、意志等非认知活动。兴奋、愉悦或

冷淡、厌倦、不安等非认知因素时常伴随着认知过程并对案例教学产生制约作用。如实施案例教学初期,由于案例教学本身的独特的活动方式常引起学生浓厚的学习兴趣,产生一种新颖感,获得愉悦的情绪体验,因而能获得理想的教学效果,但是,随着案例教学的持续进行,不断要求学生研读案例材料,进行紧张的思维活动,参与集体的交流,易使学生产生一种外在的压力,从而诱发对案例教学的厌倦心理。故案例教学方法应与其他教学方法互相配合使用,互相取长补短、相辅相成,才能取得较好的教学效果。

5.3.3 问题解决教学

20 世纪 80 年代以来,问题解决已成为国际数学教育的一种潮流。由于它的研究与开发不仅关系到如何提高学生的科学文化素质、思想品德素质和教学质量问题,而且也与中小学数学教学内容、课程设置、教材教法、教学模式等各项改革密切相关,是一个领域广阔的研究阵地,所以受到国内外许多研究机构、专家、学者及广大教师的普遍关注。对于什么是问题解决,也有一些不同的观点和看法。1988 年发表的美国《21 世纪的数学基础》认为,问题解决是把前面学到的知识用到新的和不熟悉的情境中的过程,而学习数学的主要目的在于问题解决。最近二十年来,世界上几乎所有的国家都把提高学生的问题解决能力作为数学教学的重要目的之一。英国 1982 年的 Cockcroft 报告认为问题解决是那种把数学用之于各种情况的能力,并针对当时英国教育界的情况,呼吁教师要把"问题解决"的活动形式看作教或学的类型,看作课程论的重要组成部分而不应当将其看成课程附加的东西。不论是教学过程,还是教学目的,也不论是教学方法,还是教学内容,作为国际数学教育的核心和数学教育改革的一种新趋势,数学问题解决已成为当前数学教育研究的重要课题。

问题解决教学模式,是按照美国教育学家布鲁纳针对学生好奇、好问、好动的心理特点提出的教学理论基础而创立的教学模式。这种教学模式的特点是有利于学生独立思考和收集、处理有关信息能力的培养,有利于体现学生的主体地位及研究问题的方法,有利于激发学生学习数学的兴趣。

问题解决教学方法的使用关键是具有一个问题情境,并由此情境产生一个或一系列问题,而所谓问题,应该是对人具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法能直接解决的。问题解决中的"问题"是具有相对性的,而问题要对学生本人构成问题,必须满足三个条件:(1) 可接受性。指学生能够接受这个问题,还可表现出学生对该问题的兴趣。(2) 障碍性。即学生一时很难看出问题的解法、程序和答案,表现出对问题的反应和处理的习惯模式的失败。(3) 探索性。指问题能促使学生深入地研究和进一步的思考,展开各种探究活动,寻求新的解题途径,探求新的处理方法。

问题解决的教学模式的基本程序是:创设情景—发现问题—猜测归纳—论证结论—运用结论。

5.3.4 MM教育方式

1. MM教育方式简介

MM教学方式,即数学方法论(mathematical methodology)的教学方式,它是1989年无锡市教科所徐沥泉先生设计的《贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质》的实验所产生的数学方法论的教育方式,简称MM教育方式。MM教育方式就是,教师遵循数学方法论的基本原理,遵循学生身心发展和基本规律,促使教学、学习、研究三者同步发展的一种教学方式。在运用MM教学方式时,教师在数学教学的全过程中,必须充分发挥数学教育的两个功能,自觉地遵循两条基本原则,瞄准三项具体目标,恰当地操作8个变量(运用八项教学措施),从而达到全面提高学生素质的目的。

所谓"两个功能"就是技术教育功能、文化教育功能;所谓"两条基本原则"既是教证明,又教猜想原则和教学、学习、研究同步协调原则;所谓"三项具体目标",就是引导学生自我增进一般科学素养,自我提高社会文化修养,自我形成和发展数学品质;所谓"八个变量"(八项教学措施),就是数学返璞归真教育,数学审美教育,数学发现法教育,数学家人品教育,数学史志教育,合情推理教学,演绎推理教学和一般解题方法的教学。

"MM教学方式"的核心是"既教证明,又教猜想,使学生每节课都有所发现、有所创新"。

2. MM教育方式的特点

(1) MM教育方式具有明确的数学特色,是数学教学所特有的教育方式;

(2) MM教育方式具有非模式性;

(3) MM教育方式具有可行性。

其实MM教学方式的基本思想就是按照数学发展的本来面目来设计教学,使学生体验发现和创新的乐趣。如学生在学习了指数函数的知识以后,便继续学习对数函数的相关知识。在教学中教师比较常见的教学方式是复习引导、逐步分析、层层递进的方式。如许多教师会在充分复习了指数函数的概念和性质之后,便设置问题"那么指数函数的反函数是什么?",进一步以"这就是我们今天要研究的问题"开始研究对数函数。其实这样设计具有明显的优势,那就是学生一开始就能够通过与指数函数的对比来研究对数函数,使知识具有系统性和条理性。但这样的设计也有不足,也就是限制了学生的思维,学生难以体验发现问题的乐趣。有的教师对教学设计进行了一些变化,先提出问题"我们学习了指数函数和反函数的知识,那么,我们能不能研究指数函数的反函数的问题

呢?"这样的问题比较符合 MM 教学方法的基本思想,也就是说使问题出现更自然,更符合数学的基本思想方法。

5.3.5 课题探究式教学

作为一种在教师指导下,以学生自主探究为主的教与学的方式,探究教学由来已久。它的思想渊源可追溯到孔子和苏格拉底的教学思想中。而明确把"探究学习"作为一种教学方式的则是美国生物学家、课程专家、芝加哥大学教授施瓦布。他认为探究教学是指这样一种教学活动:儿童通过自主地参与知识的获得过程,掌握研究自然所必需的探究能力,同时形成认识自然的基础——科学概念,进而培养探索世界的积极态度。我国学者也有类似的定义,如"所谓探究教学,就是为儿童提供真实的问题情境,让儿童通过探究事物、现象和观点而自主地获得科学知识并形成探究技能和态度的过程","探究教学是指在教师指导下学生运用探究的方法进行学习,主动获取知识,发展能力的实践活动",以及"探究教学是指学生在教师的指导下,以类似科学研究的方式去获取知识和运用知识的学习方式"等等。

尽管对于探究教学的含义,不同的人有不同的看法,但都包含两个方面的要义:一是必须有教师的指导——教师提供必要的专业引领,使学生在探究中有明确的方向;二是以学生的"学"或"探究"为主——学生自主去思考、探究,而不是被教师直接引向问题的答案。

数学课题探究教学则是在教师指导下,围绕某一课题,学生运用探究的方法主动获取知识,发展能力的实践活动。其目的是让学生在学习数学知识的同时,掌握知识间的内在逻辑联系,从而对本学科有一个全面、系统的理解,培养科学精神和态度,逐步形成独立、能动地解决数学问题的能力①。

1. 数学课题探究教学的特征

(1) 面向全体学生,提高科学素养

探究教学的根本目的不在于把少数学生培养成为尖子和精英,而是面向全体学生,使每一个学生都成为有科学素养的公民。科学素养包括科学知识、科学方法、科学态度、科学精神。探究教学就是要求学生自己动手去做,自己动脑去思考。学生在参与探究的过程中既学习了科学知识,又养成了主动、积极的科学态度和科学精神。这样,在探究教学中,逐渐发展学生的观察能力、建立假设的能力、推理和预测的能力,从而提高科学研究的能力。

(2) 结果与过程并重

传统教学特别注意结果,在很大程度上忽视了知识获得的过程。探究数学

---

① 何李来,等.论数学课题探究教学.课程·教材·教法(京)2005.3

则注重知识获得的过程,把学习方法和思维的训练放在首位。

(3) 重视学以致用

探究教学尤其注重发展学生运用科学知识解决实际问题的能力。美国教育心理学家加涅把学习分为8个层次,其中最后3个层次分别是:① 概念学习,即通过概念来了解事物的本质;② 规则学习,即懂得概念与概念之间的联系;③ 问题解决学习,即运用概念和规则来解决问题。探究教学非常注重这后3个层次的学习,尤其是问题解决。这是它与一般的知识、技能学习的根本区别之一。与一般的掌握知识、解答问题的学习活动相比,它更符合人们的生活和社会的实际需要,因而有利于提高学生学以致用的本领。

(4) 学生独自学习为主

在探究教学中,教师不再是传统的"传道、授业、解惑"的知识传授者和管理者,而是学生进行探究学习的促进者和合作者。作为促进者,教师的主要任务是把握正确的探究方向,激励学生勇于探索和创造的动机,引导学生进行探究。当然,教师要根据每个学生的特点进行不同的指导和引导。而作为合作者,教师要自觉地把自己当做学习团体中的一员,与学生一起共同学习、探索和讨论。

学生作为具有创造能力的学习社会中的主体,教师应充分信任他们,相信他们在一定程度上有能力进行自主地探索和研究。因此,探究教学非常注重培养学生的主体意识,充分发挥他们的主动性和积极性,把探索和研究深入下去。

(5) 注重发展性评价

传统教学评价注重标准化测试。这种评价方式过分强调学习和思维方式的统一性,压抑了个性,不利于学生创造能力的培养。而探究教学则强调评价的开放性与多元化,即更注重发展性评价。它在评价的方式和评价的标准上都是开放的、多元的。它既重视正式评价,也注重非正式评价,如小组内评价、小组间互评、学生自评等。在评价标准上,考虑到学生的个体差异,则采用多层次的评价标准,从而使评价标准具有弹性化、人性化的特征。

2. 数学课题探究教学的基本环节

探究是科学的本质特征之一,没有探究就不会有发现。作为中学生,一般不可能达到真正意义的探究,因而实施课题探究的重心就在于诱导学生发现数学规律的意识。

数学课题探究教学的关键在于让学生独立自主地学习,强调个人独立学习活动,教师加以引导,师生共同探究教学规律、原理。其基本教学程序可以总结如下:

(1) 创设情境,提出课题;

(2) 引出假设或猜想;

(3) 实验探究,验证、论证;

（4）归纳结论，应用提高。

例如，有教师在讲一次函数时，选了这样的例题，大拇指与小拇指尽量张开时，两指尖距离称为指距，某次实验得出如下一组数据。

指距：d(cm)	19	20	21	22	23
身高：h(cm)	151	160	169	178	187

（1）求出 h 与 d 之间的函数关系式；

（2）某人身高为 196 cm，他的指距是多少？

先启发学生在直角坐标系中描出（19，151）、（20，160）、（21，169）、（22，178）、（23，187）这五个点，让学生发现这五点在这一条直线上，从而根据图像建模，确定为一次函数，再按一次函数的模式很快求出结果[①]。

从这样的教学过程，学生不仅将问题经过探究解决了，而且对函数模型的意义也有较多的了解，并经历了运用数学解决问题的全过程.

5.4 当前数学教学模式的发展趋势

当前，数学教学模式的发展受到数学教学理论、教学手段、社会因素等各方面的影响和制约。从教学理论层面上来看，认知学习理论、建构主义学习理论在一定程度上取代了行为主义学习理论；从教育技术和手段上来看，现代教育技术的发展成为改革传统教学模式的突破口，为人们从教育观念上注重素质教育，实现教育理想，提供了必要的条件；从社会因素方面来看，目前为了推进素质教育，培养学生的创新才能，进行了大规模的课程、教材、教学模式和教学方法的改革，在教学中强调教学的基础性、实践性和创造性，建立适应素质教育要求的课程体系，编制适应素质教育和创新人才培养需要的新型教材。目前对数学课堂教学模式的发展呈现以下的趋势。

5.4.1 教学模式理论基础的进一步加强

现代数学教学模式的发展已经由经验归纳型向理论演绎型与实验归纳、整合型发展，其理论基础进一步加强。

首先，随着教学论的发展，教学模式与心理学越来越密切，人们知识到教学过程要按学生心理能力的自然发展来安排，把发展学生的个性心理素质和非智力因素作为教学的一条基本原则。

中学生数学心理素质的构成包括两个方面：以思维为核心的认知素质和以情感为核心的情意素质。而后者是学生学习数学的内趋力，师生情感交流是培

① http://www.ls910.com/lunwen/200708/5166.html

养学生数学兴趣的基础,学生对数学学习的兴趣是数学情意素质的重要内容。

其次,现代数学哲学对数学的认识不断深入,逻辑主义、直觉主义、结构主义以及文化观下的数学哲学观等对数学教学模式产生了最为直接的、根本的影响,每一位数学教师在教学实践过程中,都不知不觉地受到一种数学观念的支配。这就是说,从深层次上对每一位教师所从事的教学活动进行考察,都与他们对数学的认识紧密相连。

现代数学哲学的研究,特别是文化观的数学哲学观、数学方法论的研究有力地推动数学教学模式的发展,数学思想方法(MM)教学模式就是其典型产物。

5.4.2 更突出学生在教学中的主体地位

建构主义的数学学习观的基本要点是,数学学习不应被看成是学生对教师所传授知识的被动接受,而是一个以学生以自身已有知识经验为基础的主动建构过程,并且这种建构是在学校特定的教学环境中,在教师的直接指导下进行的。即学生并不是学习个体获得越来越多的外部信息的过程,而是学到越来越多有关认识事物的程序,即建构了新的认知图式。对于新型数学教学模式的建构,其着眼点不是关心学习者"知道了什么",而是更多地关心学习者是"怎样知道的"。

更为进一步的建构主义观点认为,数学学习主要不是通过教师教会的,而是学习者在一定的社会文化背景和情境下,利用必要的学习资源,通过与其他人的协商、交流、合作和本人进行意义建构方式主动获得的。建构主义的教学观成为构建新型教学模式的基本理念,这就使得教学过程中的诸多因素的关系发生了转变,学生成为学习过程的发现者、探究者和创造者,教学过程由讲授说明的进程转变为通过情境创设、问题探究、协作学习、意义建构等以学生为主体的过程,反应在教学模式中就是由"教师为中心"向"教师为主导,学生为主体"转变。

5.4.3 现代教育技术成为改革传统教学模式的突破口

有效地应用现代教育技术,并充分发挥其优势,是进行数学教学改革的突破口,这是因为以下两个方面的原因。

首先,现代教育技术的一个很大优势是教学信息显示的多媒体化。学校、教室和书本不再是学生获得知识的唯一渠道,"师之所存,道之所存"的传统教育时空扩延至校外、家庭、社会。教学信息显示的方式也多样化。

其次,利用多媒体技术可以使学生学习数学的自主性加强,学生面对各种资源,可以根据个人爱好兴趣的需要来择录信息。现代教育技术的优势将十分有利因材施教,有利于学生个性发展。

5.4.4 教学模式将由单一化趋向多样化、综合化

传统的教学模式有利于学生系统地掌握数学知识，而新的教学模式注重数学思想方法的教学以及学生的自由创新、个性发展与能力的培养。两者各有利弊，由单一化向多样化发展是现代教学模式发展的一个明显的趋势，不存在唯一正确的教学模式，要克服教学模式的单一倾向，提倡多种教学模式的互补融合。

5.4.5 体现素质教育、创新能力培养的总目标

当前数学教学模式综合化发展不仅体现在多种模式的综合上，而且体现在实施目标的全方位上。数学是基础教育的主干课程，数学教育要为全面提高学生的整体素质的总体目标服务，立足于让学生全面发展、全体发展和个性发展。面向21世纪教育的四大支柱，就是要培养学生学会四种本领，通常可以用四个L来表示：一是学会认识(learning to know)，即学会发现问题、探究知识、建构知识、掌握终身学习的本领；二是学会做事(learning to do)，即要学会实践，更要学会创造；三是学会合作(learning to live together)，要培养学生学会与他人共同生活，倡导合作化学习；四是学会生存(learning to be)，学会生活，学会自身的发展。

现代数学教育模式更关心知识的形成过程、数学思想方法、创新意识及潜能的开发，注重学习方法、实际应用能力的培养，"问题解决"教学模式、开放性问题教学、研究性学习越来越受到重视。

5.5 新课程强调的几种学习方式

新一轮课程改革的核心是改善学生的学习方式、教师的教学方式和评价方式。在2000—2010年国家课程改革的纲要中提出"改革过分传授知识的倾向，强调课程要促进每个学生的发展，培养良好的品德和终身学习的愿望。""改革过分注重接受学习、机械记忆、被动模仿的倾向，引导学生主动参与、学会合作，做学习的主人。"由此可见，在课程改革中，学生主体性的发展成为改革的重心。①

课程改革强调教学方法不仅仅是指"教"的方法，而且包括"学"的方法，教是为了学，因此从这个意义上说，我们更应该强调学的方法，新的基础课程改革，提出了一些学的方法，自主学习、合作学习、研究性学习是当前新课程改革强调的三种学习方式，也是当今世界学习研究的重要课题。倡行这三种学习方式的

---

① 綦春霞. 数学课程论与数学课程教材改革. 北京：北京师范大学出版社，2001.12(86).

目的在于改变传统的以教师为中心、以课堂为中心和以书本为中心的局面,促进学生自主、协作、创新意识以及实践能力的发展。

5.5.1 自主学习

1. 自主学习的实质

我国学者一般认为,自主学习是指学生自己主宰自己的学习,是与他主学习相对立的一种学习方式。自主学习可分为三个方面:一是对自己的学习活动事先计划和安排;二是对自己的实际学习活动进行自我监察、评价、反馈;三是对自己学习活动进行调节、修正和控制。自主学习具有能动性、反馈性、调节性、迁移性、有效性等特征。[①]

2. 自主学习具有以下特征[②]

(1) 能动性。自主学习是学生积极、主动、自觉地从事和管理自己的学习活动,而不是在外界的各种压力和要求下被动地从事学习活动,或需要外界来管理自己的学习活动。这种自觉从事学习活动、自我调控学习的最基本的要求是主体能动性;

(2) 独立性。独立性相对于依赖性。自主学习把学习建立在人的独立性上,要求学生在学习的各个方面和整个过程中尽可能地摆脱对教师或他人的依赖,由自己作出选择和控制,独立地开展学习活动;

(3) 有效性。由于自主学习的出发点和目的是尽量协调好自己学习系统中的各种因素的作用,使它们发挥出最佳效果,因此自主学习在某种意义上讲,就是采取各种调控措施使自己的学习达到最优化的过程;

(4) 相对性。自主学习不是绝对的,就现实的情况来看,绝对自主或绝对不自主的学习都较少,学生的学习多数是介于这两极之间的。因此,我们不能将学习简单分成自主的和不自主的,而应从实际出发,分清哪些方面是自主的,哪些方面是不自主的。

3. 自主学习的条件

自主学习既可以看成是一种学习能力,又可以看成一种学习过程或活动。作为一种能力,自主学习是学习者与外部环境长期相互作用的结果,是个体在不同情境中表现出来的一种相对稳定的学习特征;作为一种活动过程,自主学习既需要内在的必要条件,也需要外部的支持条件。

首先,自主学习必须以一定的心理发展水平为基础,也就是要"能学"。从

---

① 董奇、周勇. 论学生学习的自我监控. 北京师范大学学报(社科版),1994.1.

② 皮连生. 实施《基础教育课程改革纲要(试行)》的心理学基础. 上海:上海教育出版社,2004.4(133).

学生学的角度来看，自主学习是在自我意识产生之后才出现的，自我意识应该是自主学习最为基本的内部条件。这是因为，如果没有自我意识的形成，个体就不可能有"主我"与"客我"的分化瓦解，就不可能将自己视为学习活动的主体，又将自己视为学习活动的客体，有意识地控制、调节自己正在进行的学习活动。

其次，自主学习必须以学生的内在学习动机为前提，也就是要"想学"。也就是必须具有学习的动机。

第三，自主学习必须以学生掌握一定的学习策略做保障，也就是要"会学"。因此，拥有足够的学习策略并能熟练地运用这些策略，是自主学习不可缺少的内部条件。

第四，自主学习还必须以意志控制为条件，也就是说要能坚持学。在学习的过程中，学生难免会遇到这样那样的困难和干扰，这时候就需要用意志努力来控制自己，使学习坚持进行。

4. 自主学习能力的培养

要想在学习中培养学生的自主学习能力，可以从微观和宏观两个层面着手。从宏观方面着手，就是要确立一种有利于学生自主学习的教学模式，凸显学生的自主学习过程，必须对当前流行的以教师为中心的讲授式教学进行改革。

从微观方面着手，是指从学生学习的某些方面着手来促进学生的自主学习。例如，增强学生的内在学习动机，丰富学生的学习策略等。

5.5.2 研究性学习

1. 研究性学习的本质

在我国当前的基础教育改革中，研究性学习既被看做一种课程形态，又被看做一种学习方式。我国学者一般认为，研究性学习的含义，有广义和狭义两种理解。从广义理解，它泛指学生探究问题的学习，可以贯穿在各科各类学习活动中。从狭义解释，它是指学生在教师的指导下，从自然现象、社会现象和自我生活中选择和确定研究专题，并在研究过程中主动获得知识、应用知识、解决问题的学习活动。①

就研究性学习的本质而言，是指基于对问题的探究而进行的学习，它与借助教师或他人呈现问题、讲解问题、得出答案的问题解决过程相对。研究性学习过程，也就是学生基于已有知识、技能，生成新的问题解决规则或思维产品的过程。

2. 研究性学习的条件

(1) 研究性学习的内部条件

研究性学习需要独特的内部条件。从学习动机看，研究性学习更多地需要

---

① 钟启泉，等. 基础教育课程改革纲要（试行）解读. 上海：华东师范大学出版社，2001(130)

以学生的求知欲、好奇心、兴趣等内在学习动机为前提。因为,如果学生缺乏求知欲,对学习毫无兴趣,仅仅局限于"碰到问题"而不是主动"寻找问题",也就无从谈起研究性学习。从学习过程来看,研究性学习需要高水平的认知技能,包括批判性思维、创造性思维和实用性智慧等。

(2) 研究性学习的外部条件

研究性学习所需要的一些外部条件也具有其独特的特征。首先,学习的内容必须具备可研究性。亦即所学习的内容,必须对学生构成问题,能使学生产生疑问、引发学生的思考。另外学习的内容必须具备研究的必要性,学习内容对学生而言必须具备研究的可能性。其次,研究性学习需要教师的指导而不是讲授。再次,研究性学习更需要小组协作。

3. 研究性学习的教学指导

数学研究性学习是学生数学学习的一个有机组成部分,是在基础性、拓展性课程学习的基础上,进一步鼓励学生运用所学知识解决数学的和现实的问题的一种有意义的主动学习,是以学生动手动脑并主动探索实践和相互交流为主要学习方式的学习研究活动。它能营造一个使学生勇于探索争论和相互学习鼓励的良好氛围,给学生提供自主探索、合作学习、独立获取知识的机会。数学研究性学习更加关注学习过程。

用于数学研究性学习的材料应是建立在学生现有知识经验基础之上,能够激起学生解决问题的欲望,体现数学研究的思想方法和应用价值,有利于营造广阔的思维活动空间,使学生的思路越走越宽,思维的空间越来越大的一种研究性材料。

数学研究性学习的材料不仅仅是教师自己提供的,而且教师应鼓励学生通过思考、调查、查阅资料等方式概括出问题,甚至可以通过日常生活情景提出数学问题,进而提炼成研究性学习的材料。在研究性学习的过程中,学生是学习的主人,是问题的研究者和解决者,是主角,而教师则在适当的时候对学生给予帮助,起着组织和引导的作用。

数学研究性学习的评价不仅仅关心学习的结果,而且更重要的是关注学生参与学习的程度、思维的深度与广度,学生获得了哪些发展,并且特别注意学生有哪些创造性的见解,同时对学生的情感变化也应予以注意。为了使评价能够真实可靠,起到促进学生发展的目的,要充分尊重学生自己对自己的评价以及学生之间的相互评价。既要有定量的评价也要有定性的评价。

4. 数学研究性学习课题的选择

数学研究性学习课题主要是指对某些数学问题的深入探讨,或者从数学角度对某些日常生活中和其他学科中出现的问题进行研究。要充分体现学生的自主活动和合作活动。研究性学习课题应以所学的数学知识为基础,并且密切结

合生活和生产实际。新高中数学新教材将按《新大纲》的要求编入以下课题,供参考选用,当然教学时也可以由师生自拟课题。提倡教师和学生自己提出问题。

新高中数学新教材研究性学习参考课题有六个:数列在分期付款中的应用,向量在物理中的应用,线性规划的实际应用,多面体欧拉定理的发现,杨辉三角,定积分在经济生活中的应用。其教学目标是:(1) 学会提出问题和明确探究方向;(2) 体验数学活动的过程;(3) 培养创新精神和应用能力;(4) 以研究报告或小论文等形式反映研究成果,学会交流。

5.5.3 合作学习

1. 合作学习的特点

合作学习在教育领域中的研究始于本世纪中期的美国。许多研究表明,合作学习对学生的学习和发展具有明显的促进作用。合作学习不仅能在一定程度上增强学生的学习积极性、提高学生的学业成绩,而且能够增强他们的自尊,帮助他们习得团体规范、形成社会交往技能,建立起一种友爱、合作的人际关系。

合作学习对中国学生来说显得尤其重要。中国有个打油诗"一个和尚挑水吃,两个和尚抬水吃,三个和尚没水吃。"这实际上不仅说明了合作的意识不够,而且说明了合作的能力很差。也就是说,在中国学生中,不仅是合作的意识不够强,而且很多情况下是不知道怎样与他人合作,因此,培养学生的合作能力对教育来说就十分必要了。

2. 合作学习的步骤

(1) 选定课题。即确定要学习的内容或任务;

(2) 小组设计。即确定小组学习的规模、划分学习小组;

(3) 呈现学习材料。将学习材料分割开,使小组的每位成员都有学习材料,并承担相关的学习任务,然后与小组成员进行交流结果,最后将各自的学习结果整合在一起;

(4) 提交小组学习的结果,由全班研讨,教师总结、评价各组的学习,必要时对部分内容进行讲解。

合作的形式和内容都是多种多样的,无论是课堂教学中,还是课堂教学外都要将合作作为一项重要的教学目标来实现,这首先就要求教师具有合作的精神、合作的观念。

5.5.4 三种学习方式的关系

自主学习、研究性学习、合作学习作为三种学习形式,各自强调的侧重点不同。自主学习强调个体独立、主动、自觉、自我负责的学习,强调对学习的自我定向、自我表现监控、自我调节和自我评价,它与被动学习相对。研究性学习强调

以问题为依托，以探究、发现的方式来习得知识和技能，它与接受学习相对。合作学习强调以学习小组为依托，以群体分工、协作为特征进行学习，它与独立学习相对。三种学习各自强调的侧重点不同，反映了其价值取向的不同。自主学习强调的是培养学生独立学习的能力，研究性学习强调培养学生探究未知世界的能力，合作学习强调培养学生协作分享精神。

三种学习方式之间又存在内在联系。首先，自主学习需要探究与合作。在个体自主学习的过程中，总会遇到一些问题，这时候就需要经过探究来解决，当自己经过探究还不能解决问题时，就需要寻求他人的帮助，共同探究、解决问题。其次，研究性学习也离不开自主学习与合作学习。从组织形式上来看，研究性学习有个人研究与集体研究之分，个人从事的研究性学习就是自主学习过程，集体从事的研究性学习本身就是合作学习过程。第三，合作学习也需要自主学习、探究学习。在合作学习过程中，学习小组的成员都要各负其责，独立完成自己所承担的学习任务，在合作过程中遇到困难时，就要与小组成员共同探究求得解决。

总之，三种学习既有区别，又有联系。在实际的学习活动中，这三种学习存在着相互支持、互为补充的关系。

本章思考题

1. 查阅相关资料，简述启发——讲授式教学模式、尝试指导·效果回授模式、“四主·三段·六环节”模式的教学程序，并对其进行分析。
2. 你对数学教学模式在教学中的作用有何认识？
3. 什么是 MM 教育方式？设计一堂体现 MM 教学理念的课堂教学。
4. 在数学教学中如何进行数学教学模式的选择与创新？
5. 数学教学方法的发展有什么趋势？
6. 谈谈合作学习对学生素质培养的重要意义。

6

第6章 中学数学内容

数学,由于生产实践活动的需要,在古代便已经产生了。现在已经发展成为一门分支众多、体系庞大、用途极广的科学。数学具有抽象性、精确性、应用广泛性的特点。数学的每一个分支,都是建立在一定的数学基础之上,或是某个公理体系之上,经过严密的逻辑推理而形成自身系统的、严谨的知识结构。克莱因认为,数学是人类创造的最有效的工具。

20世纪中叶以来,数学自身发生了巨大的变化,特别是与计算机的结合,使得数学在其研究领域、研究方式和应用范围等方面都得到了空前的拓展。因而现代数学还具有新的特点:数学内部各分支的相互渗透;数学与其他科学的相互渗透;数学与电子计算机技术的高度融合。数学已是人们生活、劳动和学习必不可少的工具;数学为其他科学提供了语言、思想和方法,是一切重大技术发展的基础;数学在提高人的推理能力、抽象思维能力、想象能力和创造力方面有着独特的作用;数学是人类的一种文化,它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。"今日数学及其应用"一文精辟地指出了数学教育的价值和目标:"数学的贡献在于对整个科学技术(尤其是高新技术)水平的推进与提高,对科技人才的培养和滋润,对经济建设的繁荣,对全体人民科学思维的提高与文化素质的哺育。"①

总之,数学已经成为分支极为庞大、内容极为丰富、用途极为广泛的科学。要将所有的内容纳入基础数学的教育体系是不现实的,因而如何选取中学数学的内容便成为一个重要的问题,必须进行认真研究。

6.1 数学科学与中学数学的联系与区别

中学数学内容是根据中学数学教育的特点、课程目标、数学在培养学生基础知识、基本技能、基本能力、个性品质和世界观等方面所起的作用,从数学科学的基本成果中合理地精选出来的、有价值的、基础的、学生可以接受的数学知识。中学数学与数学科学既有联系,又有区别。

① 钱珮玲、邵光华.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999(1)

6.1.1 数学科学与中学数学的联系

1. 中学数学是数学科学中基础的内容

中学数学教学目的是发展学生的智力、培养他们的数学能力。如果没有必要的数学知识作基础,知识向能力的转化是不可能发生的,掌握一定的数学知识是学生发展的前提和必要条件。数学的基础知识具有很强的抽象性和概括性,掌握数学基础知识和基本技能的过程有助于学生数学能力的形成。中学数学课程内容应该强调基础性,应满足学生未来社会生活的需要,能适应学生个性发展的要求,并有益于启迪思维、开发智力;中学数学课程内容,应该与学生的现实生活和以往的知识体验有密切的关系,对他们具有吸引力、能使他们产生兴趣的内容,严格地说,是取自于数学科学中各分支的一些比较简单而又易于理解,并且为进一步学习所必需的知识,而这些基础知识,又恰恰是在社会生活中应用比较广泛的知识,或者是对学生的素质形成具有重要帮助的知识。

中学数学课程内容的基础性包含三个方面的含义:第一,内容本身是现代社会公民从事工作、生产和生活所必需的数学知识;第二,内容本身必须是学习相邻学科和进一步学习高等数学所必需的数学知识;第三,这些内容在数学科学理论上、方法上、思想上必须是最基本的知识。

随着社会的进步,特别是科学技术和数学科学的飞速发展,对基础知识与基本技能的认识应当与时俱进。一些原来认为是基础知识的知识将被另一些新的基础知识所取代,一些以往被看重的"基础知识和基本技能"已经不再成为今天或未来学生数学学习的重点。相反,一些以往未受关注的知识、技能或数学思想方法却应当成为学生必须掌握的"基础知识和基本技能"。如随着计算机技术的发展,过去对人的生活十分重要,也是数学课程中重要的基础知识的四则运算,已经不再是重要的基础内容了,随之而来的是算法语言成为重要的基础知识。

2. 中学数学内容应包涵丰富的思想方法

数学科学产生和发展的同时,也产生和发展了数学思想和数学方法,它们也是中学数学课程的重要内容。因为受中学生年龄特点和思维水平的影响,现代数学的某些思想方法对中学生不宜直接讲授。但是,在中学数学课程里,从思想、观点、方法、语言上向现代数学靠拢,比如适当渗透集合思想、化归思想、变换思想、方程思想和函数思想是可行的。尤其值得注意的是,现代数学的一项重要工作是以现代数学思想方法重新处理古典数学问题,用高等数学的观点、方法解决初等数学中的问题,这些思想在中学数学中都应有所体现。

在新一轮基础教育改革中,对数学的课程内容进行了较大的变革,对于数学思想方法给予了更多的关注。例如,目前高中数学课程增加的"数学建模"、"探

究性课题"、"数学文化"等内容,反映了信息时代对数学教育的推动,"将矩阵正式列入中学课程,以向量法为主处理立体几何教学,集合作为语言使用,数列可以看做是函数的特例"等,都体现了现代数学思想方法在中学数学的渗透。又如,全日制义务教育《数学课程标准》明确地把"知识与技能、问题解决、数学思考、情感与态度"四个方面的目标并列作为义务教育阶段数学课程的总体目标,这说明"问题解决、数学思考、情感与态度"已纳入中学数学知识的范畴,它存在于知识的发生、发展与形成过程之中,构成了中学数学知识的新内涵。

6.1.2 数学科学与中学数学的区别

中学数学知识是由数学科学知识经过"初等化"而得的,两者是根本不同的。它们有不同的来源、且发展方式不同。"数学研究的发展是以问题解决为驱动力,而学校数学学习的过程是一种'新旧'材料之间双向、互动的结果。"因而在传递方式上呈现出差异。数学科学知识的传递是以"非个性化(depersonalisation)"和"非语境化(decontextualisation)"为主要特征,[①]也就是说,数学家的科学数学知识的传递过程是将其个人发现的结果、受何种启发、特定问题情景等进行概述。作者是试图将结果建立在更抽象和一般的水平上。但结果公布后,则是"非个性化的",可以在不同的情景中进行检验和应用。但学生对数学学科知识的学习过程则具有"个性化"和"语境化"的特点。学习者是通过对问题的理解得出自己的结论,知识便成为自己的知识。

中学数学课程内容是根据中学数学教育的培养目标,从数学科学的基本成果中合理地精选出来的。由于数学科学具有很强的系统性与逻辑性,具有严谨的知识结构;因此,作为中学数学课程,必须考虑所选数学知识的逻辑性与系统性及其相应的知识结构。

作为中学数学课程的内容,除了包括数学基本知识和基本技能外,还应包括学生在理解与掌握这些内容的过程中形成和发展起来的数学观念和能力。即中学数学课程内容应当有助于学生健全人格的形成,有助于学生自信心、责任感、合作意识、创新精神和科学态度的培养。同时,根据素质教育的要求,中学数学课程内容应该面向全体学生,既能够为每一个学生所掌握,又有利于学生的个性发展。

因此,中学数学课程内容不仅不能机械照搬数学科学的知识结构,而且要考虑如何将数学科学的知识结构转化成学生可接受的中学数学的知识结构;必须对所选的数学知识进行"教学法加工",既要考虑教师的"教",又要考虑学生的"学"。

① 綦春霞.数学课程论与数学课程教材改革.北京:北京师范大学出版社.2001,12(31).

总之，作为中学课程的数学和数学科学是既有联系又有区别。

6.2 中学数学内容的选择标准

如何选择中学数学的教学内容是十分复杂的。一般的说，在进行中学数学课程内容选择的时候一般要遵循以下标准。

1. 基础性标准

中学数学教育是基础教育。因此，在选择内容时应按“大众数学”的标准选择那些对学生来说是基础的、可以接受的知识作为学习内容。另外，中学数学课程是一门必修课，所有的学生都必须学习。因此，中学数学课程应该注意两个方面的基础，一个是所选内容对于学生未来的生活和工作实际有帮助的内容，另一个是所选内容应该是学生深入高一级学校学习的基础。

2. 时代性与社会作用标准

随着社会的发展，一方面数学不断取得新的成果，另一方面社会对人才在数学方面的要求也在不断更新。因此，数学教学的内容也应不断变化和更新，以适应发展的需要。然而，这里还有一个相对稳定的问题，虽然变化是应该的，但如果随时都在变化，则对数学教育研究，对数学教学方法的研究等问题就无法形成系统的理论，所以，要处理好在变化中求稳定，在稳定中求变化的关系。

新一轮的基础教育改革在数学内容选择上有较大的变化，特别是高中数学选择了一些现代数学的内容，使中学数学的内容更加适合于时代对数学教育的要求和社会发展对数学教育的要求。

3. 发展性标准

数学教育是为了使学生掌握一些必需的数学知识，以适应将来的生活、工作和学习等。但是，大多数学生毕业以后都很少直接用到中学所学的数学；一段时间后，数学的基本内容也就遗忘了。但是，在学习数学过程中所增长的能力（主要是思维能力）和研究问题的方法却将伴随他们一生。从发展性标准来看，数学内容应选择那些能充分体现数学研究特点且对学生思维有较大帮助的内容。

4. 后继作用标准

进入信息社会以来，终身学习已经成为公民的条件。从目前我国的情况看，高中毕业后，很大一部分学生都将进入高一级的学校进一步学习。因此，中学数学在内容选择上，应考虑学生后继的需要，也要考虑内容的关系，为学生的后继学习奠定一个基础。

5. 适度性标准

中学生是正在成长的一代，他们的身体和心理都处于发展阶段。因此，选择的内容必须符合中学生的发展水平。

根据以上五条主要标准选择课程内容时，还会遇到许多重要问题必须加以解决，主要有以下几点。

1. 需要与可能的矛盾

社会生活、生产和学生的后继学习需要许多数学知识和方法，但教学时数和学生的认识水平又不允许把需要的数学知识都列入中学数学的教学内容；只能通过实践和教学经验，不断总结才能确定如何取舍、选择。一般来说，选取的课程内容既不能过少或过高，也不能过多或过难，要符合学生的认识水平和认知能力，要在确保绝大多数（或全体）学生都能接受理解的前提下，着眼于学生最大限度的发展，选择的内容不仅要有一定的广度和深度，而且要符合面向现代化和面向未来的要求。

2. 统一性和灵活性相结合的问题

国家对中学课程（包括数学课程）的内容需要有一个统一的要求，即所有中学生都必须达到的要求。否则，提高全民素质与培养合格建设人才的教育目标就会落空。但也应看到，不同地区、学校、班级以及不同学生之间都有差异，教师的教学能力也存在差别，在选择课程内容时，应该注意到这一差异，并使课程内容具有灵活性的特点，目前我们在数学课程内容选择上要注意统一性与灵活性相结合。根据学生的学习水平、发展方向、后继学习的特点等设置必学内容与不同层次的选学内容，是培养多种规格人才的需要，也是体现统一性与灵活性相结合的重要措施之一。

这里值得一提的是，我们承认差异并不意味着差异都是好的，实际上如何缩小由于教师的情况或地区的情况所产生的差异，也是教育的一个必须研究的问题。

3. 精减和增加的关系问题

现代课程论的一个基本观点，就是既要使学生掌握各学科的基础知识与基本技能，又要在课程内容中反映科学技术的新发展，这也是选择课程内容的标准之一。为此就要不断提炼传统课程的内容，使学生学到最具价值的知识，同时又要增加近代现代科学的新成果。如何辩证的处理好精减和增加的关系，对课程内容的选择至关重要。

4. 课程内容的衔接问题

中学数学课程内容的选择必须从整体上来把握。一方面，作为学校教育的一个阶段，中学教育应当与小学和大学相衔接；另一方面，中学数学课程内部（各年级、高初中）以及相邻学科（物理、化学等）在内容上必须相互衔接。就前者来说，中学数学课程内容应当是小学内容的发展，又是高等学校数学课程内容的基础；就后者来说，由于数学具有内在的逻辑性与系统性，因而前后内容必须相继，同时要适应物理、化学等相关学科对数学工具的需要，在各门课程的总体

内容上要达到协调和统一。如何在知识、思想、方法以及内在的逻辑规律方面更好的衔接起来，需要不断地研究加以解决。

我国近二十年来的中学数学课程内容是经过长期教学实践而逐步总结筛选出来的，其中的主要部分是19世纪之前形成的代数、几何、三角、解析几何等学科的基本内容，即传统的中学数学内容，此外还包括一些现代生产和科学技术广泛应用的知识，如概率统计和微积分初步知识以及向量、简易逻辑等方面的知识。目前正在进行的新课程改革，对教学内容进行了比较大的变革，具体内容在本章后半部分将列出。

6.3 中学数学课程编制的原则

由上节的介绍我们知道，中学数学课程内容的主要组成部分是根据中学数学教育目标从数学科学的基本成果中合理地精选出来的，而数学科学具有很强的系统性与逻辑性，具有严谨的知识结构。因此，在编制中学数学课程时，首先必须考虑所选数学内容的逻辑性和系统性及其知识结构。但是，作为中学数学课程又不能机械照搬数学科学的知识结构，必须依照教育学、心理学的有关理论，从数学科学知识中选择那些有利于学生成长又能被学生接受的、最有价值的数学知识来组成课程内容及其逻辑体系，也就是说，在编制中学数学课程时，还须考虑学生的认知结构和心理特征。因此，同时考虑数学科学的知识结构、学生的认知结构和心理特征，并将三者有机地结合起来，是中学课程编制应遵循的一个总体原则。除此之外，人们还应该遵循以下原则。

6.3.1 整体化原则

从中学数学课程的内容来看，在编制中学数学课程时，必须周密考虑诸课程成分、课程要素及其相互关系，以及它们与整个学校教育的相互关系，使之成为一个有机的整体。这就是说，编制中学数学课程时，必须从课程开设的纵向全面地考虑各个学习阶段（如小学、中学、大学）数学内容的协调统一与衔接等问题；在将数学分为几个科目时，还必须考虑各个科目之间内容的协调统一；同时，必须从课程开设的横向考虑发挥中学数学课程自身最大功能的问题，以及考虑中学数学课程与其他课程（如物理、化学、生物）的协调配合，最大限度地发挥学校课程整体育人的功能。

6.3.2 系统性原则

数学内容选择既要使所选知识与其他学科的知识形成一个整体，又要注意到数学知识本身要具有内在联系，这就是要满足系统性原则，具体地说，应该注

意以下几点：

1. 数学课程内容的编排必须具备逻辑性

数学课程内容的编排必须具备逻辑性，即数学概念和命题的排列必须依据它们赖以存在的思维顺序展开。数学是一门演绎科学，严谨的逻辑性是它的主要特征之一，因而数学教材中一切数学概念的展开都应以概念间的内在联系为依据，并形成概念系统。然而，中学数学的部分逻辑系统往往与数学发展的历史不相符，如在中学为了学生的接受应先学微分再学积分，但在数学史上这两个问题几乎是同时开始研究的。究竟应该怎样安排还是一个值得研究的问题。另外所在命题的建立也要以学科公理为基础，用逻辑推理的方式来证明，也就是要符合公理化研究方式的要求。

2. 数学课程内容的编排应具有连续性

数学课程内容的编排应具有连续性。一方面，数学知识间的过渡应该连续、对于抽象水平较高的概念、原理和数学思想方法应采取逐级渗透的方式做统筹安排。另一方面，代数、几何等内容之间，要有相对应的认识水平，使各科教材在同一时期有同一发展水平，在不同时期又有连续的发展。

3. 数学课程内容的编排必须具备层次性

数学课程内容的编排必须具备层次性。必须使教材成为一个前后相继的结构系统。层次性可以有两个可能的编排选择。一个是呈现方式具有逐步分化的，也就是说，数学课程首先安排最一般、最基本的概念和原理，然后逐步呈现其属概念和下位原理。如我们可以先介绍函数的概念，并对函数在一般意义上研究其性质，然后逐步研究指数函数、对数函数、三角函数、数列等一些特殊的函数。另一个是呈现方式具有逐步综合的特点，也就是说，先介绍一些特殊的问题，然后逐步抽象，得出一些更综合的内容。如我们可以先介绍圆及其性质、椭圆及其性质、双曲线及其性质、抛物线及其性质，然后，综合各种曲线的特点，再在一般意义上介绍圆锥曲线的性质。针对具体的内容我们可以选择两种编排方式中的任何一种，它们都符合层次性的要求。

4. 课程内容的编排应体现统一性

课程内容的编排应体现统一性，即必须从整体上安排数学课程内容的体系，用统一的观点来处理各科内容，不仅有利于学生把握数学的本质及其内在联系，而且有利于获得系统完整的知识。

6.3.3 统一化与区别化相结合的原则

如前述，由于存在着各种差异。因而，从中学数学教育目标来看，一方面作为一个国家或一个社会、一个学校，为实现其教育目的，对中学数学课程必须有一个统一的要求，必须规定学生学习数学应达到的基本要求或基本标准。但是，

在一个国家，考虑到各个地区发展是不平衡的，因此，在编制中学数学课程时，还要从不同地区的客观实际出发，使所编制的中学数学课程能适应不同地区的生产和经济发展水平，根据各行各业和学生对数学的需求以及学生的认识水平，合理地组织中学数学教学内容及其逻辑体系，贯彻统一化与区别化相结合的原则。

6.3.4 推陈出新的原则

在编制中学数学课程的过程中，要对传统的编制思想和编制技术批判地继承，并不断渗透新的数学思想、观点和方法，更新课程的编制思想和技术，从而编制出既适应时代发展要求又符合学生需求的新数学课程。

6.3.5 面向全体学生的原则

20 世纪 80 年代以来，提出了"大众数学"的口号，使数学教育从为少数人的"精英教育"思想转变为"大众数学"，从"应试教育"转变为"素质教育"，即人人学有用的数学，不同的人学不同的数学。因此，在编制中学数学课程时，立足点应由面向升学考试转变为面向全体学生，注意不同学生的不同需要，从全体学生的不同认知水平和身心发展规律的实际出发，把社会发展的客观要求和学生的实际需要结合起来，并反映于数学课程之中，使全体学生在数学方面都能得到提高。

按照面向全体学生的原则，中学数学的内容在编排上，要符合学生的心理发展状况。具体地说要注意以下几点：

1. 与学生思维发展规律相符

中学生的思维发展规律是由具体形象思维到经验型抽象思维，再到理论型抽象思维。因此，编排课程内容时，要使数学内容的抽象程度与学生思维发展的各个阶段相适应。具体地说，应该是随着年级的增高，内容的抽象程度也应有相应的提高。

2. 与学生认识规律相符

由于学生的认识处于不断深入的发展时期，因此要使内容的编排符合学生的认识规律，就必须由浅入深，由易到难，循序渐进地编排。另外由辩证唯物主义认识论我们知道，认识的发展过程是由感性认识到理性认识的过程，因此在编排上要由感性到理性，由实践到理论再到实践进行编排。

3. 注意知识之间的联系

为了学生的学习能够发挥迁移的作用，在内容编排上还要注意知识之间的联系，做到先行知识的学习与后继知识的学习能互相促进与提高效益，即前者启发后者，后者巩固前者。

6.3.6 应用、发展性原则

由于中学教育培养目标的一个重要方面是使学生学以致用，理论联系实际。因此编制的中学课程应体现数学知识的实用性，即重视数学知识在实际问题中的应用。

6.4 中学数学课程内容

本节我们从义务教育和高中教育两个方面来介绍性的基础教育改革数学内容的特点。

6.4.1 义务教育阶段

为了体现义务教育的普及性、基础性和发展性，新的数学课程从现行大纲中以获取数学知识、技能和能力为首要目标，转变为首先关注每一个学生的情感、态度、价值观和一般能力的发展，使学生体会数学与自然及人类社会的密切联系，了解数学的价值，增进对数学的理解和应用数学的信心。

1.《标准》对课程内容的选择及呈现

为了实现上述的课程目标，与现行大纲相比，《标准》对课程内容的选择及呈现进行了多方面的改革。

(1) 提倡有教育价值的数学，学生的数学学习内容应当是现实的、有趣的和富有挑战性的；

(2) 与现行教材中主要采取的“定义—定理(公式)—例题—习题”的形式不同，《标准》提倡以“问题情境—建立模型—解释、应用与拓展”的基本模式呈现知识内容，让学生经历“数学化”与“再创造”的过程，形成自己对数学概念的理解；

(3) 提倡在关注获得知识结果的同时，关注知识获得的过程；

(4) 内容的设计具有一定的弹性，《标准》提倡采取开放的原则，为有特殊需要的学生留出发展的时间和空间，满足多样化的学习需求。

2.《标准》提出的理念

新一轮的数学课程改革，重要的是要转变广大数学教师的教学观念，在数学课堂中推进素质教育，在《标准》的理念下进行教学创新。《标准》在这一方面提出以下几个方面的思想。

(1) 数学学习的主要方式应由单纯的记忆、模仿和训练转变为自主探索、合作交流与实践创新；数学课堂由单纯传授知识的殿堂转变为学生主动从事数学活动，构建自己有效的数学理解的场所；数学教师由单纯的知识传递者转变为学

生学习数学的组织者、引导者和合作者。

(2) 学生要从单纯的知识的接受者转变为数学学习的主人。数学教学应该是从学生的生活经验和已有知识背景出发,向他们提供充分的从事数学活动和交流的机会,帮助他们在自主探索的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法。

(3) 数学学习评价应由单纯的考查学生的学习结果转变为关注学生学习过程中的变化与发展,以全面了解学生的数学学习状况,促进学生更好地发展。既要关注学生学习的结果,更要关注他们在学习过程中的变化和发展;既要关注学生数学学习的水平,更要关注他们在数学活动中所表现出来的情感、态度、个性倾向。

3. 第三学段(7~9年级)的数学课程的具体内容

(1) 数与代数

"数与代数"的内容主要包括数与式、方程与不等式、函数,它们都是研究数量关系和变化规律的数学模型,可以帮助人们从数量关系的角度更准确、清晰地认识、描述和把握现实世界。

具体内容如下:

第一,数与式。包括有理数、实数、代数式、整式与分式。

第二,方程与不等式。包括方程与方程组、不等式与不等式组。

第三,函数。包括探索具体问题中的数量关系和变化规律、函数的概念和简单运用、一次函数、反比例函数、二次函数。

(2) 空间与图形

"空间与图形"的内容主要涉及现实世界中的物体、几何体和平面图形的形状、大小、位置关系及其变换,它是人们更好地认识和描述生活空间并进行交流的重要工具。

空间与图形的具体内容如下:

第一,图形的认识。包括 点、线、面的知识;角的知识; 相交线与平行线的知识; 三角形的知识;四边形的知识;圆的知识;尺规作图的有关知识;视图与投影的有关知识。

第二,图形与变换。包括图形的轴对称;图形的平移;图形的旋转;图形的相似。

第三,图形与坐标。

第四,图形与证明。

(3) 统计与概率

"统计与概率"主要研究现实生活中的数据和客观世界中的随机现象,它通过对数据收集、整理、描述和分析以及对事件发生可能性的刻画,来帮助人们做

出合理的推断和预测。

具体内容为统计、概率的基础知识。

(4) 课题学习

《标准》的“实践与综合应用”领域,是《标准》的一个特色。“实践与综合应用”是新数学课程中一个全新的内容。理解和把握这个领域,对于数学课程的发展和数学教学的改革是非常重要的。“实践与综合应用”反映了数学课程与教学改革的要求,也为学生提供了一种进行实践性、探索性和研究性学习的课程渠道。

“实践与综合应用”将帮助学生综合运用已有的知识和经验,经过自主探索和合作交流,解决与生活经验密切联系的、具有一定挑战性和综合性的问题,以发展他们解决问题的能力,加深对“数与代数”、“空间与图形”、“统计与概率”内容的理解,体会各部分内容之间的联系。

在本学段中,学生将探讨一些具有挑战性的研究课题,发展应用数学知识解决问题的意识和能力,同时,进一步加深对相关数学知识的理解,认识数学知识之间的联系。

在前两个学段的基础上,教学时应引导学生结合生活经验提出课题、积极地思考所面临的课题、清楚地表达自己的观点并能够解决一些问题。

4. 义务教育阶段的数学课程内容的总体特点

第一,提倡有教育价值的数学,学生的数学学习内容应当是现实的、有趣的和富有挑战性的;第二,与过去教材中主要采取的“定义—定理(公式)—例题—习题”的形式不同,《标准》提倡以“问题情境—建立模型—解释、应用与拓展”的基本模式呈现知识内容,让学生经历“数学化”与“再创造”的过程,形成自己对数学概念的理解;第三,提倡在关注获得知识结果的同时,关注知识获得的过程;第四,内容的设计具有一定的弹性,《标准》提倡采取开放的原则,为有特殊需要的学生留出发展的时间和空间,满足多样化的学习需求。

6.4.2 义务教育阶段的数学课程内容的变化

与义务教育阶段数学教学大纲(试用修订版)相比,《标准》在课程内容上的变化主要体现在以下几个方面:

1. 内容结构方面

《标准》通盘设计义务教育阶段的数学课程,将九年划分三个学段:1~3年级、4~6年级、7~9年级,明确了学生在相应学段应该达到的数学学习目标,而对内容呈现的顺序不作限定,为教材的多样化和教师创造性地教学留下了较大的空间。

《标准》将“统计与概率”、“实践与综合应用”作为与“数与代数”、“空间与

图形”并列的两大学习领域，分学段提出了具体目标，有利于学生对数学形成更为全面的认识。

2. 课程内容方面

(1) 加强的内容

数与代数方面：注重使学生经历从实际背景中抽象出数学模型、探索数量关系和变化规律的过程，重视发展学生的数感和符号感；重视口算，加强估算，提倡算法多样化，强调用计算器来进行复杂的运算并探索规律；重视引导学生运用所学知识和技能解决实际问题。

第一，重视数与符号意义以及对数的感受，体会数字用来表示和交流的作用。通过探索丰富的问题情景发展运算的含义，在保持基本笔算训练的前提下，强调能够根据题目条件寻求合理、简捷的运算途径和运算方法，加强估算，引进计算器，鼓励算法多样化。

第二，对于应用问题，选材强调现实性、趣味性和可探索性；题材呈现形式多样化；强调对信息材料的选择与判断；解决问题的策略多样化；问题答案可以不唯一；淡化人为编制的应用题类型及其解题分析。

第三，使学生初步体会数学可以发现、描述、分析客观世界中多种多样的模式，把握事物的变化和事物间的关系；初步发展学生的符号意识，学会用符号表达现实问题中的一些基本关系，会初步进行符号运算。

第四，体会方程和函数是刻画现实世界，有效地表示、处理、交流和传递信息的强有力工具，是探究事物的发展规律，预测事物发展趋势的重要手段。重视对简单现实问题的建模过程，学会选择有效的符号运算程序和方法解决问题，重视近似解法特别是图像解法。

第五，空间与图形的方面，强调内容的现实背景，联系学生的生活经验和活动经验；增加了图形变换、位置的确定、视图与投影等内容；重视通过观察、操作、推理、交流等活动，发展学生有条理的思考；突出“空间与图形”的文化价值；重视量与测量，并把它融合在有关的内容中，加强测量的实践性；加强合情推理，调整“证明”的要求，强化理性精神。《标准》在重新审视几何教学目标的基础上，提出几何学习最重要的目标是使学生更好地理解自己所生存的世界，形成空间观念。

在空间与图形部分，与过去的课程相比，《标准》作了以下几个方面的变化。首先，设置了“空间与图形”领域，将几何学习的视野拓宽到学生生活的空间，强调空间和图形知识的现实背景，从第一学段便开始使学生接触丰富的几何世界。其次，通过观察、描述、制作、从不同的角度观察物体、认识方向、制作模型等活动，发展学生的空间观念和图形设计与推理的能力。另外，突出用观察、操作、变换、坐标、推理等多种方式了解现实空间和处理几何问题，体会更多的刻画现实

生活中的应用。

《标准》中还指出，逻辑证明的要求并不局限于几何内容，而应该体现在数学学习各个领域，包括代数和统计与概率等；对于几何证明的教学来说，它的目的不应当是追求证明的技巧、证明的速度和题目的难度，而应服从于使学生养成“说明有据”的态度、尊重客观事实的精神和质疑的习惯，形成证明的意识，理解证明的必要性和意义，体会证明的思想，掌握证明的基本方法等等。因此，《标准》中在强调探索图形性质的基础之上，要求证明基本图形（如三角形、四边形）的基本性质，降低了对论证过程形式化和证明技巧的要求，删去了繁难的几何证明题，旨在通过这些让学生体验逻辑证明的意义、过程，掌握基本的证明方法，同时，向学生介绍欧几里得和《几何原本》，使学生体会它们对于人类历史和思想发展的重要作用。综上所述，《标准》大大地加强和改善了目前的几何教学。

第六，统计与概率方面，强调使学生经历统计的全过程，认识统计的作用；重视引导学生根据数据做出推断和预测，并进行交流；注重学生对可能性的感受和认识。

《标准》中增加了“统计与概率”的内容，在义务教育三个学段根据学生的认知特点，分别设置了相应的内容，结合实际问题，体现了统计与概率的基本思想。在教学中反映数据统计的全过程：收集和整理数据、表示数据、分析数据、作出决策、进行交流。体现随机观念和用样本估计总体的初步思想，将概率统计方法作为制定决策的有力手段。根据数据作出推理和合理的论证，并初步学会用概率统计语言进行交流。

加强实践与综合应用。《标准》在第一学段设立了“实践活动”、第二学段设立了“综合应用”、第三学段设立了“课题学习”，便于教师结合不同学段学生的生活经验和知识背景，引导学生以自主探索与合作交流的方式，理解数学，发展解决问题的策略，体会数学与现实生活的联系。

《标准》增设“联系与综合”部分的目的是让学生在各个知识领域的学习过程中，有意识地体会数学与他们的生活经验、现实社会和其他学科的联系，以及数学在人类文明发展与进步过程中的作用；体会数学知识内在的联系。同时，采用“综合实践活动”这种新的学习形式，通过学生的自主探索与合作交流，使他们获得综合运用数学知识和方法解决实际问题、探索数学规律的能力，逐步发展对数学的整体认识。

新的数学课程指出了新技术对数学课程提出的要求，指出了新技术对包括数学课程的目的、数学学习的内容以及教与学的方式等方面产生的巨大影响。因此，《标准》提出在第二学段引入计算器，并鼓励把计算器和计算机作为研究、解决问题的强有力的工具。这样可以免除学生做大量繁杂、重复的运算，从而在探索性、创造性的数学活动中投入更多的精力，解决更为广泛的现实问题。标准

强调了数学课程应重视新技术的应用。

（2）削弱的内容

进一步控制计算的难度和速度。第一、二学段控制整数四则混合运算的步骤（不超过三步），不要求学习小数与分数的四则混合计算；第三学段有理数的混合运算不超过三步。

不独立设置“应用题”单元，取消对应用题的人为分类。

删除根式的运算、无理方程、可化为一元二次方程的分式方程、二元二次方程组和三元一次方程组。

降低有关术语在文字表达上的要求，淡化单纯的公式记忆和计算。

同时，在课程实施建议中强调，有条件的地区应尽可能在教学过程中使用现代教育技术，增加数学课程的技术含量，充分利用现代教育技术在增加师生互动、形象化表示数学内容、有效处理复杂的数学运算等方面的优势，改进学生的数学学习方式、增进学生对数学的理解，最终提高数学教学的质量。

6.4.3 高中数学课程内容

高中数学教学是数学教育的重要组成部分，是高中生的一门必修课，主要教学目的是要求学生掌握数学的基础知识，基本技能，基本思想，使学生会用数学的方法建立数学模型，会用数学的思想方法去分析问题，解决问题。同时也要求学生具有实事求是的态度，锲而不舍的精神。

1. 标准的基本理念

（1）《标准》强调课程的基础性

什么是高中数学课程中最基本的东西？什么是贯穿高中数学课程始终的基本思想？这是每一位高中数学教师都必须认真和反复思考的最重要问题。同时，也应该帮助学生在学习的过程中认真思考这些问题。在新的高中数学课程中，函数思想、代数运算思想、算法思想、空间观念（几何直观、空间想象、数形结合）、数据处理与随机思想是贯穿高中数学课程始终的核心思想，不仅在必修课程中，而且在选修课程中，也包括在选3、选4的课程中，它们像“无形的网络”把整个高中数学的内容有机地联系起来。我们只有认识了它们之间的关系，才能更好地整体把握高中数学课程。

对于数学的基础知识与基本技能（以下简称“双基”），新的数学课程也给予了足够的重视，因为它本身是数学知识、方法和思想的集合体。教师一方面需要把每一个知识点和每一个技能理解透彻。另一方面还必须理解它们在“知识网络”中的位置，从整体去认识它们。也就是说，我们不仅应该从“局部”（即一个个的知识和技能）去认识“整体”（贯穿始终的基本思想），也应该学会从整体去认识局部。只有这样我们才能真正把握高中数学对基础知识和基本技能的要

求，从而从全局上把握双基。

(2)《标准》强调课程的选择性

这一理念也是这次课程改革有较大突破的地方。在为所有学生提供必要的学习内容和条件的同时，还考虑到高中是人生成长的关键时期，在这个时期学生的个性有了显著、迅速的发展，面临人生未来的规划，数学教学应该为他们各种可能的未来发展提供机会。另一方面，现代社会的各行各业都需要一批数学修养较高的人才，而且不同的专业对数学的要求也不相同，因此，在必修课程以后，《标准》提供了各种选择：选修系列1、2分别是为那些希望高中毕业后，能在人文社会科学和理工经济不同方向分别发展的学生而设置的；而选修系列3、4则为那些对数学有兴趣和希望进一步提高数学素养的学生提供了发展的可能。

(3)《标准》强调数学的应用

数学应用的广泛性是数学的基本特点，在20世纪中期以后，随着计算机的发展，数学应用的领域和应用的深度迅速拓展，也为数学教育提出了新的要求，要求数学教育应适应这样的形势，将数学的应用列为重要的内容。其实不仅在中小学要重视数学的应用，而且在大学也一样要重视数学的应用问题。例如，"数学建模"课程已经成为数学系的基础课程。另外，全社会各行各业也需要普通高中毕业生懂得数学有用、数学能用，而且需要高中毕业生能运用数学解决一些实际问题。《标准》强调培养学生的应用意识，要求教师帮助学生进行必要和适当的数学应用训练，并要求每位学生至少经历一次数学建模的过程。

(4)《标准》强调让学生形成主动学习与探究的精神

"主动探索精神和创新意识"是时代的要求，创新是一个民族的灵魂，而探究是创新的基础，如何培养学生的探究精神和创新意识，这是数学课程必须考虑的一个具有挑战性的问题，《标准》也将培养学生的探究和创新能力作为重要的理念。因此，对教师来说，我们应该在教学中贯彻这一理念，在教学中应该给学生留有主动学习和探索问题的空间；应该给学生提供一些机会，让学生提出一些问题，通过培养学生的问题意识，学习创造性思维，培养创新意识；应该帮助学生实践数学思考问题的方法，提高分析问题和解决问题的能力以及其他必要的能力，同时也要使学生受到数学思维的熏陶。

(5)《标准》强调数学与信息技术的整合

为了适应信息（数字化）时代的要求，课程应该注意数学与计算机（信息）技术的整合。特别是通过算法的学习和实际使用，理解和熟悉两者的联系，以便学生在未来学习和工作中能够自觉地沟通数学与计算机技术，使二者相互促进。达到既提高效率，又加深理解现代科学技术的特点的要求。

(6)《标准》强调数学的文化价值

在中小学课程中，数学课程之所以占有非常重要的地位，一个重要的原因是

它具有重要的文化价值,它不仅提供一种基本的思维方式,在人类思想历史的发展中也占有特殊的地位,以致有学者认为数学在西方思想中始终占有中心地位。高中数学课程应将数学作为人类重要的文化来进行传承,应该通过向学生介绍数学史和数学在人类文明发展中的作用,反映数学的文化价值,应该使学生在学习数学的过程中,形成数学的精神。因此,强调数学的文化价值成为高中课程和教材建设的基本理念。

2. 高中课程的基本内容

新的课程标准将高中数学分成两个部分即必修部分和选修部分。

(1) 必修课程

必修课程是整个高中数学课程的基础,是所有学生都要学习的内容。其内容的确定遵循两个原则:一是满足未来公民的基本数学需求,二是为学生进一步的学习提供必要的数学准备。

这5个模块的内容为:

数学1:集合、函数概念与基本初等函数I(指数函数、对数函数、幂函数);

数学2:立体几何初步、平面解析几何初步;

数学3:算法初步、统计、概率;

数学4:基本初等函数II(三角函数)、平面上的向量、三角恒等变换;

数学5:解三角形、数列、不等式。

(2) 选修课程

选修课为4个系列,学生可以根据自己的兴趣爱好和未来的发展进行选择,其中文科学生一般选择系列1,理科学生一般选择系列2,系列1和系列2为选修课当中的基础内容。而系列3和系列4则是为了供在数学上有兴趣或是为了想更加提升自己数学素养的学生选择的。

系列1的内容分别为:

选修1-1:常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用。

选修1-2:统计案例、推理与证明、数系的扩充与复数的引入、框图。

系列2的内容分别为:

选修2-1:常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间中的向量与立体几何。

选修2-2:导数及其应用、推理与证明、数系的扩充与复数的引入。

选修2-3:计数原理、统计案例、概率。

系列3包括:数学史选讲、信息安全与密码、球面上的几何、对称与群、欧拉公式与闭曲面分类、三等分角与数域扩充6个专题。

系列4包括:几何证明选讲、矩阵与变换、数列与差分、坐标系与参数方程、不等式选讲、初等数论初步、优选法与试验设计初步、统筹法与图论初步、风险与决策、开关电路与布尔代数10个专题。

6.4.4 普通高中数学课程内容的变化

1.《普通高中数学课程标准》的数学内容与过去相比的变化

（1）为不同学生的发展提供了不同的课程内容；

（2）加入算法等一些新内容；

（3）对已进入中学课程的微积分、统计与概率进行了新的设计；

（4）设立了数学建模、数学探究、数学文化等学习活动，并分别对它们提出了具体要求；

（5）调整原有内容；

（6）特别需要指出的是，数学必修模块着重培养学生的探究、阅读、交流、创新能力；

（7）注重信息技术与数学课程的整合。

2. 数学课程内容的体系的变化

所谓课程内容体系，是指课程内容排列所展现的知识序列及知识间的内在联系。数学课程的内容体系，就是把数学的一个分支学科经选择而得到的内容进行教学法的加工而形成的知识系统。课程体系一般分为直线式体系和螺旋式体系。

（1）直线式体系

所谓直线式，就是指把一门数学学科的课程内容或其中一个课题的内容按照知识本身的逻辑结构来展开，使各种知识在内容上不重复的编排形式。

（2）螺旋式体系

螺旋式是一种循环编排课程内容的方式，就是把同一课题内容按深广度的不同层次安排在不同的阶段重复出现，每一次重复都将原有的知识进一步加深、逐级深化。

本次课程改革对于不同的内容采用了不同的编排体系。

3. 算法的基本内容

中学数学中的算法内容和其他内容是密切联系在一起的，比如线性方程组的求解，数列的求和等。在新课程中强调了算法知识的学习。具体来说，需要学生通过模仿、操作、探索、学习程序框图设计来表达解决问题的过程，体会算法的基本思想和含义，理解算法的基本结构和基本算法语句，并了解中国古代数学中的算法(高中数学课程标准)。一般算法由顺序、条件和循环 3 种基本结构组成。顺序结构是由若干个依次处理的基本步骤组成，这是任何一个算法都离不开的基本主体结构。

算法是计算机科学的基础，计算机完成任何一项任务都需要算法。但是，用自然语言或程序框图描述的算法是计算机所无法“理解”的，我们还需要将算法

用计算机能够理解的语言表达出来，这一过程称为程序设计，所用的语言称为程序设计语言(Programming Language)。

整个的新课程标准都具有基础性、层次性，发展性，过程化、信息化的特点。

6.4.5 普通高中课程内容的结构特点

课程结构

新的普通高中课程在课程结构上发生了重大变化，形成了层次分明的三级结构：学习领域，科目，模块。

(1) 学习领域

由课程价值相同或相近的若干科目组成。设置学习领域有利于在学习领域的视野下研制各科课程标准，指导教师教学，防止陷入学科本位。有利于整体规划课程内容，体现学生全面发展的要求，提高学生的综合素质。

(2) 科目

普通高中新课程开设：语文、数学、外语(英语，日语，俄语等)、政治、历史、地理、物理、化学、生物、艺术(或音乐，美术)、体育与健康、技术等科目，其中技术和艺术是新增设的科目，艺术与音乐、美术并行设置，供学校选学。

(3) 模块

组成科目的各个组成部分称为模块。每一个模块都有明确的教育目标，并且对教师的教学行为和学生的学习方式提出了要求。模块之间既相互独立又反映了学科内在的逻辑联系。

将科目分解为相互独立又相互联系的若干模块是普通高中课程改革在课程结构上的重大举措，每一个科目所包含的模块都有必修课与选修课之分，其中选修模块在数量上超过了必修课模块，使课程呈现出多样化的特征，学生的课程选择及个人化学习方案的形成都因此而变为现实。

学生的志向与自身条件是不同的，不同高校、不同专业对学生数学方面的要求也不同。学生可以自主地选择不同的模块组合。以下提供的是一些基本的模块组合。

第一种：获得必修课程的 8 学分，并在选修课程中任意选择 2 个模块获得 4 学分。它是高中学生毕业的最低要求，也可作为进入高职、体育、艺术类院校的最低要求。(1 学分相当于每周一学时的一学期课程)

第二种：获得必修课程的 8 学分；在选修课程系列 1，数据处理模块中获得 7 学分，在其他模块中获得 4 学分。它是进入人文社科类院校的最低要求。

第三种：获得必修课程的 8 学分；在选修课程系列 2，数据处理模块中获得 10 学分，在其他模块中获得 4 学分。是进入理工和经济类院校的最低要求。

另外选修数学系列 3、4 课程获得 4 学分后，可取得证书作为进入某些院校

(包括人文社科、理工、经济等各类院校)的重要参考。

本章思考题

1. 选择中学数学课程内容的标准主要有哪些?
2. 简述《全日制义务教育数学课程标准》的内容领域。
3. 义务教育阶段的数学课程内容有什么变化?
4. 普通高中数学课程内容具有什么特点?
5. 数学课程内容的编排要遵循哪些原则?

第7章 中学数学基本内容的教学

7

中学数学基本知识包括概念、命题及命题的证明等，这些知识各有其自身的特点，在教学中应该依据这些特点及学生的学习情况开展活动，本章分概念、命题及命题的证明等几方面对教学进行研究。

7.1 数学概念的学与教

概念是思维的基本单位，是思维的基础。现代心理学研究认为，大脑的知识可以等效为一个由概念结点和连枝构成的网络体系，称为"概念网络"。由于概念的存在和应用，人们可以对复杂的事物作简化、概括或分类的反映。概念将事物依其共同属性而分类，依其属性的差异而区别。因此概念的形成可以帮助学生了解事物之间的从属与相对关系。数学概念是数学研究的起点，数学研究的对象是通过概念来确定的，离开了概念，数学也就不再是数学了。所以对数学而言，概念显得尤其重要，由于许多概念的教学是数学教学的难点，所以对概念的学习的研究是数学教学最重要的课题之一。

7.1.1 数学概念概述

1. 概念的定义

概念是哲学、逻辑学、心理学等许多学科的研究对象；各学科对概念的理解是不一样的，概念在各学科的地位和作用也不一样。哲学上把概念理解为人脑对事物本质特征的反映，因此认为概念的形成过程，就是人对事物的本质特征的认识过程。

依据哲学的观点，数学概念是对数学研究对象的本质属性的反映。由于数学研究对象具有抽象的特点，因而数学是依靠概念来确定研究对象的。数学概念是数学知识的根基，也是数学知识的脉络，是构成各个数学知识系统的基本元素，是分析各类数学问题，进行数学思维，进而解决各类数学问题的基础。它的准确理解是掌握数学知识的关键，一切分析和推理也主要是依据概念和应用概念进行的。

学生学习数学，首先要掌握好概念。学生对概念的认知，是大脑内部对给定

概念作出响应的过程，是大脑对概念的对象进行抽象概括的过程。

2. 概念的分类

概念的分类，就是依照某种标准，将具有某些共同本质属性的事物划分为若干个类别，而这些类别之间是有内在联系性的。概念依据是否可以给出确切的定义，可以分为原始概念和非原始概念。原始概念就是不能给出明确的定义的概念，而非原始概念就是可以给出明确的定义的概念。在中学数学教学中，对于原始概念的教学，要利用公理化思想指出概念的引入的必要性。中学数学中所涉及的原始概念有点、直线、平面、集合等；这些概念都是基本概念，对引入其他概念起着至关重要的作用；对于非原始概念的学习，要让学生经历由具体到抽象去认识数学对象，并归纳概括出对象的本质属性的过程。

人们在对事物或问题进行分类时，一般是根据问题的各种属性及其关系作出判断的。在进行一次分类时，只能按一个属性或一个关系进行，这样才能保证分类的结果即不重复又不遗漏。如可以按两条直线是否在同一平面将两条直线的关系分为同一平面的直线和异面直线两类；又可以按平面内两条直线是否有公共点，将同一平面内直线的关系分为相交、平行和重合三类。在概念的学习过程中，分类活动占有非常重要的地位。分类是概念获得的基础，是对概念的内涵进行认识的过程。分类活动可以使学生既认识概念的共性，又认识到概念的特性，有助于学生从整体上把握概念。

3. 数学概念教学的特点

由于数学的研究对象是事物的数量关系和空间形式，这种关系和形式是脱离了事物的具体物质属性的。数学概念有与此相对应的特点，这就体现为数学的抽象性。在数学研究中，建立一个数学概念的意义就是揭示它的本质特征，即共同属性。因此数学概念教学具有一些特点。

(1) 概括性

在数学概念的形成过程中，首先是对数学对象(或事物)的性质进行观察、比较，找出对象(或事物)间的共同本质属性，然后依照其是否具有这种本质属性加以分类。将事物分为具有某一本质属性的和不具有某一本质属性的两类，最后对这一属性用语言进行概括。如三角形的概念，其本质属性是三条线段首尾相连所形成的几何图形。这一本质属性就是在通过对大小各异、颜色各异、角的大小各异等不同的具体实物中，概括出具有三个角，三条线段组成的封闭平面图形这一共同属性的。一旦三角形概念形成，便脱离了具体的实物而成为思维的产物和对象，这也就是数学概括的最终“产品”。

(2) 具体性与抽象性的统一

因为数学概念是思维的产物，所以具有抽象性；但数学概念又是从非常具体的对象中产生的，一个数学概念的背后有许多具体内容为支撑。另外，数学概念

形成以后，最终是用于解决（具体）问题的，因此数学概念具有具体—抽象—具体的特点。学生学习数学概念不仅应掌握数学概念的定义，而且能将概念运用于解决具体问题。

数学最主要的特征之一是抽象，数学表述的形式化，更加深了抽象的层次。无论教师或学生都必须经过"抽象的炼狱"（张奠宙语）。不通过抽象关，不能说理解了数学。然而，数学又是具体的。因此，如果我们只看到数学的抽象性，而把活生生的数学背景一笔抹去，那是一种认识的误区，也表明对数学的理解不完整。项武义教授曾经生动地把数学比喻为美女西施，如果知识是把数学形式地逻辑演绎一番，那等于是把西施放在 X 光下透视，你所看到的只是一幅骨架而已，毫无美感可言。因此，数学教师的作用就在于将抽象的数学有血有肉的表现出来，使学生不仅能深刻体会数学的抽象，也要使学生切实体会数学的具体。

在进行概念教学时，教师应善于结合具体的实例使学生理解抽象的概念，这里举两个经典的教学案例。

弗赖登塔尔曾经描述一个比和比例的教学设计：一天早晨学生走进教室，发现窗开着，黑板上有个大手印，并在黑板上留了一封信。学生都认为一定是巨人来了，他们很惊讶，不知巨人有多高。老师把手放在巨人的手印上，看上去巨人的手比老师的手大 4 倍。学生对老师的身高进行测量，然后他们剪了一根线，是老师身高的 4 倍，然后将所剪的绳子挂在墙上，表示巨人的高度。根据这些经历，学生开始调查，描述巨人的课桌、巨人靴子、特大报纸、特大蛋糕等等的长度、面积、体积。这样的活动，这种教学过程把比和比例的数学内涵和底蕴，揭示得淋漓尽致，对这两个概念的认识也就能够达到深刻的层次了。

另一个经典的例子，是在上海某区"数学活动小组"的"坐标课"的设计。将教室中课桌椅并拢，拉 2 根相互垂直的长绳，一人为原点，于是每个人都有坐标、象限、直线、坐标轴都可以通过学生的活动加以演示。这种数学活动虽然只有"整数坐标"，但比起抽象地讲数轴、坐标系要生动、具体一些，也可以使学生体会坐标这一概念的作用。

当然，数学概念的教学不能只停留在操作层面上，还应上升到抽象层面去理解数学，使概念的形成由"过程"向"对象"转换，从而达到"凝聚"。用范·希尔夫妇（Van Hieles）的话说就是：学习过程是由各层次构成的，用低层次的方法组织活动就成为高层次的题材。对此弗赖登塔尔从另一个角度作了阐述：人们不懂音乐理论仍可以唱歌，不学机械力学照样可以获得熟练的手艺……。而数学必须将学生提高到更高层次，如果不是全面提高，也至少在某一方面提高，那样他才能理解最低层次活动的意义。弗赖登塔尔的阐述揭示了数学的特点，在数学中具体的实例不能代表概念的形成，概念的形成不能仅仅停留在操作层面，必

须上升到理论,也就是说必须用数学语言揭示概念的本质属性,这就是抽象。如上述两个例子必须使学生明确相关概念的数学定义。也就是说,在数学教学中对数学的抽象和具体的关系必须把握好,对任何一方面的忽视都将导致对数学的片面理解。

抽象是我们认识问题的基本方式,抽象在各门学科都存在。但数学抽象是一种特殊的抽象,具体表现在它的抽象的内容、程度和方法上。从内容上说,数学抽象仅抽取事物或现象的量的关系和空间形式而舍弃其他一切;从方法上说,数学抽象是一种构造性活动,是借助定义和推理进行的逻辑建构。因此,数学的研究对象是不存在于现实的,它们只存在于人的头脑中。人们必须借助于思维才能接近它们。如点、直线、线段等在现实中是不存在的。从抽象程度上说,数学抽象达到的程度远远超过自然科学中的一般抽象。由于数学中利用相对初级的概念,逻辑地抽象而定义出新的抽象度更高的概念,使得数学抽象程度逐级升高。

(3) 系统性

数学概念往往是"抽象之上的抽象",先前的概念往往是后续概念的基础,从而形成了数学概念的系统,公理化体系就是这种系统性的最高反映。如有理数概念就是建立在整数概念基础上的,又如点的概念是直线概念的先前概念,直线概念是线段概念的先前概念,线段概念是多边形概念的先前概念,多边形是多面体概念的先前概念。因此,在进行概念教学时,对于具有这一特点的概念系统,可以采用同化的教学方式进行教学,以帮助学生形成概念网络。在进行新的概念教学之前,必须对学生的"先前概念"的掌握情况进行分析,并进行适当的复习。

在数学教学中,并不是每一个概念都具有"先前概念"的,如"点"、"集合"、"排列"、"组合"等概念。这些概念的学习,就必须采用顺应的方法,也就是说必须帮助学生建立一个新的概念系统,并将新的概念作为该系统的基础概念。

因而,为了充分认识概念的系统性,并利用这一特点进行概念的理解,我们在概念的教学中,应充分利用"同化"和"顺应"的方式进行教学。

7.1.2 概念的学习

概念的形成

概念反映同类事物的共同属性,概念学习的实质是掌握同类事物的本质特征。概念形成过程实质上是抽象出某一类对象或事物的共同本质特征的过程。概念的形成过程可概括如下。

(1) 辨别各种刺激模式。这些刺激模式可以是学生自己在日常生活中的经

验或事实，也可以是教师提供的有代表性的典型事例。例如，形成矩形的概念，可以先让学生辨认他们所熟悉的事例，像桌面，墙壁的表面等；形成函数概念，可以先让学生认识在变化过程中，两个变量的依赖关系；

(2) 分化出各种刺激模式的属性。事物的属性是多方面的，不同的学科研究的属性也不同。为了理解某类型刺激模式的本质属性，就需要对各种刺激模式的各个属性予以分化，而数学就是要将事物的形和量的属性从其他属性中分化出来。例如，桌面从形和量的角度可看成是四边形，且两组对边分别平行并且相等，四个角相等；商品和价格可以看成是两个变量之间的一种对应关系等；

(3) 抽象出各个刺激模式的共同属性，并提出它们的共同关键属性的种种假设，再经过反复评估，确定其共同属性。如上面矩形的例子，共同关键属性可假设为：两组对边分别平行并且四个角都是直角的四边形是矩形；两组对边分别相等并且四个角都是直角的四边形是矩形；四个角都是直角的平面四边形是矩形；等等。函数的关键属性可以假设为两个变量具有依赖关系；这种依赖关系是一种特殊的依赖关系，及其中一个变量的任意一个取值都对应另一变量的唯一取值；变量之间的对应关系可以转化为集合元素之间的对应关系，等等；

(4) 概括形成概念。即将抽象出来概念的关键属性用语言概括成定义。如上例中的四个角都是直角及有一个角是直角具有从属关系；四边形只要有"两组对边分别平行""有一个角是直角"就能推出"两组对边分别相等""四个角都是直角"因此只要取前两个关键属性即可，于是将矩形定义为"两组对边分别平行并且有一个角是直角的四边形"；函数概念既可概括为变量之间的依赖关系，又可概括为集合元素之间的对应关系；

(5) 把新概念的共同属性推广到同类事物中去。在这个过程中教师可以用一些概念的等值语言来让学生进行判断和推理。上例中，"对角线相等并且平分"就是矩形概念的等值语言。

形成一个概念有时是一个复杂的过程。上例中函数是中学数学最重要的概念之一，函数概念的形成过程就是一个较难的过程。在初中阶段的函数是用变量之间的依存关系定义的(在一个变化的过程中有两个变量 x,y，对于 x 在某一范围的任意一个值，都有 y 的唯一的一个值与之对应，我们就说 y 是 x 的函数，而 x 称为自变量。)这可以称为"变量说"。在高中，则从非常一般的集合对应出发，将函数看成是集合之间的一种取唯一值的对应(两个集合 A,B 之间的一种对应关系 f，对于集合 A 中的任意一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素与之对应，就说 f 为 A,B 之间的函数关系。)学生在学习过程中，往往不能将这两个函数的概念联系起来，甚至有许多学生不知道究竟函数概念是什么。面对这一问题，如何向学生解释？

其实，这两个定义是从不同的方面对函数概念进行刻画的，而且在应用中各

有其自身的优势。“变量说”是函数思想的根本,数学家和科学工作者主要是从事物的运动中来把握变量之间的依赖关系的;因为,对应说不便于对运动事物的考察。但“对应说”也有其长处,比如 $y = x$ 和 $y = x^2$ 在定义域 $M = \{0,1\}$ 上是否表示同一个函数,用对应说就容易看出两者并无区别。再如,反函数概念的建立,本身就是一个困难的学习环节,通过对应说,学生理解起来要顺利一些,于是函数思想的建立就必须两种定义兼顾。无论是对应说还是变量说,都是刻画在运动、变化过程中两个变量之间的关系,这才是函数概念的本质,也就是说函数是刻画两个量之间的关系的模型,教学函数概念时应该使学生理解这一点。

许多重要的概念,在学生头脑中的形成,不是一蹴而就的,往往需要经历一个过程。如“数”的概念,在幼儿时期便开始渗透,但到了高中,才初步形成。距离概念,最初是两点距离;然后是通过点与直线、直线与直线(平行线)的认识,才初步形成平面上的距离概念;然后到空间,有点点、点线、点面距离,以及平行线和异面直线间的距离,与平面平行的直线和平行平面之间的距离;然后是解析几何中的“距离”,最后将距离推向高维和抽象空间,才初步形成。

对于一些学生难以理解的概念,精心设计教学方案是非常重要的。这里我们给出一个“反函数”概念的理解的教学设计案例。

7.1.3 案例及分析

1. 案例[①]

本案例是关于反函数的理解的案例,学习时注意学生的思维和教师的思维。

(1) 问题的提出

先看一个例子:

已知 $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$,函数 $y = g(x)$ 的图像与 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称,则 $g(3)$ 等于

(A) 3　　(B) $\dfrac{7}{2}$　　(C) $\dfrac{9}{2}$　　(D) $\dfrac{11}{3}$

(第十届希望杯全国数学邀请赛)

站在学生的立场上来分析,教师会发现有一些关键的问题,也就是学生学习的难点问题需要解决。

难点之一:$y = f^{-1}(x+1)$ 是什么意思学生比较难把握。

分析:这个难点是关键性的,对此符号的不解或误解,将直接导致错误的发生。其中一个最自然的错误的猜测是:$y = f^{-1}(x+1)$ 是 $y = f(x+1)$ 的反

① 原案例来自浙江省上虞中学教师金松松,作者作了部分修改。

函数。

难点之二：函数 $y=g(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，它们是互为反函数吗，这一问题也是必须解决的。

（课本上没有这一结论，教师要不要对这一知识进行补充教学，如何教学？）

难点之三：函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数是什么？

难点之四：如何求函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数？

（由于本题是一个具体函数，于是学生会想出多条思路。思路一，先由 $y=f(x)$ 求出 $y=f^{-1}(x)$，再求出 $y=f^{-1}(x+1)$；思路二，先由 $y=f(x)$ 求出 $y=f(x+1)$，再求出 $y=f^{-1}(x+1)$，然后求函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数，得 $y=g(x)$；思路三，直接求抽象函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数，这显然对学生来说要求较高。）

难点之五：$f(f^{-1}(x))=x$ 成立吗？

（这个结论要不要讲，讲了以后会不会加重学生的负担，回答应该是既不会加重学生的负担，还能够使学生对反函数概念有更深刻的理解，问题在于怎样讲。）

我们知道难点四的第二条思路是错的，可为什么有大量的学生会产生这种错误认识呢？这是我们在教学设计中要注意的问题。

对学生而言，只有过了上面的难关，才有可能找到下面的解题途径：

已知 $y=f(x)$ 求出 $y=f^{-1}(x)$，再求出 $y=f^{-1}(x+1)$，再求 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数 $y=g(x)$，从而求出 $g(3)$ 的值。（$y=f(x)$ 的反函数为 $y=\frac{x+3}{x-2}$，从而 $y=g(x)$ 为 $y=\frac{x+4}{x-1}$，得出 $g(3)=\frac{7}{2}$。）

反函数理解较深刻的学生可能会得出以下解法：

先由 $y=f(x)$，求出 $x=f^{-1}(y)$，再求出 $x=f^{-1}(y+1)$，再求 $x=g^{-1}(y)=f^{-1}(y+1)$ 得 $y=g(x)$，再得 $g(3)$。

(2) 寻找新的解决问题的思路

一种简单的既反映反函数本质，又渗透了数学思想的解法如下：

设 $g(3)=b$（方程的思想），则 $(3,b)$ 在 $y=g(x)$ 图像上（数、形的转化，数形结合思想）。

于是 $(b,3)$ 在 $y=f^{-1}(x+1)$ 图像上（简单对称思想），$3=f^{-1}(b+1)$（方程思想），$b+1=\frac{2\times3+3}{3-1}$（体现了反函数的实质，一一映射的观点），得 $b=\frac{7}{2}$。

如果将原题中的直线方程改为 $y=-x$，以上解决方案仍然可行。

(3) 巩固练习

为了巩固上述知识，再用同样的思路来解决另两个问题：

例 1　方程 $x+\lg x=10$ 和 $x+10^x=10$ 的根分别是 x_1、x_2，求 x_1+x_2 的值。

解　由已知 x_1 是 $y=x+\lg x$ 与 $y=10$ 图像交点的横坐标，x_2 是 $y=10^x+x$ 与 $y=10$ 的图像交点横坐标。即 $x_1+\lg x_1=10$，$x_2+10^{x_2}=10$。而 $y=10^x$ 与 $y=\lg x$ 互为反函数，得 $x_2=\lg x_1$，故由 $x_1+\lg x_1=10$ 可得 $x_1+x_2=10$。（这里关键是利用 $y=10^x$ 与 $y=\lg x$ 反函数的关系。）

例 2　设 $y=f(x)$ 有反函数 $f^{-1}(x)$，且函数 $y=f(x+2)$ 与 $y=f^{-1}(x-1)$ 互为反函数，求 $f^{-1}(1)-f^{-1}(0)$ 的值。

解　设 $f^{-1}(0)=b$，则点 $(1,b)$ 在函数 $y=f^{-1}(x-1)$ 的图像上，从而点 $(b,1)$ 在函数 $y=f(x+2)$ 的图像上，即 $1=f(b+2)$。由反函数定义有 $b+2=f^{-1}(1)$，这样既有 $f^{-1}(0)+2=f^{-1}(1)$，从而 $f^{-1}(1)-f^{-1}(0)=2$。

（4）变式

在教学中应该积极采用变式，如函数及其反函数关于 $y=x$ 对称，可以设计如下一些变式：

1）直叙规则（即直接将规则告诉学生）；

2）给出 $f(x)$ 图像，求作 $f^{-1}(x)$ 图像，求作 $f^{-1}(x+1)$ 图像，求作 $y=f(x+1)$ 的反函数图像；

3）已知 $P(a,b)$ 是 $f(x)$ 图像上的一点，判断 $P'(b,a)$ 与 $f^{-1}(x)$ 图像的关系；

4）已知 $b=f^{-1}(a)$，求 $f(b)$（自然得出 $f(f^{-1}(a))=a$，$f(f^{-1}(b))=b$）。

5）给出两个函数关于 $y=x$ 对称，判断它们是否为反函数，并说明理由；

6）已知函数 $f(x)$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称，求 $g(x)$。

这几种变式都是基本的，它们都可以进一步深入演变。

2. 分析

反函数概念在中学数学中是一个十分重要的概念。然而，当我们对教学进行仔细地观察就会发现，许多学生对反函数概念的理解不够深入甚至根本不能理解反函数的意义。如许多学生虽然能求一个函数的反函数，但却并不知道为什么要这样求。而且也对函数与其反函数的关系认识不清，这说明学生并没有真正理解反函数概念。虽然能够背反函数的定义，但却不知道为什么要这样定义，在运用概念解决问题时也会遇到困难。

学生能否较好掌握知识，关键是教师的教学；教学能否成功关键是教师对教学的设计，教学设计的状况又关键取决于教师对知识的理解。在教师对知识有了深刻的认识的前提下，教学设计应该围绕教学的主要任务来进行。对反函数概念的理解应该是函数概念教学的主要任务，为了完成这一教学任务，教师必须对概念进行仔细分析，确定理解的对象和理解的程度以及学生可以借助的知识，理解概念的障碍等。根据有意义学习理论，要使学生对反函数概念理解透彻，教

师必须使学生明确反函数概念学习的意义。

反函数概念的理解依赖于函数概念的理解。对函数概念的理解是形成函数思想的基础,也是理解其他概念的基础。为了使教师能够在课堂教学中把握学生的理解程度,应该从两个方面确定理解内容。

(1) 理解两个函数定义之间的区别与联系

高中学生对函数概念的理解的一个重要的依托是认知结构中已有的初中函数概念。但问题总是辩证的,初中函数概念又可能使学生产生负迁移。许多学生很难说清为什么初中给函数下了一个定义,高中还要重新定义,而且看上去这两个定义又是风马牛不相及的。初中函数概念直观性强,便于理解,而且学生容易运用于日常生活实际。初中函数概念基于函数的“变量说”,是函数思想的根本。高中函数概念将函数看成是两个集合之间的一种“关系”,显然增加了函数概念的抽象性。由于在研究函数性质时很少用到这一概念,似乎这一概念可有可无。但这一概念,即函数的“对应说”在确定一些关系是否函数关系时,是有其独到之处的。

如何使学生理解高中函数定义的必要性和与初中函数定义的关系是高中函数概念教学的重点和难点。实际上,高中函数概念是扩充了初中的函数概念。运动是一切事物、现象发生变化的根本原因;函数是描写运动的有力工具,故初中函数定义是运动的一种直接反映。高中函数的定义,实际上也是运动的反映,而且比初中所包含的运动更广。它不仅包括了当自变量变化时,应变量随之变化的情况,而且包括了当自变量变化时,应变量恒取一个或几个值的情况,就是说应变量相对静止的情况,这正是唯物辩证法在数学中的运用。将静止看成是一种特殊的运动。如果将自变量、应变量的变化看成是在某个集合中取值,将函数不变看成是变化的特殊情况,那么高中函数概念就涵盖了初中函数概念,让学生理解这一点并体会到由于概念的抽象性所引起应用的广泛性是十分必要的。另外,初中函数概念具有宏观描述变化过程的特点,高中函数概念却更注意微观特点;初中是从整体上观察一个变化的过程,高中是从元素之间的关系观察一个变化的过程。

函数的对应定义不只包括了两个数量之间的运动变化关系,而且包括了任意对象之间的运动变化关系。如在布尔开关线路中,任何一种线路的变化的结果,都会导致一种实际线路的效果。芝加哥大学的尤什斯金(Usiskin)教授认为,最为人们常用、普及的数学方法是“函数方法”。从广泛的意义说,一切变化都可归类为函数变化,任何关系都可以认为是函数关系。在数学教学中,使学生体会函数思想的意义比掌握一些函数的性质更加重要。

建构主义教育理论认为,数学是一个探究和认识的过程。函数概念的理解过程也是一个动态的过程,学生对概念的正确理解,有利于对各类函数性质的认

识;反过来,对各类函数性质的研究又可以加深学生对概念的理解。因此,学生对函数概念的理解是一个不断发展的过程,教师应将对概念的理解贯穿在函数教学的整个过程。教师在教学中,必须跳出具体的教学内容,把握到函数教学的本质,才能处理好学生的认识过程与具体内容之间的关系。

(2) 怎样帮助学生理解

建构主义理论认为,学生在学习新的知识时,总是力求与原有的知识结构进行比较,并适当调整自己的思维来适应新的知识。学生在学习高中函数概念时,知识结构中可以利用的知识很多,如对应、变化的概念等;但与概念学习最直接的理论知识应该是初中函数概念和对映射的认识。

学生对初中函数概念的认识既可以帮助学生理解高中函数概念又可以对学生高中函数概念的学习产生负面影响。教师只有在教学过程中加入自身对其进行的具有独创性的解释,这一概念才能活生生地展现在学生的面前,学生认识它就容易多了。这就是说,只有教师对函数概念进行过认真地分析,形成自己的"函数观"才能帮助学生理解概念。所以在教学中往往不是选择教学方法的问题,而是教师的观念决定了教学的过程和成功与否。

解决了两个定义之间的关系问题后,接下来的问题就是一些具体问题。如我们将函数定义为集合 A 到集合 B 的一个映射,学生的理解问题就可能是,为什么 A 是函数的定义域而 B 却不一定是函数的值域。要解决这一问题,就要求教师在映射的教学中就使学生理解映射的几种情况。当然除了借助于映射这一概念对函数概念及其相关概念进行理解外,还有其他途径,关键是教师要创造性地开展教学。

前已说明,学生对函数概念的理解是一个动态的过程,只有在不断运用的过程中才能不断加深对概念的理解。然而,现行高中教材在概念后却很少运用概念解决问题。这需要在教学中加以补充。如在反函数的概念的教学中,课本上的定义很可能使学生对反函数的概念的理解不深。教师如能从函数的"对应说"出发,引导学生理解反函数,则不仅可以使学生加深对反函数的理解,也会使学生加深对函数概念的理解。

(3) 如何检验学生理解情况

检验学生对概念是否理解是教学中一个重要的环节。学生对函数概念的理解有其外部表现和内在心理变化。对于外部表现的检验,可以通过给出例子、给出反例、检验例子、知道性质、理解概念之间的关系、运用概念解决问题等来检验。而内在心理变化却很难检验,如我们很难判断学生是否具有概念的形象,是否了解概念的重要性,是否能透过定义看到概念的本质等。目前比较多的方法是让学生通过语言来表达自己的概念形象或述说自己对概念重要性的理解。如函数概念就需要学生认识到,在自然界中一切都在运动变化之中,而函数就是数

学描述这些运动变化的模型，对函数的研究，也就是对运动变化规律性的研究，所以函数是数学中一个极为重要的概念。

（4）重视概念的整体性教学

教材一般是将概念体系编排为章节的结构，教师按顺序讲授。如果能够把各章节的概念的讲解纳入概念系的宏观图式中，有利于学生从整体把握概念的关系。特别是教师如果能够把数学概念发生发展过程中的相互关系作简要的叙述，让学生对各结点和分支在整体中的地位和相互联系有所了解，则有利于学生把握概念间的关系，实现对知识的整体化，形成概念的网络。函数概念的教学更应该注意整体性，与函数相关的概念有许多，形成概念系统是学生形成函数思想的基础。

7.1.4 概念的同化与顺应

现代认知心理学认为知识获得的最终表现是认知结构的形成和发展，并对认知结构进行了多方面的研究，对认知结构的形成和发展持同化论的观点。如奥苏伯尔认为，学生知识获得的心理机制是同化[①]，即知识的获得是学习者认知结构中原有知识吸收并固定要学习的新知识的过程。

随着年龄的增加，学生的认知水平在提高，他们认知结构中的知识越来越丰富，所掌握的概念也越来越成系统，相应的，概念同化也逐渐成为他们获得概念的主要形式。

1. 用概念同化方式学习概念有以下几个阶段

（1）揭示概念的关键属性，给出定义、名称和符号（这里的符号可以是文字，如三角形）。如“一次函数”的定义为“具有 $y = kx + b(k, b \in \mathbf{R})$ 形式的函数”；

（2）对概念进行特殊的分类，讨论这个概念所包含的各种特例，突出概念的本质特征。上例中，可讨论的一次函数特例是：$y = kx, y = x, y = b, y = 0$ 等等。要突出函数表达式中，自变量 x 的次数是一次这个关键特征；

（3）使新概念与已有认知结构中的有关概念建立联系，把新概念纳入到已有概念体系中，同化新概念。上例中，把一次函数与函数概念、一次多项式概念等等作比较，认识一次函数与这些相关概念的联系与区别；

（4）把新概念纳入到相应的概念体系中去，使有关概念融会贯通，组成一个整体。

① 张大均．教育心理学．北京：人民教育出版社，1999.7(109)．

2. 概念的同化有以下三种基本形式

(1) 下位学习

下位学习是指新概念通过学习纳入到原有认知结构中已有的包摄性较广的概念之下的一种同化过程。例如,学生已知"平行四边形"这一概念的意义,那么,我们可以通过"菱形是四条边相等的平行四边形"这一命题来界定菱形。在这种情况下,通过对"平行四边形"予以限定,就产生了"菱形"这一概念。又如,学生学习了数列概念,再学习等差数列的概念,只要对一般数列概念增加"从第二项开始,每一项与前一项的差都是一个常数"这一限制条件就形成了等差数列的概念。而平行四边形、数列分别相对与菱形、等差数列而言就是包摄性较广的概念。

目前的教材将数学作为一个演绎体系。因此,教材的认识一般采用下位学习的方式进行编排的。如先学习函数概念,再学习指数函数、对数函数等初等函数。然而,人们对事物的认识在很大程度上是先认识一些特殊问题,再通过抽象揭示一类事物的本质属性。因此,教材的编写与人们的真实的认识过程是有距离的,这就要求教师,在教学设计中,依据学生的具体情况对教材进行创造性的处理,努力体现人的认识的一般方式,从而使数学给学生"亲切感"。

(2) 上位学习

上位学习是指新学习的概念包含原有认知结构中的概念的一种同化过程。如已经掌握了二次函数的极值,三角函数的极值的前提下,再学习一般函数的极值的概念就是上位学习,上位学习是一个归纳性的学习过程。

(3) 组合学习(也叫并列学习)

组合学习是指新概念与原有概念不产生上位关系,也不产生下位关系,新概念与原有概念在内涵和外延上都是并列的。如向量—线段—点,这几个概念成并列关系。

概念同化是将新概念与原有概念相联系,并按一定层次排列,形成一种网络系统,它需要学习者具有意义学习心向,并且具有同化概念的适当的上位概念和下位概念,即新概念的挂靠点。

3. 概念的顺应学习方式

与概念的同化一样重要的是概念的顺应,当所学概念不能与认知结构中的相关概念建立起联系时,就要引导学生用概念的顺应的方式将所学概念纳入到认知结构中去。

概念的顺应学习就是要在原有的认知结构中,建立一个与原概念系统并列的概念体系,从而形成新的认知结构。如学习排列、组合概念时,由于原认知结构中没有可以将其纳入体系的概念体系,也就是新概念在原有认知结构中找不到有直接联系的概念,于是就将其与原概念体系并列,从而形成新的概念体系。

如果我们将原认知结构比喻为图书馆的藏书，当新买的书与原来的书没有共同点时，就必须从新设置一个书柜来陈列它。

概念的同化与顺应是概念学习的两种基本的方法，依据建构主义学习理论，学习的过程应该是认知结构不断完善的过程。因而，教师不仅应该将新概念“教给”学生，更应该依据新概念与学生原有认知结构的关系，指导学生利用同化或顺应的方式将新的概念纳入原有认知结构。

7.1.5 影响概念学习的因素

1. 学生的经验

学生掌握的科学概念许多都是从日常概念中发展而来的，因此，教师应注意指导学生从自己的日常生活中积累有利于概念学习的经验，同时又要注意充分利用学生的日常经验，为概念教学服务。

有的学生能从过去的经验中找出与新概念相关的概念，在比较它们异同的基础上建立起新的概念，而有的学生则会受这种经验的干扰，产生错误的概念理解。例如，学生对平方运算是从小学就开始接触的，在他们的经验中，平方运算只与“正”联系在一起。在学习“平方根”与算术平方根这两个概念时，由于一个正数的平方根涉及正负两个值，这与他们的经验便产生冲突，于是就出现了“平方根”概念学习的极大困难；与此同时又要学习“算术平方根”概念，这样一来就出现了有时要取两个值，有时又只能取一个正数的情况，从而引起学生理解上的混乱。因此学习“二次根式”时，既要注意由 $\sqrt{a^2}=a(a>0)$ 引出 $\sqrt{a^2}=|a|(a\in\mathbf{R})$，又要注意将 $\sqrt{a^2}=|a|(a\in\mathbf{R})$ 与 $(\sqrt{a})^2=a(a>0)$、$\sqrt{a^2}=a(a>0)$ 作比较，找出它们的差异，并让学生有充分的实践机会，以建立起这种联系与差异的感觉。

为了防止经验对新概念学习产生的消极影响，首先仍然应该在基本概念的教学上狠下工夫。要把基本概念放在中心地位，使它成为联系相关知识的纽带，突出概念之间的内部联系性。数学中有的概念是具有统贯全局作用的，例如“集合”、“函数”、“方程”、“距离”等。这些概念就应该让学生有反复接触的机会，并以它们为基础，演绎出其他概念。用奥苏伯尔的话来说就是：从学习最一般的概念然后逐渐分化出较具体的概念，往往是最有效的。例如，高中代数教材编排由“对应”到“映射”再到“函数”再到“幂函数”、“指数函数”、“对数函数”等具体函数，就是按照“逐渐分化”原则安排的。当然，并不是所有内容都可以这样安排，例如“数系”就不可能按照“复数 ⇒ 实数 ⇒ 有理数 ⇒ 无理数 ⇒ 整数 ⇒ 分数 ⇒ 自然数”的顺序安排，因为这一顺序与人们认识“数”概念的日常经验相反。对于这样的内容，教学时就要注意给出恰当数量的实例，使学生有一个从

各个具体例子中概括出共同特征并再抽象出本质特征的机会(实际上就是应该注意应用“概念形成”的教学策略),由浅入深、由易到难、由已知到未知地进行学习。同时还要注意及时引导学生探讨新旧概念之间的关系,找出它们的相同点和不同点。

这里强调了让学生利用概念进行反复练习的重要性,这种练习不能与机械重复等同,因为数学概念与学生的现实之间的距离比较遥远,如果他们没有机会对概念进行反复练习,那么达到理解所需要的那种感觉就难以建立。例如,“有理数”、“无理数”概念,学生就是在对2、3、5等数进行开平方的计算过程中,看到不只是有限小数或循环小数,有些数是无限不循环小数。在这样的运算、比较的过程中,学生认识了不同的小数,理解和掌握它们的相同和不同就比较容易,在此基础上再给出概念就容易接受了。当然,这种反复训练应该与学生的认知水平相适应,应该及时地向学生提出理解上的高标准。随着学生年龄的发展,数学学习的深入,他们可以逐渐做到在抽象概念的指导下进行实际训练,使概念的理解与应用之间相互促进,以加快理解速度、提高训练效率。

2. 学生的概括能力

概括是形成和掌握概念的直接前提。学生学习和应用知识的过程就是一个概括过程,迁移的实质就是概括,概括又是一切思维品质的基础。学生掌握概念,直接受他们的概括水平的制约。要实现概括,学生必须能对相应的一类具体事例的各种属性进行分化,经过分析、综合、比较而抽象出共同的、本质的属性或特征,然后再概括起来。在此基础上,进行类比,即把概括而得到的本质属性推广到同类事物中去,这即是一个概念运用的过程,又是一个在更高层次上的抽象概括过程。最后,还要把新获得的概念纳入到概念系统中去,即要建立起新概念与已有的相关概念之间的联系,这是概括的高级阶段。

数学概括能力中,很重要的是发现关系的能力,即发现新概念与已有认知结构中相关概念之间关系的能力。如果发现不了这种关系,概括也就难以进行。例如,在学习复数的模这一概念时,获得的是:复数 $z=a+bi$ 的模是与复平面内的点 $z(a,b)$ 相对应的有向线段的长度,即点 $z(a,b)$ 到原点的距离,也叫复数的绝对值。为了让学生经历复数模的概括过程,教师可以引导他们将它纳入到已有的数的绝对值概念系统中去。在具体做法上,可以引导学生比较复数的绝对值与实数绝对值的异同,把后者看成是前者的发展。然后再就几何意义的解释上,将实数轴看成是复平面的一部分,将实数绝对值解释成复数的模。

3. 数学语言表达能力

语言给事物以命名,对事物的属性与功能进行表述。通过命名,可以使人头脑中关于事物的表象简约化。因为事物有了自己的“名字”,当它的表现形式发生改变而把本质特征掩盖起来时,人们可以利用这个“名字”以避免认知上的混

乱。对事物的属性或功能的叙述，可以帮助学习者深化概念学习，使概念各要素之间的关系更加明确，使一个概念与其他概念之间的联系与区别更加清晰。语言使个体在理解概念的过程中，无需从头观察事物或回忆有关表象就能直接形成概念。所以，语言表达是概念学习过程中非常重要的一个环节，也是概念教学的难点。数学中各种结论的获得都要依靠逻辑推理，而数学语言表达能力直接影响到逻辑推理的进行，当然也影响到数学概念的形成。另外，学生能够用自己的语言正确地叙述概念，解释概念所揭示的本质属性，这是学生深刻理解概念的一种标志。

数学语言是符号语言，而且这种语言具有世界通用性。无论在世界的各个地方，只要人们具备了一定的数学知识都能理解“$x^2-3x+2=0\Rightarrow x_1=1, x_2=2$”、“$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$”等所表达的意义，因此使学生掌握好数学语言是有重要意义的。但是，由于数学语言的抽象性，给学生理解带来一定的困难。许多现象学生本来是可以理解，一旦要求他们用数学语言将一个实际变化过程中的关系叙述出来的时候，困难就产生了，如数列极限的描述学生比较好理解（当 n 无限增大时，数学的项无限接近某一特定的值），但要求他们用数学符号语言来描述这一过程时（即用 ε—N 语言刻画），就有一定的困难。这一语言障碍，还使学生迁移到概念本身，认为极限是一个很难的问题。因此如何使学生较好地运用数学语言描述一个变化过程或现象是数学教学中的难点。

许多数学概念的语言表述都代表了概念产生的条件，是相应事物在数或量方面的发生发展过程的一种抽象。因此，概念的叙述过程实际上表明了概念应用时应该遵循的一种操作程序。例如，“单调函数”概念的语言表述是“设函数 $f(x)$ 的定义域为 E，如果对于属于定义域 E 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；如果对于属于定义域 E 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数”。根据这个定义的叙述，我们可以总结出判断函数单调性的操作程序是：

（1）设 x_1, x_2 是给定区间上的任意两个自变量值，且 $x_1<x_2$；

（2）分别计算 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$；

（3）判断差 $f(x_1)-f(x_2)$ 值的符号。

要深刻理解和熟练应用概念，对概念的语言叙述过程进行分解，以使学生掌握概念应用的操作程序不失为一种好的办法。但要注意的是这只是理解概念的途径，并不是目的。

数学语言具有形式化的特点，因此，学生不仅要理解数学语言，而且要能够将数学语言与实际意义有机地结合起来。如上述函数单调性的概念，如果学生对“单调函数”的概念的语言不能与实际意义联系起来，就可能机械记忆形式语

言，在运用概念解决问题时就容易出错。如有的学生在判断了 $f(x_1)-f(x_2)$ 值的符号后，再凭记忆，判断函数的单调性，或者干脆记忆“不等号方向相同为增函数，不等号方向相反为减函数”，这都是对形式语言没有透彻理解所形成的问题。我们必须使学生认识到单调函数是某些函数所具有的特点，这一特点表现为，随着自变量的增大函数值相应的增大(增函数)或减少(减函数)。掌握了数学语言的实际意义，在运用概念解决问题时，就能够灵活处理各种情况，而不是死记定义了。

4. 学生的抽象思维状况

数学教学中最困难的部分应该是概念的教学，产生困难的原因就是数学概念的抽象的特点与学生的抽象能力正处于发展阶段的矛盾。我们知道任何一个数学概念都有一个抽象的过程，而且越是基本的概念其过程往往越复杂。如自然数的概念、整数的概念、有理数的概念、实数的概念，这些概念的定义都是一个极为抽象的过程。如自然数的概念涉及集合的势的概念，而整数、有理数、实数的概念都涉及集合的卡氏积、等价关系等概念，因此，在中学详细介绍有一定的困难，因此，可以采用简单介绍的方法进行教学。

现行的教材对于各种数的定义都是采用“像……一样”、“包括”等词给这些概念下定义，如像 1,2,3,…这样的数就叫自然数，实数包括有理数和无理数等。这种“定义”的方法，一方面没有揭示这些概念的本质属性，另外也不符合定义的基本原则，应该怎样处理这些问题，是一个值得进一步研究的问题。

7.1.6 数学概念的教学步骤

1. 给概念下定义

一般来说，数学中的多数概念都是精确的，可以通过下定义的方式进行教学。在逻辑学里，定义就是明确概念内涵的逻辑方法。例如：平行四边形就是两组对边分别平行的四边形，它采用了“ …… 就是 …… ”的形式，若用“DS 就是 DP”来表示这种定义形式，那么 DS 称为被定义项，它是我们需要加以明确的概念，DP 称为定义项，是用来明确被定义的概念，“就是”称为定义联项。

任何定义都离不开上述三个部分，但是具体叙述时，表达的方式是可以多种多样的，以下介绍一些下定义的方式。

(1) 属差式定义

这是最常用的定义方式，它可以表述为：

被定义概念 = 邻近的属概念 + 种差

邻近的属概念是指在一个概念的各个属概念当中，其内涵与这个概念的内涵之差最小的那个属概念。例如，平行四边形是矩形的邻近的属概念，而四边形、多边形都不是矩形的邻近的属概念。

在同一属概念下的各个概念的区别成为概念的种差。如“一个角是直角”就是矩形区别于其他平行四边形的种差。值得注意的是，对于同一概念，可以选择同一属的不同种差给概念下定义，例如可以用两种方式给平行四边形下定义。

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形；

两组对边分别相等的四边形叫做平行四边形。

(2) 发生式定义

发生式定义是指用一类事物发生或形成的过程作为种差作出的定义，用这种定义方式下定义时，应紧紧突出其“形成或发生”的过程这一特点。例如，圆是由平面内一个动点饶一个定点旋转一周所形成的封闭曲线；三角形的顶点到它的底边作一条垂线，顶点到垂足之间的距离叫做三角形的高等都是采用发生式定义方式定义的。

(3) 关系式定义

关系式定义是指用对象之间的关系做种差作出的定义。例如偶数就是能被 2 整除的整数；零是和任何数 a 相加得 a 的数。

(4) 外延式定义

外延式定义是通过对概念的外延作出规定而对概念下定义。例如有理数和无理数统称为实数，圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为圆锥曲线等。

2. 定义必须遵循的规则

下定义是一个十分讲究的教学步骤，以下就属种差的定义方式介绍几条规则。

规则 1. 定义应恰如其分。就是说，一个概念的定义所确定的外延，必须和它所代表的对象的外延相等。

把定义下得太宽的例子：平行线就是不相交的两条直线。此定义包括了异面直线。

把定义下得太窄的例子：无理数就是开不尽的有理数的方根。实际上，像 π，e 都是无理数，但此定义却将其排除在外。

规则 2. 定义不能循环。这是指定义项不能直接或间接的包含被定义项。如定义直角用垂直的概念，定义垂直时又用直角的概念。又如点就是像“点”一样的几何图形等都出现了循环的问题。

规则 3. 定义项不能包含含混不清的概念。

定义项不能用比喻，例如“椭圆是压扁的圆”，这种比喻虽然直观，但不能揭示事物的本质属性。

定义还要简明，即定义中不要含有能由推理得出的本质属性，如“两组对边分别平行且相等的四边形是平行四边形”。

规则 4. 定义项一般不能用否定形式。如“偶数就是非奇数”、“不是有限的

集合称为无限集合”这样的定义不能揭示事物的本质属性。在某些特殊的情况下(如受学生的理解能力的限制)用否定的方式来定义一些概念还是需要的,如“无理数就是无限不循环的小数”。

7.1.7 建模思想对数学概念教学的意义[①]

由于“哲学上把概念理解为人脑对事物本质特征的反映。”[②]因此概念在人脑中的形成过程,也就是对事物的认识、归纳、抽象的过程,是从感性认识上升到理性认识的过程。从概念的获得过程来看,一般基本方法有两种,即概念的形成与概念的同化,数学建模思想在数学概念形成过程中具有指导意义。

“所谓数学模型,指的是对现实原型为了某种目的而作抽象、简化的数学结构。”[③]而建模思想实际上就是抽象和转化思想,对于数学概念而言即是将现实事物的本质特征抽象出来并转化为数学概念的思想,将建模思想运用于数学概念形成过程,也就是让学生体验这一过程,这对学生领会数学的精髓,掌握数学的方法具有重要意义。

用建模思想指导概念教学与目前中学常用的概念教学思路的不同之处就在于教学的侧重点不同,我们以数列概念为例来说明。按目前一般教学,数列概念教学主要步骤为“简单介绍有序变化的例子 ⇒ 给出数列定义 ⇒ 通过辨析理解定义”,将教学重点放在通过举例区别哪些是数列,哪些不是数列,从而记忆数列具有“有序”的特点。这一教学模式不能使学生理解为什么数列必须具有“有序”要求,换句话说,对为什么要研究“有序”排列的一列数的问题不理解。按建模思想进行数列概念教学的步骤为“师生共同寻找有序变化的例子 ⇒ 用数学语言刻画其共同属性 ⇒ 给出名词‘数列’代表这一概念”,将教学重点放在“数列”这一概念的产生过程,从而不仅可以使学生知道数列是“有序”的,而且可以从数列概念的产生过程和研究目的中理解为什么要规定数列是有序的。因此前者的教学只能使学生认识概念是怎样的,而后者不仅使学生认识概念是怎样的,更能使学生认识概念为什么是这样的。

1. 可以帮助学生认识数学的本质

对数学本质的认识也就是对“数学是什么”的理解,这是一个人数学观形成的基础。目前在基础教育阶段,虽然学生用了十几年的时间学习数学,但由于数学教学比较注重解题训练,这种训练并不能导致对数学的真正理解。大多数学生对自己每天面对的这门学科并不知道是什么,从根本上堵住了学生对数学产

---

① 刘咏梅,戴翠红.用建模思想进行数学概念教学.中学数学研究,2007.10.

② 曹才翰,章建跃.数学教育心理学.北京:北京师范大学出版社,1999.12.(83)

③ 张雄,李得虎.数学方法论与解题研究.北京:高等教育出版社,2003.8.(404)

生兴趣的可能性，这也就可以解释目前普遍存在的被动学习现象产生的原因。

我们知道，兴趣是学习的原动力，而真正的兴趣是建立在对事物的理解之上的，正所谓知之深才能爱之切。在学生对“数学是什么”一无所知或错误理解的前提下谈论兴趣的培养，是毫无意义的。当然，我们不可能也没必要用大量的时间来讨论“数学是什么”，但通过概念教学让学生领会数学的本质是可行的也是必要的。这一目的的达到就必须借助于建模思想。建模思想指导下的概念教学，将教学的重点定位在概念的形成过程。学生从教学过程中可以认识一个数学模型的产生过程，从而对数学研究问题的方法和途径有较好的认识，由此可以帮助学生认识数学的本质。如数列教学之例，可以使学生认识到数学定义是人的创造；创造的依据是客观事物，从而让学生从数学与客观事物的联系中认识数学，认识数学研究问题的方法，并通过积累达到对数学本质的理解和认识。

一旦我们对数学的本质有了理解，便可以对数学概念教学的目的有更清楚的认识，由于概念是人的创造物，因此，认识创造过程便比记住概念本身更有意义。

2. 可以使学生“跳出”概念来理解概念

在数列概念的教学模式比较中，我们可以看出目前所常用的教学模式与建模思想指导下的数学概念的教学模式所不同的地方在于：前者将对概念的理解建立在对概念的定义的反复辨析上，而后者将概念的理解建立在对概念的建构过程体验上；前者是从概念本身来理解概念，后者是“跳出”概念本身来理解概念。

柯朗认为“要问当作实体的这些对象究竟是什么，这是没有意义的，即使有的话也不可能在数学内部解决。”①因此在进行概念教学时，应将注意力集中在概念的作用和意义的理解上，而不应只纠缠在对概念的定义反复字面理解上，因为这种纠缠是无法体会概念的价值的。

实际上，要使学生体会到数学是一种创造活动，“是一门心灵自然科学（Borel A）”②仅仅依靠反复从字面上理解，甚至背诵概念的关键词，是难以奏效的。必须使学生“跳出”概念本身，对概念进行理解。要让学生认识到，概念是反映事物本质特征的数学模型。在概念的定义中就必须突出某类事物的共同的、本质的特点。这就是概念为什么要这样定义而不那样定义的原因，这正是要识庐山真面目，不能只在此山中。建模思想的实质就是使学生通过概念的形成过程，认识概念的作用和研究意义，从而达到理解概念的目的。

---

① ［美］R. 柯朗，H. 罗宾. 什么是数学. 上海复旦大学出版社，2006.7(5)

② 郑毓信. 数学教育哲学. 成都：四川教育出版社，2001.9(12)

3. 可以从公理化方法体会数学概念的意义

数学概念是数学思维的基础,也是数学研究的立足点,目前的教学由于对建模思想的忽视,使学生对概念的重要性没有足够的认识。建模思想突出了概念的形成过程,突出了数学研究的基本特点,就是公理化的方法。"公理化方法就是选取尽可能少的一组原始概念和不加证明的一组公理,以此为出发点,应用逻辑推理规则,把一门科学建立成为一门演绎系统的一种方法。"①公理化方法能反映概念之间的内在联系,使学生认识"数学概念往往具有系统性,先前概念是后继概念的基础,而公理化系统就是这种系统性的最高反映。"②也就可以使学生认识为什么要引进某概念,这一概念对整个概念系统中的重要意义是什么。

当然抽象地介绍公理化方法,在中学同样是不可能也没必要的,但学生如果把握不了公理化的精髓,便很难把握数学概念的意义。因此结合实例使学生体会概念之间的内在联系,从而领会其重要性是可行的也是必要的。如在计算多边形的面积时,学生一般都能将多边形划分为若干个三角形来求,因为三角形的面积计算是学生熟悉的,然而对三角形的面积公式的来源学生却并未注意。使学生认识这一问题的解决过程,便是使学生体会公理化思想进而理解概念重要性的极好机会。因为如果问三角形面积公式的来历,学生会想到平行四边形的面积,再问平行四边形的面积,学生会想到长方形的面积,若再问长方形面积公式的来源,有学生会想到正方形的面积公式,再问正方形的面积公式的来源,学生便难以回答了。其实正方形的面积是多边形面积的基础,而且也是一个原始概念。

上述例子说明,在数学研究中存在一些研究的"起点",这些起点便是数学研究的支柱点。让学生从概念的形成和发展过程认识概念之间的联系,这样的学习学生不仅体会了公理化思想,而且也很自然地会重视概念,特别是起"支点"作用的概念在数学研究中的作用。从概念的学习中学生也就可以体会"数学首先是一种探索研究的方法。这个方法包括对所讨论的概念认真地下定义以及明确地给出一些用于推理的假设(Chavan Y)"③的含义。

总之,用建模思想指导数学概念教学,有利于学生对数学的认识,而只有对事物的理解和认识,才能产生对事物的兴趣,因此从这个意义上说,对提高学生兴趣从而提高数学教学的时效性具有重要的意义。

7.1.8 概念教学策略

数学概念的学习有两种基本形式:由具体到抽象的概念形成和由旧知识到

---

① 张雄,李得虎.数学方法论与解题研究.北京:高等教育出版社,2003.8(172)

② 曹才翰,章建跃.数学教育心理学.北京:北京师范大学出版社,1999.12(87)

③ 郑毓信.数学教育哲学.成都:四川教育出版社,2001.9(15)

新知识的概念同化。作为这两种形式的具体化,则主要体现在数学概念的引入、理解、巩固与深化等过程中,而这种过程正好需要数学概念教学策略的指导。

1. 概念的引入

概念的引入是概念教学的第一步,这一步如何做,将直接关系到学生对概念的理解和掌握。一般我们可以采用如下一些引入的方法。

(1) 通过直观引入

例如无理数的概念产生于度量之中,是无限次度量手续的数学概括,但其真实内容的精确描述则要用到严格的极限理论。学生理解这一概念的思维障碍是无限不循环的小数到底是什么数?为此,在引入无理数概念时,为了给学生以丰富的感性认识,可以充分利用已有的数学概念,选取恰当的数学模型。例如,可以用不被公度的单位正方形的对角线长作为它的几何模型,用开平方作为它的代数程式,再把两者结合起来,就可以给学生留下比较深刻的印象。

再如,向量的和的概念,教材描述的大意是:已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 A,分别作与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相等的向量,并以此为两边作平行四边形,而平行四边形过 A 点的对角线所对应的向量就是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和。

许多学生想不通,为什么要这样规定。这就是因为数学概念教学缺乏与实际生活的联系而产生的问题。有的(北京)教材在处理这个概念时,先是提出问题"河中水流自西向东每小时 20 公里,小船自南岸沿正北方向行驶,每小时 40 公里,问该小船的实际行驶方向及速度的大小。"进而举出一些例子:"如果一个质点由点 A 移向点 B,又由点 B 移向点 C,那么从点 A 到点 C 的位移就是质点从 A 到 B,再从 B 到 C 两次位移的和。""两个人同时推一个物体,那么物体受到力的大小应怎样计算。"等,最后写出对向量的和的定义。这样处理数学概念,就是先给出问题,给出基本事实、实际背景,引导学生从问题出发,分析、抽象、概括出数学概念,让学生去经历发现再创造的过程。这样做符合学生的认知规律,学生便于理解,不容易产生不必要的怀疑。实际上,教学中强调概念的形成过程,强调通过提出问题、解决问题实现教学目标,使教学目标融入教学概念的形成过程之中,既体现出知识上的要求,又体现出思想方法上的要求。

(2) 通过实际需要引入

例如要表示相反的量而引进负数、由于开方的需要引入无理数、由于负数开偶次方的需要引入了复数。在数学发展早期,由于实际问题不仅诞生了许多数学概念,而且还诞生了许多数学分支。如中国古代数学的形成、微积分的创立等,因此实际需要是数学研究的源泉,教师在教学中,应特别注意从实际问题中引入概念或其他数学知识。

2. 概念的理解

概念的理解是概念教学的中心环节,它以学生能否真正掌握概念的内涵,然

后根据内涵去确定概念的外延为理解的标准。

(1) 利用不同的例子突出概念的本质属性

对概念本质属性的认识,是理解和鉴别对象是否概念所反映的事物的前提,对本质属性理解不清,就会在运用时出现混乱。因此在概念教学时,我们可以通过例子让学生辨别,使对概念本质属性的认识清晰化。

如集合的表示法一直是高一新生很长一段时间难以掌握的,甚至到了高二、高三还经常写错,主要原因是对集合表示法的概念没有深刻、全面的理解。针对这个问题,我们可以举出下列问题,让学生讨论。

例1 判断下列命题的真假

A. 实数集 $=\{\mathbf{R}\}$;

B. $\mathbf{R}=\{$实数$\}$;

C. $(-1,1)=\{(-1,1)\}$;

D. $\{(x-1)(x+1)=0\}=\{-1,1\}$.

(2) 通过列举反例并说明理由,进一步理解概念的本质属性

从正反两方面进行概念教学是理解概念行之有效的方法,为了使学生进一步理解数学概念的内涵,应重视用反例的方法。

如反函数是一个难点概念,可以用以下例题来测试学生对反函数概念的掌握情况:

例2 如果 $f(x)$ 存在反函数,那么(1) $f^{-1}[f(x)]=$?(2) $f[f^{-1}(x)]=$?(3) $f^{-1}[f(x)]$ 与 $f[f^{-1}(x)]$ 相等吗?

(3) 多层次、多方面地进行抽象概括

许多概念的理解不是一次完成的,要有一个长期反复的认识过程。概念的抽象概括也要多层次、多方面地进行,对于不同层次的学生应该提出不同的理解和运用要求。如集合的概念在义务教育阶段就由简单到复杂地出现了一些集合的问题,其实就是积累集合的感性认识,到了高中才将学生的感性认识上升到理性认识,但也是逐步完成的。尽管集合的概念经历了很长的学习过程,但是直到高中毕业许多学生对其理解还停留在将其看成是一个表达方式,如用来表示不等式的解、表示区间等,直到进入大学学生才逐步理解集合为现代数学的基础的问题。

在中学阶段认识不能一次完成的概念还有许多。如最常用的实数概念,在中学就处于初步认识阶段,而不能用极限的方式给出严格的定义。再如极限的概念,要使学生在中学就完全理解极限的形式化定义是困难的,可以先使其从直观的角度理解极限的含义,并记忆定义,然后在反复运用定义的过程中逐步理解定义。所以许多概念在教学时,可以先让学生记忆,并在以后的学习中引导学生逐步地理解。

(4) 下定义或用简练的语言描述概念的本质特征

如上所述,许多概念的理解是逐步完成的。为了学生能够准确理解概念,在学生对概念有了初步认识以后,用下定义或用简练语言描述(主要是一些原始概念)的方式将概念固定下来是一种有效的方式。这种方式可以确定概念的本质属性,从而不容易产生歧义,因此便于学生把握概念。

(5) 注意概念的比较

比较是加深理解的重要方式。如通过比较方程与不等式,学生可以把握这两种模型的意义和作用,对其解法和解的意义也就能有更深的理解。又如通过比较函数的"变量"定义方式和"对应"定义方式,我们可以从两个不同的方面理解同一对象。

3. 概念的巩固

概念的获得是一个艰巨的过程,一旦学生获得了对概念的初步认识,也就是对概念有了一定的理解,便应通过各种方式来巩固概念,以便利用它们来"扩大"概念的系统。概念的巩固应该是一个强化的过程,因此应该采用相应的措施。如可以让学生叙述自己对概念的理解,也可以通过各种辨析加深理解。

4. 用建模思想进行概念教学的一些建议

(1) 教学应突出概念的抽象过程

为了使学生通过概念的形成过程领会数学的本质,教师必须改变以往将对概念的理解作为教学唯一重点的做法,应将概念的理解和抽象过程都作为教学的重点,而且应更重视概念的抽象过程,因为学生把握概念的抽象过程是真正理解概念的基础。也就是说教师应突出由实际背景抽象出数学概念的过程,也就是建立概念这一模型的过程的教学。

如在前例"数列"概念教学时,教师不应将教学重点放在让学生辨别什么是数列上,更没必要反复强调数列是"有序"的,而应引导学生发现在物质世界存在一类具有有序变化的事物,让学生理解将这类事物的共同特点抽象出来,并形成数学模型,便产生了"数列"的概念。

由于数学概念是人的创造物,是"为了描摹现实世界提供数学模型"①,也就是说,是人的主观能动性在数学研究中的体现。因此数学概念的形成过程实际上是人的创造过程,是依据物质世界和数学研究本身所进行的创造过程,概念教学就应该使学生体验这一过程,学会创造的方法。

(2) 要在概念的教学中领会和学习数学思想方法

希尔伯特指出"数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和方法的发现

① 张奠宙,张广祥.中学代数研究.北京:高等教育出版社,2006.1(95)

密切联系着。”[①]因此，数学方法是数学发展的推动力，而数学概念的形成过程的抽象方法，是数学方法的重要部分。其实抽象不仅是数学的重要方法，也是基本特点，概念的形成过程是一个抽象过程，是在抽象基础上的创造，然而这种创造并不是一种随心所欲的胡思乱想，而是以客观事物或数学本身为基础的创造，社会实践对数学的创造活动具有决定性的作用。通过建模思想，应使学生历经由“现实 ⇒ 抽象出事物（数和量）的本质特征 ⇒ 给出数学概念的定义和名称”的全过程，从而使学生理解和学会这一抽象的创造方法。如：

物体具有大小（即占有一定空间）的特点，与其对应数学中便创造了长度、面积、体积、测度等概念；

物质世界具有正反两个方面，数学中便创造了正、负这两个概念；

自然界具有等量的关系，数学中便创造了方程的概念；

…………

这些概念的教学目的就应该是让学生体验创造的过程。

另外，数学建模本身也是数学方法的重要部分，而建模思想的最有力之处就体现在概念的形成过程，因为数学概念的形成过程最有效地体现了建模思想的重要性，因此，在概念教学中应突出建模方法的使用，这不仅可以使学生认识数学反映客观事物的方法是通过建立数学模型来间接实现的，而且能使学生理解数学与自然科学的区别与联系，从而学会运用数学解决问题的方法。

总之，用建模思想指导数学概念教学不仅是必要的，而且是可行的。是学生通过对数学概念的形成过程的体验达到认识数学的本质的必由之路。

7.2 数学命题的教学

数学家对数学研究的结果往往是用命题的方式表示出来，数学中的定义、法则、定律、公式、性质、公理、定理等，都是数学命题，因此数学命题是数学知识的主体。数学命题与概念、推理、证明有着密切的联系，命题是由概念组成的，概念是用命题揭示的；命题是组成推理的要素，而很多数学命题是经过推理获得的；命题是证明的重要依据，而命题的真实性一般都需要经过证明才能确认。因此，数学命题的教学，是数学教学的重要组成部分。

7.2.1 命题的含义

1. 判断和语句

判断是对思维有所肯定或否定的思维形式。例如，对角线相等的梯形是等

① 郑毓信. 数学教育哲学. 成都：四川教育出版社，2001.9(30)

腰梯形；三个内角对应相等的两个三角形是全等三角形；指数函数不是单调函数等。

由于判断是人的主观对客观的一种认识，所以判断有真有假，正确地反映客观事物的判断称为真判断，错误地反映客观事物的判断是假判断。

判断作为一种思维形式、一种思想，其形式和表达离不开语言。因此，判断是以语句的形式出现的，表达判断的语句称为命题。因此，判断和命题的关系是同一对象的内核与外壳之间的关系，有时我们对这两者也不加区分。

数学命题是表示数学判断的语句，这种语句还可以用符号的组合来表达。在数学中我们常用 p,q,r 等来代表任意的命题，通常我们称为"语句变元"当语句变元 p 表示一个真值语句时，我们说它取真值，记为"$p=1$"，否则我们说它取假值，记作"$p=0$"。

2. 判断的种类

我们可以按判断本身是否含有其他判断将判断分为简单判断和复合判断。

(1) 简单判断

简单判断又可以分为性质判断和关系判断。

性质判断是指断定事物具有或不具有某种性质的判断，性质判断由四个部分组成：主项，用来反映判断中对象；谓项，用来反映判断中对象具有或不具有的性质；联项，用来指明判断的主项和谓项之间所存在的联系语句；量项，用来反映主项的数量和范围，如"所有"、"一切"、"任何"等叫做全称量词，而"有些"、"有的"、"存在"等叫做特称量词。根据量词的不同就得到不同的判断，现分述如下。

单称肯定(或否定)判断，就是对论域中一个对象是否具有某一性质进行的判断。如指数函数是特殊函数，三角形 ABC 不是等边三角形等。

特称肯定(或否定)判断，就是对论域中部分对象是否具有某一性质进行判断。如有些整数是完全平方数，有些数列是不存在极限的等。

全称肯定(或否定)判断，就是对论域中所有对象是否具有某一性质进行判断。如所有一元二次方程在复数范围内部都有两个根，所有偶函数(或奇函数)的定义域都是关于原点对称的等。

关系判断是指断定论域中的对象与对象之间关系的判断。关系判断由三部分组成：关系、关系项、量项。数学中常见的关系有对称关系、反对称关系、非对称关系、传递关系和反传递关系等。如：AB 垂直 BC，则 BC 也垂直 AB，所以垂直关系就是对称关系；两个不相等的实数 a,b，实数 a 大于 b，则 b 就小于 a，所以"大于"关系就是反对称关系；又如 a 整除 b，则 b 可能整除 a 也可能不整除 a，所以整除关系为非对称关系；$a>b$，$b>c$，则 $a>c$，所以大于关系是传递关系；在平面内，AB 垂直 BC，BC 垂直 CD，则 AB 一定不与 CD 垂直，所以在同一平面

内的垂直关系是反传递关系。

(2) 复合判断

复合判断是由简单判断与逻辑连结词构成的新的判断,包括负判断、联言判断、选言判断、假言判断。

负判断(也称否定判断)是指一个判断语句前面加上逻辑连结词“并非”而构成的判断,如并非过直线外一点只能作一条直线和已知直线平行;

联言判断(也称合取判断)是指逻辑连结词“且”将两个判断结合起来得到的新的判断,用来断定几个判断同时成立的判断,如 2 整除 4 且三角形是多边形;

选言判断(也称析取判断)是指用逻辑连结词“或”将两个判断联结起来得到的新的判断,用来断定几种事物情况中至少有一种事物情况存在的判断。如四边形是平行四边形或四边形是梯形;

假言判断是指断定一类情况的存在是另一事物情况存在的条件的判断,所以又可称为条件判断。在假言判断中,有充分条件假言判断、必要条件假言判断和充分必要条件假言判断。以下分别对这三假言判断进行说明。

充分条件假言判断是由两个互相联系的判断构成,如果其中一个判断的成立可以得出另一个判断的成立,则前一个判断就是后一个判断的充分条件。具有这种关系的假言判断称为充分条件假言判断。如“若某数能被 6 整除,则它必能被 2 整除”,就是充分条件假言判断。常用的充分条件假言判断的逻辑连结词为“如果……,那么……”,“若……,则……”等。

必要条件假言判断也是由两个互相联系的判断构成,如果其中一个判断的成立必需依赖另一个判断的成立,则后一个判断就是前一个判断的必要条件。如多边形是正方形必须是平行四边形。

充分必要条件假言判断也是由两个互相联系的判断构成,其中一个判断的成立必须且只须另一个判断的成立,则两个判断互为充分必要条件,具有这种条件关系的假言判断就是充分必要条件假言判断,常用的逻辑连结词为“当且仅当”、“必须且只须”,如:一个三角形是等边三角形,当且仅当它是等角三角形。

7.2.2 数学命题学习

1. 命题学习概述

命题学习是美国心理学家奥苏伯尔提出的有意义学习的重要基础之一。按照奥苏伯尔的观点,命题学习实际上就是指发现命题和领会命题语句意义的学习,从学习方法上可以分为接受学习和发现学习两种形式。由于命题是以语句来表达的,所以当学生有意义地学习命题时,所学习的语句与学生认知结构中已有的观念会建立联系。奥苏伯尔认为,命题学习与概念学习类似,所学习的命题

与学生已有命题之间的这种关系，一般表现为三种类型。

(1) 下位关系

指新学习的命题内容类属于学生认知结构中已有的、包摄性较广的观念。这是新教材与学生已有观念之间最普通的一种关系。

这种新命题的学习，学生只需对已有的、构成一般命题的意义的表证映象稍作修改，就能产生出新命题的意义。因此，相对来说这种命题比较容易学习，只需少量知识活动就能领会其意义。如学生在掌握了“函数 $y = f(x)$ 在某区间有定义，若对于区间的任何两个自变量的值 x_1, x_2，由 $x_1 < x_2$ 可以推出 $f(x_1) < f(x_2)$，则 $y = f(x)$ 在该区间便为增函数”。将此命题运用于指数函数 $y = a^x (a > 1)$，则可以得出“指数函数 $y = a^x (a > 1)$ 在定义域内为增函数”这一命题。

(2) 上位关系

当学生学习一种包摄性较广的命题时，便可以把一系列原有命题类属于其下，则新命题的意义便与学生认知结构中已有的观念产生了一种上位关系。

例如，假定学生已知正方形、长方形和平行四边形的内角之和等于 360 度，那么“任何四边形内角之和等于 360 度”这个一般命题，就与已有命题产生一种上位关系。

(3) 组合关系

当学生学习与认知结构中已有命题不产生上、下位关系的命题时，就产生了组合意义。这种命题的学习往往是教学中的难点，因为学生面对的是新的研究问题，这个时候学生所能依赖的一般只有研究对象的概念，如学生学习排列组合这一相对独立的内容时，得出排列数公式或组合数公式就只能依赖排列和组合的定义。而这些公式与其他命题之间就构成组合关系。

2. 数学命题的学习

奥苏伯尔根据命题学习的上述类型，提出了命题的接受学习和发现学习理论。接受学习理论认为命题的接受学习就是掌握命题的意义，把握事物内部实质性联系的学习，学习过程的实质乃是以符号为代表的新的观念与学生认知结构中原有的适当观念建立实质性和非人为的联系。命题的发现学习则是指不是把学习内容一开始就以定论的方式呈现给学生，而是要求学生在把最终结果命题并入认知结构之前，先要从事某些心理活动，如对学习内容进行重新排列、重新组织或转换。

(1) 接受学习

这里数学命题的学习是指数学中的真命题的学习，即对公理、定理、公式的学习。

当教师把学习的数学命题采用直接的呈现的方式教学时，学生对命题的学

习就是接受式的。例如,教师将直线与平面平行的判定定理直接告诉学生,学生的任务就是接受这个命题。

有意义的接受学习过程是一个积极的思维过程。它包括以下几个方面:

第一,在已有的知识中找到与新命题相联系的数学知识,(如在直线与平面平行判定定理的例子中直线与直线平行的概念,平面外和平面内的直线的概念,直线与平面平行的概念等都是与新命题相联系的知识),明确新命题的前提和结论;

第二,利用已有数学问题解决的经验,明确新条件与结论的内在联系;

第三,明确新命题与已有的数学知识之间的区别。

这些思维活动都是积极的,即学生在已有的数学知识和问题解决经验的基础上,通过积极地思维而获得新命题的意义。

(2) 发现学习

当新命题的内容不是直接呈现给学生,而是先通过提出某些问题或创设相应的问题情境,促使或引导学生通过思考现有问题的解决过程来发现命题或概括性结论时,就发生了有意义的发现学习。

如教师在教学"三角形内角和等于180°"这一命题时,先让学生通过对各种三角形的测量,得出这一猜想,再进行证明,这就是发现学习。

命题的接受学习和发现学习无论是学习条件或是心理过程还是它们在认识功能中的作用均有不同。在接受学习中,命题是以定论的方式传授给学生的,学生只要将命题的内容加以内化,因此学习是否有意义,取决于学生是否建立了新命题与已有的知识之间的联系。因此教师在安排这种学习时,应该对学生的认知结构进行研究,使自己的讲授适合于学生认知结构的特点,这样才能有助于学生对知识的学习、保持、迁移和运用。而在命题的发现学习中,学习的主要内容不是直接呈现给学生,必须由他们自己去发现这些内容。教师安排这种学习时,应该对学生的心理特点和能力、知识状况进行研究,确定内容是否适合于学生的自我发现,并要指导学生对发现的结果进行整理形成命题。

7.2.3 数学命题的教学步骤

数学命题的基本教学任务,是使学生认识命题的条件和结论,掌握命题的推理过程或证明方法,运用所学的命题进行计算、推理或论证,提高数学基本能力和解决实际问题的能力,并在此基础上使学生熟悉基本的数学思想和数学方法,弄清数学命题的关系,把学过的命题系统化,形成结构紧密的知识体系。

一般的说,数学命题的教学步骤有以下几个方面。

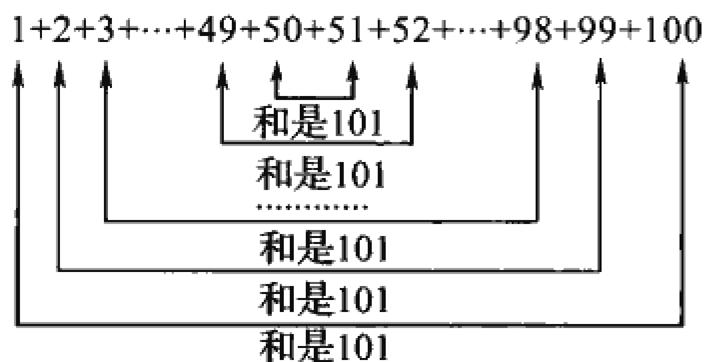
1. 导入步骤

数学命题是反映数学对象的属性的关系。人们认识这些关系有的是从对现

实世界的空间形式和数量关系的直接观察分析或者是通过测量计算得来的，有的则是从理论推导得来的。导入步骤是指教师在命题教学开始阶段的步骤。命题的引入方式是多种多样的，依据人们对事物的认识规律，主要可以采用接受式教学模式或采用发现式教学模式。选取什么教学模式主要是依据学生的认知情况和命题本身的特点。无论采用什么教学模式，也无论是什么命题的教学，在教学中教师一定要注意提高学生学习的积极性，使任何学习都成为对学生而言是有意义的学习。

在接受式教学模式下的命题导入，要注意教师的讲解必须具有启发性，或在讲解的过程中提出一些思考的问题，也就是使学生产生“惑”，“惑”的产生可以将学习导入有意义学习。如在讲解 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ 时，可以先提出“$\sin(x+y)$ 等于什么”这样的问题让学生思考，并可以常识和检验各种假设，如 $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ 吗？在此基础上给出公式，并证明。这一方面可以用问题的思考带动学生的学习积极性，另一方面，可以使学生对命题印象深刻。

在发现式教学模式下的命题导入，要为学生创设一个适合发现的情境，使学生能够在这一情境中，积极探索、共同讨论、得出猜想、形成结论。如在探索等差数列前 n 项和公式时，可以先给出高斯推导 $1+2+3+\cdots+100$ 的过程，(如图)或给出三角形架(或梯形架)数物体的数目，引导学生将三角形(或梯形)“补成”平行四边形，从而形式上将问题转化为面积计算问题，将三角形的面积(或梯形的面积)转化为平行四边形的面积，学生通过代数或几何的思考方式对结果提出猜想，然后进行论证。



2. 应用步骤

这是对命题的初步应用，目的是使学生熟悉命题的意义。这一部分所选择的例题一定要是简单的，因为过于复杂的例题容易使学生将注意力集中在例题本身，从而分散对所学命题的注意。

命题的应用是命题学习的重要环节，通过这个环节，不仅可以起到巩固所学知识的作用，更重要的是还能培养学生的能力。这个环节通常是让学生应用所学命题解答有关的问题。

3. 解释说明步骤

这一步骤是在学生对命题进行了初步运用的前提下的进一步认识，其主要任务是明确命题，具体地说是帮助学生分辨命题的条件和结论。对命题所涉及的条件和结论的关系，每个条件对结论的意义等进行解释，使学生能够理解命题。这一部分的目的是使学生对命题条件与结论的关系的联系加深理解，如将部分条件去掉，从而思考结论的变化。如使学生认识到有些条件是结论的充分条件，有些是充分必要条件。为了使学生对命题有更多的了解，可以给出命题的逆命题、逆否命题、否命题，并考察这些命题的正确性。

4. 列举反例步骤

这是上一步骤的继续，列举当某些或某个条件不成立时，对命题结论的影响。如将偶函数的条件之一"定义域关于原点对称"去掉，则结论便不成立，又如将增函数或减函数的条件"区间性"去掉，则结论不成立。通过这样反复的辨析，加深对条件和结论的依赖性的理解。

5. 说理或证明步骤

这是引导学生从理性的角度认识命题的必由之路，也是数学不同于其他学科的研究方式的特点所在，因此，应该成为数学命题教学的重点。这部分内容因为比较丰富，所以，我们在下一节专门讨论。

6. 命题的系统化

数学教学中的命题是一个有系统的知识体系，弄清各个命题在数学体系中的地位、作用，以及命题之间的相互关系，可以从总体上把握数学命题的全貌。从认知心理学的角度认识数学教学的意义，则是帮助学生形成良好的认知结构，因此，命题的学习的重要策略是帮助学生建立命题的系统，使学生认识命题之间的关系。

7.2.4 数学命题的教学设计

命题的教学设计，就是围绕上述各个步骤从"教"与"学"两个方面来设计的教学具体安排，形成适合于学生的实际有符合教学内容要求的教学方案。在进行数学命题的教学设计时，教师要从以下几个方面考虑。

1. 怎样引入命题

命题的有效引入，对于命题的教学成功往往是很重要的。"引入"步骤实施得好，往往能引起学生的学习兴趣，集中他们的注意力使他们产生强烈的求知欲，针对具体的命题和学生的实际情况，可以在"提出问题"、"陈述目标"、"诱发动机"等步骤中适当地进行选择。

2. 怎样使命题更易于学生理解

可以用通俗易懂的语言，对命题进行解释；用举例来说明命题的含义，通过

分析弄清楚命题各个部分的组成,然后对各个组成部分进行解释。如果发现学生是由于对某个概念没有弄清楚,则需复习一些基本概念。

3. 是否要对命题的正确性进行说明

当命题的正确性的证明没有超出学生的知识范围时,应该将命题的证明作为重点知识来教学。如果命题的证明超出了学生的知识范围,则可以告诉学生命题已经获得其他人的证明,或举出一些事例,如在学生还未学习数学归纳法时,对数列的求和公式的教学,可采用举出事例的方法。

4. 是否要通过应用来强化学生对命题的理解和记忆并达到提高运用知识的能力

如果命题本身在数学理论体系中占有重要位置,涉及其他理论知识,那么就不仅要求学生理解和记忆所教学的命题,而且应该提供一些需要应用这个命题的教学活动,这就要求教师能设计一些需要学生运用所学命题解决问题的数学题。

7.3 数学证明的教学

所谓证明,是指根据已知真实的判断来确定某一判断的真实性的思维形式[①]。证明是数学最显著的特点之一,任何数学结论不管其多么显然,都必须经过证明以后才能被接纳。这是与其他学科的重要区别,在数学中,无论重复多少次,也无论多么精确的观察都不能代替证明,正是因为数学对证明的依赖性,才保证了结果的可靠性。也正是这一原因,使数学成为各学科的典范,因此,突出证明的意义,是教学中应该注意的问题。

数学中大多数证明属于演绎证明,就是以一些基本概念和公理为基础,使用合乎逻辑的推理去决定判断是否正确[②]。证明是由论题、论据和论证三部分组成。所谓论题,就是要判定真实性的那个命题。所谓论据,就是证明中确立论题真假所依据的判断。所谓论证,就是把论题和论据联系起来的一系列推理,也就是证明中采用的推理形式,它实际上是由一系列命题,根据逻辑推理规则构成的一个逻辑推演的程序。

7.3.1 数学证明的教育价值

数学证明的教育价值主要体现在以下几个方面。

---

① 辞海编辑委员会. 辞海[M]. 上海:上海辞书出版社,1990.

② 熊惠民,等. 从数学证明的二重性看其教育价值. 数学教育学报,2007.1(17)

1. 使学生能够感受理性精神，学会理性思考

“言必有据”的思想是当代每一位普通公民所必须具备的基本素质，数学证明对这一思想的形成具有重要的意义。数学对证明的依赖性，说明了在数学中任何权威、迷信都是行不通的，这也就是数学的理性精神。所谓理性精神就是一种信念，它相信自然是可以被认识的。我们知道数学精神的重要内涵就是数学的理性精神，而理性精神的重要表现就是对真理的思索和不懈追求。理性精神是数学贡献给人类的最重要的精神财富。理性精神也是创造精神的重要组成部分，伟大的数学家、解析几何的创立者笛卡儿的名言“我思故我在”是理性精神的典范。正是因为理性的精神引导他从方法论的角度改变了数学的面貌，将变量引入数学，从而创建了解析几何。恩格斯对此给予了高度评价“数学中的转折点是笛卡儿的变数；有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。”[①]数学证明实际上就是理性精神在数学中的体现，因而，发展学生证明意识的同时，也就是培养理性精神的过程。数学学科的演绎证明和公理化的形式体现了数学文化的理性精神，因此数学教育适合于培养学生的理性精神，特别是数学证明的教育更是如此，因为证明要求论题真实、论据确凿、论证严密。

理性精神的培养对中国当前的基础教育具有特别重要的现实意义。我国古代在数学方面有很多成就，但现代却落后于西方。这里有一个重要的原因，就是中华文化过于强调实用，而缺乏理性的思维和方法。中国的这种文化传统直接导致了社会风气也重经验而轻理论。原北京大学校长蒋梦麟在他的著作《西潮》中就指出，“我们中国人最感兴趣的是实用东西……如果有人拿东西给美国人看，他们多半会说：‘这很有趣呀！’碰到同样的情形时，中国人的反应却多半是：‘这有什么用处？’……我们中国对一种东西的用途，比对这种东西的本身更感兴趣。”

所以，数学教育应担负起理性文明、科学精神启蒙的使命，训练出其他学科所需要的清晰思维的智力。具体地说，一方面要在数学教育中坚持演绎证明的要求，逐步提高学生的逻辑思维能力。另一方面，在具体的数学证明教学过程中对推理能力的要求要因人而定，要把发展学生求真与质疑的意识放在首位。

2. 使学生加深对知识的理解

数学家戴维斯与赫什在《数学经验》一书中说：“在最好的情况下，证明通过揭示事物的核心而增强理解”，一个好的数学证明应能给出证据以帮助建立数学事实、概念和原理之间的逻辑关系，帮助寻找新旧知识之间的内在联系，使学生能系统化其所获得的知识，促进自我表现和认知结构的发展与完善，从而去建

① 朱家生．数学史．北京：高等教育出版社，2004.7(97).

构自己对数学的理解。而一旦理解了数学证明,则会澄清一些数学观念,还有可能获得一些新的数学关系,从而诱发新的思考,获得新的发现。

因此,学生学习数学证明更多的是为了加深对命题的理解和培养他们对各种智力活动的鉴赏能力,从而更好地理解数学家的思想和方法,以及数学学科的结构和性质。

3. 训练思维

数学是"思维的体操",数学证明要求论题真实、论据确凿、论证严密。数学文化要求数学知识必须按演绎体系组织起来,数学证明集中体现了这一点,成为一切思维中最纯粹、最深刻、最有效的手段。通过适当的证明过程,使学生体验数学的文化特点和提高思维的严密性,有积极的意义。

7.3.2 中学生对证明的认识

证明是数学的精髓,是数学区别与其他学科的特点,因此,对证明的教学我们应该给予更多的关注,中学生获得证明这一概念,并不是通过教师直接将证明的概念告诉他而得到的,而是通过对各种场合下使用"证明"和"求证"过程,体验并逐步抽象形成的。

学生对证明的理解往往是模糊的,对他们而言,证明就是提供证据或理由,使自己或别人相信某个命题是真或假,他们未必会考虑,有多少证据是必要的,应该怎样使证明过程简洁而严密。

随着数学学习的不断深入,数学教师不仅应该寻求发展与学生学习水平相适应的证明概念,还应教给学生如何领会、理解和评价数学命题的证明,以及提高自己作出证明的技能。具体地说,应该使学生认识以下问题。

1. 数学证明教学的意义

学生在接触数学证明之前,对"证明"已经拥有不同程度的直观理解。这一点可以从他们对诸如"为什么?""你是怎么知道的?"等问题的回答中看出。当向他们提出这些问题时,他们能意识到,必须提供证据或理由。在学生正式学习证明时,教师应该努力使学生的证明观念明确化,也就是使学生理解数学证明的含义。

就广义的证明而言,指的是各种用来获得命题真假性之保证的方法。因此,按照广义的理解,证明是在人们存在不确定性的情况的产物,它是一种社会性的相互联系,涉及给出证明的人和听者以及证明过程。

通常证明的人和听者不是同一个人,如当数学家设法使他的同行相信某一结论的正确性时,就采用由某个已知正确的结论出发得出这一结论的证明方法。听者和证明者也可以是同一个人,如当数学家第一个独立证明某个命题可以由其他命题推出,就是这种情形。不确定性和疑问的存在是使得证明有别于数学

游戏的重要前提,也是证明有意义的重要条件。

数学教学中的证明与数学家研究中的证明是不完全一样的,虽然对于数学教学而言,学生对结论的确定性具有疑问也是十分重要的,因为,如果学生对所面临的命题没有疑问,那么给出它的演绎证明未必会增强学生对命题的相信程度。但在中学的教学环境中,疑问的存在往往是少有的情况,因为在大多数学生眼里,课本上的定理肯定是成立的,因而在中学数学教学中证明命题的动机不一定就是使学生相信命题的正确性。

另外,如果学生对数学不感兴趣,甚至根本不关心命题是否为真,那么他们肯定不会有心卷入那些确定其真实性的证明过程。对于学生,教师首先应该培养他们对数学证明的兴趣,否则,证明命题的过程将成为一种无关紧要的游戏。教师应该使学生认识到,理解数学知识间的内在联系的必要性,并且认识到通过证明可以显示出数学知识的内在联系。因而,在中学数学教学中,证明教学在一定程度是使学生理解证明的含义和作用,培养学生证明的观念。

2. 证明的种类

如果把广义的证明看做是获得一种关于命题的真值或关于明智行为的保证或自信,那么我们就能确认或找出四种用于获得这种保证或自信的方式。

第一种方式就是使用个人的经验。如果一个学生说,有一家商店发生了火灾,其他学生问"你是怎么知道的?",这一学生可以说,是自己亲眼见到的。

第二种是当个人的经验不适用时,我们可能愿意接受权威的判断。例如学生往往愿意将书本上的陈述内容当做正确的来接受。

第三种用来获得对命题真实性的相信方式就是使用归纳法。如果某个希望被证实的命题是对所考察过的例证都是正确的,那么我们就有理由相信这个命题是正确的,如果我们找到了反例,那么我们就知道这个命题不是一个普遍成立的命题。如果我们找出的反例并不多,那么我们可能会以这种形式接受这一命题,即在命题中加上一些修饰,如"一般的讲","在大多数情况下"等,以此来显示接受这个命题的逻辑前提。

第四种用来获得命题真实性的保证的方式,是通过有效的演绎证明,如果能证明利用公认的逻辑法则,某个命题能由其他一些已知为真的命题推出,那么我们对这个命题的正确性的确信程度就会提高。

中学数学中的证明主要是后两种。数学从推理形式上分为演绎推理和归纳推理。演绎证明是用演绎推理形式进行的论证,也就是说,一个演绎证明首先是一个演绎推理。归纳证明是用归纳推理形式进行的论证。两种证明形式又分别称为演绎法和归纳法。

我们可以给演绎证明下一个定义:一个演绎推理是证明,当且仅当它满足两个条件:(1) 所有的前提(或理由)都是真实的;(2) 证明是有效的。以下所说

证明都是指数学演绎证明。

证明从所证命题的过程可以分为直接证明和间接证明。直接证明是从命题条件出发,根据已知概念、真命题和推理规则直接推断结论真实性的证明方式,又叫直接证法;间接证明就是不直接证明论题,而是通过证明反论题的虚假性,或通过证明论题的等价命题,来确定论题正确性的证明方式,又叫间接证法。

证明从思维方向上分为顺推证明和逆推证明。顺推证明指论证思考顺序是从论题假设到论题结论的证明方式,又称综合法,逆推证明是指论证思考顺序从论题结论出发,寻求它的论据,直至归结到题设的证明方式,又称分析法。

7.3.3 影响数学证明的学习因素

对大多数学生来说,数学证明的学习和使用是一个缓慢和曲折的过程,究其原因,主要是学生的认知发展缓慢以及必要的概念和技能的水平低等因素限制了大多数学生的演绎推理能力的发展。

1. 认知发展对学生理解证明概念和作出证明的能力的影响

根据心理学的研究,大多数儿童在 13 到 15 岁这个年龄是从具体运算思维阶段进入到形式运算思维阶段的最佳时期。在具体运算思维期,学生的思维几乎完全依赖于他们的感知。而在形式运算思维期,学生的思维不仅能开始进行演绎思维,而且头脑里能同时考虑几个因素,甚至能思考自己的思维方法。研究显示,在认识发展的转型期的学生,往往兼具两类思维的特点,但后一阶段的思维能力还比较弱。

例如,有人对一些 14 岁的儿童出示这样的试题:“所有成功的科学家工作都很努力,史密斯先生是努力工作的科学家,能由此得出史密斯先生是成功的科学家的结论吗?”结果有大约 25% 的学生回答可以,只有 20% 的学生回答说“不可以”,这些回答“不可以”的学生还不能完全说出自己的理由。此例说明,确实有许多处在思维转折期的学生其思维依赖于感知。在此问题中许多学生对没有出现的集合“努力但未获成功的科学家”不能认识。

在数学证明教学中,也可以经常看到学生出现此类的问题,如很多学生将证明结论特殊化,证明三角形的性质特殊化为证明直角三角形的性质、证明一般函数的性质特殊化为证明二次函数的性质等等。

其实上述例子说明学生对所论证的命题的条件和结论的关系还不能有效辨别,换句话说,就是对条件是结论的充分条件、必要条件还是充分必要条件确定有困难。而这一问题就是认知发展状况所引起的问题,教师要尽量利用命题的四种变换形式(原命题、逆命题、否命题和逆否命题)使学生认识命题之间的关系。

对于学生认知水平状况,许多研究者都得出了对教学富有参考价值的结果。

这方面比较公认的研究结果是由荷兰研究者维思海尔提出的:几何学习中,心智发展水平的模型。按照这个模型,所有的儿童都要经历从低级的几何理解水平逐步过渡到高级的几何理解水平的过程。而且这个过程的进展受到学习时间、学习内容以及教学方法的综合影响。维思海尔提出的学习水平分别是:

水平1.感知,学生能从外形上整体地认识图形,而且学会了一些有关的图形的词汇。例如,处在这个水平上的学生能认识长方形的形状,但通常不了解长方形的许多性质。

水平2.分析,学生能对图形的性质进行分析。处在这一水平的学生能认识到长方形的对边平行且相等,但还未注意到长方形与正方形的联系。

水平3.逻辑整理,学生能在逻辑上对几何图形进行整理。如,认识到所有的正方形都是矩形,但并不是所有的矩形都是正方形,并能理解图形与准确定义的重要性之间的内在联系。在这个水平上,演绎思维技能还未得到完全的发展。

水平4.演绎,学生能理解演绎法的意义和公理、公设及证明的重要作用。处在这一水平的学生虽然可以完成一些证明,但是思维还缺乏足够的严密性。

水平5.严密,学生能理解精确论述欧氏几何基础中诸如公理、公设的系统的重要性,能分析演绎系统,能理解演绎体系的严密性最终归结为公理的相容性、独立性和完备性,这是最复杂的一种思维水平。

这个模型的基本观点是:学习是一个由下而上、由低到高的循序渐进的过程,无论是学习中的表现,还是学习的结果,都必须由浅入深,而整个过程则是相互联系、相互依赖的。划分水平的重要目的是要教师正确估计学生的认知发展水平,认识学生的思维状况,以分析和诊断他们遇到的学习问题或学习障碍。例如某些学生的思维水平目前还处于水平1,如果要他接受水平2的学习内容,就超越了他的承受能力。

由此可见,学生学习数学证明时出现问题,并不一定是掌握数学内容和方法上的原因,而更可能是存在心理上的困难所致。

2. 概念和技能的状况对学生理解和作出演绎证明的影响

许多学生缺少一些必要的技能和一些概念的理解,这也是他们在理解和使用演绎证明时发生困难的又一原因。在教学中我们经常发现,学生不能完成某个证明,有时是对命题中的部分概念的认识不充分所造成的。

如"等差数列$\{a_n\}$中,若$S_l=S_m$,求证$S_{l+n}=0(l\neq n)$",这个证明的方法是多样的,但都要求对等差数列的通项公式a_n及前n项和S_n的概念有充分的认识,如果能认识到a_n和S_n分别是项数n的一次和二次函数,则当公差$d\neq 0$时,可以设$a_n=an+b(a,b$为常数$)$,$S_n=en^2+fn(e,f$为常数$)$,再由条件$S_l=S_m(l\neq n)$知,S_n的图像关于$n=\dfrac{l+m}{2}$,从而$S_{m+l}=S_0=0$。

缺乏证明的技能训练也是不能正确作出证明的原因之一，有时学生能够对条件到结论进行叙述，但却不能写出完整的证明。

7.3.4 数学证明的教学

数学证明的教学是数学教学的重要组成部分，但是数学证明由于受学生认知状况的影响和证明本身的特点的影响而成为数学教学中的难点。为此，教师在证明教学中，应该做好如下工作。

1. 提高学生的证明意识

数学证明教学的重要目的之一，就是发展学生的证明概念，提高学生的证明意识。由学生对证明的初步的模糊的认识逐步发展为对证明的明确认识。目前新一轮基础教育课程改革，在义务教育低学段便进行证明思想的渗透，并随着学习的深入逐步加深学生对证明的理解和认识，养成证明习惯，这相对于过去在初中二年级"突然"引入证明的做法有较大的改变，这对学生理解证明的概念、形成证明的观念是有利的。

2. 渗透逻辑原理

关于是否应该向中学生教授逻辑知识的问题在数学教育界有两种意见。一种认为，在中学应教给学生证明的方法，而不太适宜教给他们形式逻辑的知识。另一种意见认为，应该把形式逻辑的一些内容纳入到中学数学教材中去。

对数学推理（证明）而言，逻辑原理的主要作用是保证推理的正确性。如"当 k 是什么实数时，方程 $x^2-2kx+k^2-1=0$ 的两根均小于 -2。"①推理过程为"设方程的两个根 x_1, x_2 均小于 -2（设为命题 p，以下同），那么 $\begin{cases} x_1+x_2=2k<-4 \\ x_1x_2=k^2-1>4 \end{cases}$ (q)，解之得，$k<-\sqrt{5}$ (r)。所以，当 $k<-\sqrt{5}$ (r) 时，方程的两根均小于 -2 (p)。"这里所用到的逻辑推理形式为 $(p\to q)\wedge(q\to r)\to(r\to p)$，可以检验，这个推理形式不是恒真命题，因而，所得出的结论也就具有或然性。

上例可见逻辑对于数学具有比较重要的意义，特别是为判断一个推理是否正确提供依据，但是逻辑实际上是思维的形式化，因而，具有比较难理解的特点。另外，由于单纯地介绍逻辑的基本原理比较难以引起学生的学习兴趣，所以效果也不好。所以，在中学，不宜系统介绍逻辑原理，但是教师必须掌握逻辑原理，并在教学中结合教学实例，渗透逻辑原理。

3. 使学生掌握证明的本质

数学证明是根据已经确定其真实性的公理、定理、定义、公式、性质等数学命

---

① 钱佩玲，邵广华. 数学思想方法与中学数学. 北京：北京师范大学出版社，1999.7(107).

题来论证某一数学命题的真实性的推理过程,数学证明过程往往表现为一系列的推理。[①] 因而证明的本质就是由推理得出命题正确性的过程。

在证明的教学中,应该首先使学生明确这一过程的必要性,还必需使学生掌握证明应该由论题、论据、论证三个部分组成。所谓论题是需要证明其真实性的判断,论据是用来证明论题真实性所引用的那些判断,论证就是根据论据进行一系列推理来证明论题真实性的过程。[②] 要使学生把握证明的过程,最重要的就是使学生能够对论题进行分析,并找出论题中条件与结论的联系。或者我们可以认为,证明的本质就是通过推理,在论题的条件与结论之间建立联系。

7.4 数学问题解决及其教学

问题解决是教育心理学研究的一个课题,它探讨的是个体在克服生活、学习和实践中的新矛盾时复杂的心理活动。近年来,国际数学教育界对数学中的问题解决及其教学越来越重视,因为分析问题和解决问题的能力,已经成为新的人才观的一部分。

所谓数学问题解决就是指综合地、创造性地运用各种数学知识去解决那些并非单纯练习题式的问题,包括实际问题和源于数学内部的问题。

7.4.1 波利亚对问题解决的研究

谈到问题解决,美国的一位匈牙利籍数学家乔治·波利亚是必须提到的。

就波利亚关于"问题解决"的研究而言,一个最基本的立场就是对于"问题解决"重要性的突出强调。波利亚指出"解题是智力的特殊成就,而智力乃是人类的天赋,正是绕过障碍,在眼前无捷径的情况下迂回的能力使聪明的动物高出愚笨的动物,使人高出最聪明的动物,使聪明的人高出愚笨的人。"在波利亚看来,数学教育应该以发展学生的问题解决能力作为首要的目标。

另外,波利亚认为,"问题解决"的研究应当集中在启发法之上。按照波利亚的解释,所谓"启发法"就是指"有助于发现的"思维模式和方法。具体地说,对于解题的过程我们可以具体地划分为以下的四个阶段:"弄清问题"、"拟定计划"、"实现计划"和"回顾"。波利亚还给出了围绕这四个阶段的解题表。

关于解题策略,波利亚指出,正如不存在万能的解题方法,可以被用于发现合适的辅助问题的万能方法也不存在,但是,在此同样存在一些启发性的问题或建议。这主要包括:

---

① 十三院校协编组编.中学数学教材教法(总论)第2版.北京:高等教育出版社,1987.10(149).

② 十三院校协编组编.中学数学教材教法(总论)第2版.北京:高等教育出版社,1987.10(149).

1. 回到定义去

这是在解题过程中陷入困境时有助于我们摆脱困境的一个方法，因为麻烦很可能就是由于我们还没有充分理解问题中的那些基本词语的意义。

例如，波利亚指出，为了求解以下问题：

“给定一直线 s 和一抛物线（其焦点和准线分别为 F 和 d），试作出此直线与抛物线的交点 P。”

对此问题，我们就可以采用回到定义的策略。“你能够说出抛物线的定义吗？”，“根据这一定义，点 P 具有什么样的性质？”。显然，对定义的回顾，可以促使我们将原先的问题重新叙述为：“在已知直线上作点 P，使其与已知点 F 和已知直线 d 的距离相等。”而这一“换句话说”便成为解决问题的突破点。

2. 问题的重新表述

对问题的重新表述，就是对问题采用一种新的、不同的视角去认识。

早在16世纪法国著名数学家笛卡儿就提出了如下的解题模式：

第一，把任何问题转化为数学问题；

第二，把任何数学问题转化为代数问题；

第三，把任何代数问题归结为解方程。

笛卡儿曾认为这一模式可以解决一切问题。波利亚指出，虽然这不能被看成可以解决一切问题的“万能方法”，但是它仍然适用于非常多的场合。

显然从更一般的角度去分析，所说的代数化、方程化就可以被看成对问题的重新表述。

例如：“证明：若3个实数的倒数和与这3个实数的和的倒数相等，则这3个实数必有2个互为相反数。”[①]

这个问题的有效解答在很大程度上依赖对问题的恰当表述。若能将问题用数学语言表达为：

“$x,y,z \in \mathbf{R}$，$x<y<z$ 均不为0，且 $x+y+z \neq 0$，若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$，则 $(x+y)(y+z)(z+x)=0$”.

又如和尚爬山：

有一个和尚第一天日出时从山底沿着盘旋的山路时快时慢地朝山上走去，日落时刚好到达山顶。过了几天，他又在日出时沿同样的路线下山，行走速度也是时快时慢。虽然他行走的平均速度较上山快一些，不过他也是在近日落时到达山脚（图7.1）。问：和尚在往返的路上是否会在一天中的同一时刻通过同一点？

① 喻平. 个体CPFS结构与数学问题表征的相关性研究. 数学教育学报，2003.3(10).

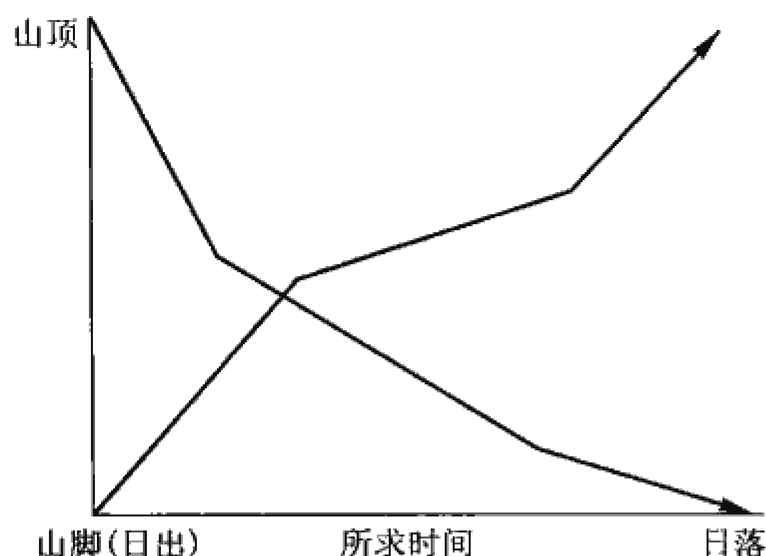


图 7.1

通常学生在思考这一问题时,考虑的总是一个和尚在不同日子上下山这个事实,因此觉得有一点难度。但是如果学生在充分理解问题的基础上,将问题表征为有两个和尚在同一天一个上山一个下山,并绘制出他们上山和下山的路径图,结果清晰明了的路径图使问题迎刃而解。

显然,对问题的恰当有效表征,可简化问题的解答过程,而且可以将问题有效划归为解答较为简单的问题。

3. 分解与重组

"当我们的问题比较困难时,我们可能感到很有必要把问题再分解成几部分",然后在"各个击破"的基础上,再通过重新组合以解决原来的问题。这就是"分解与重新组合"的方法。

例如,我们在求解问题的过程中,往往分各种情况讨论。应当指出,分解与重组的过程并不总是那么简单,正如波利亚所说"困难的问题需要有一种神奇的、不寻常的、崭新的组合。而解题者的才能就在于组合的独创性。"

例 设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 至少有一个实数解,试求 a^2+b^2 的最小值。

分析

(1) 设为 $m\neq 0$ 为方程的一个实数解,代入得: $m^2+am+b+\frac{a}{m}+\frac{1}{m^2}=0$

(2) 设 $a^2+b^2=r^2$

(将原来的问题分解为两个问题,再组合)

解 构造:

$$l:\left(m+\frac{1}{m}\right)a+b+\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)=0\ ,$$

$$C:a^2+b^2=r^2,$$

由此可以知道，直线与圆之间必有公共点(a,b)，因此圆心到直线的距离小于或等于半径。

$$\frac{\left|m^2+\frac{1}{m^2}\right|}{\sqrt{\left(m+\frac{1}{m}\right)^2+1}}\leqslant r\Rightarrow\frac{1}{r^2}\leqslant\frac{1}{m^2+\frac{1}{m^2}}+\frac{3}{\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)^2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$（均值不等式）。

所以$r^2\geqslant\frac{4}{5}$，当且仅当$m=\pm 1$时等号成立，从而问题得以解决。

4. 特殊化方法

特殊化是指："从考虑一组给定的对象集合过渡到考虑该集合中一个较小的集合，或仅仅一个对象"。

波利亚指出，"特殊化在求解问题时常常有用。"以下是波利亚在《数学与猜想》中所给出的一个例子。

例 两个人在一张圆桌上相继轮流平放一枚同样大小的硬币，游戏规定：硬币不能重叠放置，在桌上放下最后一枚硬币者为胜利者，设两人都是能手，试问是先放者取胜，还是后放者取胜？

特殊化方法使这一古老而有名的难题得到巧妙解决。假如桌子小到只能放下一枚硬币，那么当然先放者取胜；我们可以从这一极端情况得到以下启示：先放的人可以把第一枚硬币占据桌子中心；由于桌子呈中心对称，因此，如果以后不论对方把硬币放在何处，先放者总可以把硬币放在对手所放硬币位置的对称点，这样先放者就一定取胜。

上例也表明，特殊化同样依赖解题者的创造性劳动。

5. 一般化方法

一般化是指"从考虑一个对象过渡到考虑包含该对象的一个集合；或者从考虑一个较小的集合过渡到考虑一个包含该较小集合的更大集合。"

例如，在求解具体的数学题的过程中，我们经常可以用字母去代替其中的常数。

设$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，求和$f\left(\frac{1}{2\ 005}\right)+f\left(\frac{2}{2\ 005}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\ 004}{2\ 005}\right)$.

此题待求的问题比较复杂，直接求和似乎无从下手，但仔细观察发现待求问题具有特点：$\frac{1}{2\ 005}+\frac{2\ 004}{2\ 005}=1$，$\frac{2}{2\ 005}+\frac{2\ 003}{2\ 005}=1$，…，从而思考其函数的关系：

由 $$f(a)+f(1-a)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+2}=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4}{4+2\cdot 4^a}$$

$$= \frac{4^a}{4^a+2} + \frac{2}{4^a+2} = 1$$

故

$$f\left(\frac{1}{2\,005}\right) + f\left(\frac{2}{2\,005}\right) + \cdots + f\left(\frac{2\,004}{2\,005}\right)$$

$$= \left(f\left(\frac{1}{2\,005}\right) + f\left(\frac{2\,004}{2\,005}\right)\right) + \left(f\left(\frac{2}{2\,005}\right) + f\left(\frac{2\,003}{2\,005}\right)\right) +$$

$$\cdots + \left(f\left(\frac{1\,002}{2\,005}\right) + f\left(\frac{1\,003}{2\,005}\right)\right)$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1\,002} = 1\,002.$$

这里从一般性的结论 $f(a) + f(1-a) = 1$ 出发，使问题得以解决。

6. 类比

类比，在此即是指通过联想起一个相似的问题来求解原来的问题。类比的实质就是根据两个对象之间的相似，把信息从一个对象转移给另一个对象。例如，为了解决立体几何中的问题，我们就可与平面几何的相似问题进行类比。

设函数 $f(x)$，$f(x+2)$ 均为偶函数，且当 $x \in [0,2]$ 时，$f(x)$ 为减函数，设 $a = f\left(\log_8 \frac{1}{2}\right)$，$b = f(7.5)$，$c = f(-5)$，则 a, b, c 由小到大的顺序是__________。

由 $f(-x) = f(x)$，$f(-x+2) = f(x+2)$（$f(x)$，$f(x+2)$ 均为偶函数）知 $f(x)$ 的图像有两条对称轴：$x = 0$，$x = 2$。

类比：函数 $y = \sin x$ 的图像有很多条对称轴，如 $x = \frac{\pi}{2}$，$x = \frac{3\pi}{2}$，并且最小正周期为 $2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$，于是 $f(x)$ 的最小正周期可能是 $2(2-0) = 4$。

事实上，由已知，$f(x+4) = f(x+2+2) = f[-(x+2)+2] = f(-x) = f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数。故，

$$b = f(7.5) = f(0.5),\ c = f(-5) = f(-1) = f(1),$$

又：$a = f\left(\log_8 \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$，

$f(x)$ 在 $[0,2]$ 是减函数，所以 $c < b < a$。

7.4.2 问题与问题解决

1. 问题的特点

美国学者纽厄尔与西蒙的观点，认为每一个问题一般都包括以下四种成分：

(1) 目的。即在某种情境中想要干什么。一种情境可能有许多目的，也可能有一种目的。目的可能很明确，也可能很模糊。

（2）个体已有的知识。这是指个体在问题情境中一开始就已经具备的知识技能。

（3）障碍。即是指在解决问题的过程中会遇到的种种需要解决的因素。

（4）方法。这是指个体可以用来解决问题的程序或步骤。

现在以上述观点为指导来探讨什么是“问题”的定义。也许有人会认为所谓“问题”就是一个待解答的问题。但是，并不是任何一个待解答的问题都是“问题”。如“天为什么是蓝的?”对一个孩子来说是一个“问题”，但对于高中生来说就不能是一个“问题”了。因此，一个问题是否成为一个真正的“问题”，一个主要的因素在于个体所具有的知识。因此，问题的第一特性就是具有“障碍性”。如果没有障碍，问题解决实质上成了回忆，而不是真正的思维过程。

“问题”的第二特征应该是“接受性”，一个对个体来说具有“障碍性”的问题，未必就是某个人的问题。如“证明一些数学猜想，如哥德巴赫猜想”，对中学生而言，确实具有“障碍性”，但是问题超出了他们的知识范围，中学生也难以接受。因此，要使一个具有“障碍性”的问题成为个体的真正意义上的问题，必须使个体接受，并试图解决。

综上所述，“问题解决”中的“问题”是具备上述两个特性的问题。

如果按照上述的界定，中学数学课本中的许多练习题，就不能称为问题。因为在许多情况下，教师已经为学生提供了典范的解决方法，学生仅需模仿教师的解法。因此对许多学生来说，这些练习不具有“障碍性”。

2. 中学数学中的问题解决

中学数学中的问题解决，应该是指学生接受问题并试图解决问题的过程。在这个过程中，学生不仅需要找到具体的解决办法，而且更需要学会如何收集信息和资料，如何实施计划以及如何评估计划。因此，问题解决作为个体的一个心智过程，应该是一个发现的过程、探索的过程、创新的过程。

7.4.3 问题解决教学的理论模式

目前专家和学者从教育心理学的角度对问题解决教学进行了研究，取得了丰硕的成果，这里列举一些研究结论。

1. 教学问题解决的重要性

目前，国际数学教育界普遍认为，问题解决应该作为一个重要的数学教学活动，这一观点主要有几个方面的依据。

（1）问题和问题解决是学习数学的重要组成部分。可以把问题解决作为一种基本的数学活动，其他的一些数学活动，如概括、抽象、理论建构和概念形成都可以建立在问题解决的基础之上。通过问题解决的教学活动，不仅可以传授数学知识，而且可以引发学生学习数学的兴趣，改变学生对数学的态度，使学生对

数学产生极高的信念；

（2）教学生解决问题能很好地培养学生的思维能力和分析问题、解决问题的能力，从而增加学生的决策判断和应变的能力。

（3）问题解决与创造力是相互联系和相互制约的。首先，创造力的水平高低必须通过问题解决来体现；其次，创造力的大小对问题解决有直接的影响。问题解决可以分为两种，一种是依据现有程序进行问题解决，另一种是创造出新的程序来进行问题解决，后者也就是创造性地解决问题，创造能力的大小决定了能否创造性地解决问题；再次，问题解决能促进创造力的发展。因为问题解决中的"问题"具有障碍性，因此，经常进行问题解决训练，可以锻炼创造力。

2. 问题解决的阶段

奥苏伯尔和罗宾逊通过研究学生对几何问题解决的过程，提出了解决问题要经历四个阶段。[①]

第一阶段，呈现问题情境命题。在这个阶段主要把问题以一定的命题形式呈现在学生面前，并要求学生掌握这些命题。

第二阶段，明确问题的目标与已知条件。问题的情境命题，最初只是对问题的潜在意义的陈述。如果学生具备有关的背景知识，就能使问题情境命题与其认知结构联系起来，从而理解面临问题的性质和条件。明确问题情境命题有两个功能：一是规定解题过程的目标，二是规定学生进行思考的出发点。

第三阶段，填补空隙。这个阶段是问题解决过程的核心。学生在明确了已知条件和要达到目标间空隙后，要找到填补空隙的方法。例如，从大脑储存的知识中提取出与解决当前问题有关的知识、规则，同时还要找到问题解决的策略。

第四阶段，解答之后的检验。这个阶段是问题解决的最后一个阶段。问题解决后，要进行检验，即查明填补空隙的方法是否正确、是否最为简洁、是否最为合理。

3. 影响问题解决的因素

（1）定式

定式（set）是指心理的一种暂时的准备状态。[②] 思维定式在问题解决过程中一般起限制作用，并使所尝试的问题解决的方法固定化。

（2）问题情境

问题情境就是指问题呈现的知觉方式。[③] 当问题呈现的知觉方式与人们已有的知识经验越接近，问题解决起来也就越容易解决；相反，如果问题呈现的知

---

① 张大均.教育心理学.北京：人民教育出版社，1999.7（163）.

② 张大均.教育心理学.北京：人民教育出版社，1999.7（165）.

③ 张大均.教育心理学.北京：人民教育出版社，1999.7（167）.

觉方式与人们已有的知识经验相差很远,问题解决起来就越困难。

(3) 功能固着

对于数学问题来说,功能固着可以理解为对于某个公式或法则,学生容易将其运用固定化。

(4) 知识经验

在问题解决时所需要的知识经验,有两层含义。第一,指一个人所拥有的知识经验的数量;第二,指一个人所拥有的知识经验的质量,也就是知识的结构状况。

4. 问题解决的研究成果对教学的意义

以上对问题解决的研究成果进行了简单地列举,这些研究成果对我们教师的教学具有重要的启发意义,主要体现在以下几个方面:

(1) 引导学生成为成功的问题解决者

一般认为,不成功的问题解决者用在理解问题上的时间很少,他们往往凭很少的线索来选择答案或解法。优秀的问题解决者在理解问题时表现得积极主动,他们会仔细地理解问题,然后抓住关键的意思,得出有用的解题信息。

成功者显著区别于不成功者的另一重要特征是,成功者使用的问题解决策略要比一般的问题解决者使用的策略广泛得多。因此,要使学生成为成功的问题解决者,应该使他们具备更多的解题策略。

(2) 教师应注意培养学生问题解决的能力

成功的问题解决者的能力培养问题是问题解决教学的核心问题,上述关于成功问题解决者的特征给我们一些启示。集中看来,学生思考数学问题的深度和质量,对待问题解决的态度和兴趣应该是促进学生的问题解决能力的两个重要因素。教师如何培养这两个因素呢?这里提出一些建议。

教师应以身示范展示问题解决的良好行为。学生需要观察教师是如何提出问题、理解问题、思考问题,如何积极有效地使用策略寻找求解方法等。因此,教师应该尽量在教学中展示思维的过程。

应该对问题解决的基本技能进行训练。这首先要求教师具有将问题解决作为教学的重要内容的意识,也就是说,教师应该认识到问题解决对学生的能力,特别是创造能力的重要作用,并努力创造出"问题",使学生在解决问题的过程中训练技能。

精心组织,创造问题解决的良好课堂环境。良好的课堂教学环境是问题解决教学的重要保证,这一环境应该有利于学生创造思维性的产生,应该对学生具有吸引力。

(3) 教师应该在教学过程中,注意培养学生的求异思维

因为,思维定势的出现主要是在教学过程中片面强调求同思维所引起的。

所以要克服思维定势对问题解决的负面影响，培养求异思维是重要手段。

(4) 注意变式教学

为了不使学生受“功能固着”的负面影响，教师在教学中，应该对同一公式、定理、图像等进行变式教学。

7.4.4 问题解决教学的准则

1. 查明学生理解问题。也就是说，教师首先应该了解学生是否真正理解了问题，很多情况下，学生不能有效解决问题往往是因为对问题本身不理解。

2. 在寻找解题思路的过程中，帮助学生收集有意义的思维材料。实际上，这也就是启发式教学在问题解决中的运用。

3. 为学生营造一个有利于解题的气氛。

4. 一旦学生获得解法，及时鼓励他们对问题及其解法进行反思。反思是发现新问题和形成解决问题策略的重要手段。

本章思考题

1. 概念教学是中学数学教学的重点和难点，请你就此问题谈谈自己的认识。

2. 设计高中函数概念教学的方案，并说明其可行性。

3. 分别用讲授法和发现法设计一个命题的教学方案。

4. 设计勾股定理的教学方案。

5. 问题解决的教学依然是目前数学教学中研究比较多的教学模式，你对这种教学模式的看法如何，能否设计一个以问题解决为主线的教学模式。

第8章 数学能力和数学技能的培养

8

发展学生的数学能力和训练学生的数学技能是数学教学的重要目标,学校教育要把“教会学生如何学习”,培养学生的数学能力和技能放到重要位置。

能力就是顺利完成某种活动所需的个性心理特征。数学能力是一种特殊的心理能力,是顺利完成数学活动所必备且直接影响其活动效率的一种心理特征,它是在数学活动过程中形成和发展起来的,并主要在这类活动中表现出来的比较稳定的心理特征。它包括两种水平的数学能力,即学习数学的能力和创造数学的能力。前者指在数学学习活动中,迅速而成功地掌握适当知识和技能的能力;后者是指在数学科学活动中的能力,这种能力产生具有社会价值的新成果或新成就,对学生而言,创造数学的能力主要指的是学习意义上的创造,也就是说,从社会价值的角度也许不具有创新的意义,但对学生个人却具有创新的意义。

在数学教学中,需要培养的学生的能力是多方面的,但主要应培养的是学生的思维能力。思维能力是人的能力的核心,在思维能力中逻辑思维能力与非逻辑思维能力都是最基本的能力。

技能是顺利完成某种任务的一种动作或心智活动方式。它是一种接近自动化的、复杂而较为完善的动作系统,是通过有目的、有计划的练习而形成的。数学技能是顺利完成某种数学任务的动作或心智活动方式。它通常表现为完成某一数学任务时所必需的一系列动作的协调和活动方式的自动化。这种协调的动作和自动化的活动方式是在已有数学知识经验基础上经过反复练习而形成的。

本章对数学相关能力的培养和数学技能的训练进行讨论。

8.1 逻辑思维能力

所谓逻辑思维能力就是正确、合理地进行思考和论证的能力,逻辑思维能力是思维能力的核心。

8.1.1 思维与数学思维

人脑对客观事物的本质和规律的概括及间接的反映过程就称为思维。思维最显著的特征是概括性。思维之所以能揭示事物的本质和内在的规律性,主要

来自抽象和概括的过程,即思维是抽象概括的反映。抽象就是以大量的已知事实为依据,在已有的知识经验的基础上,舍弃个别事物的非本质特征,抽取同类事物的本质特征的过程。而概括就是把事物的共同特点归结在一起,因而抽象概括就是将事物的共同特征本质特征作为思维对象,从而得出新的结论的思维过程。

抽象概括性是思维研究的一个重要方面,抽象概括水平是衡量思维水平的重要标志。思维要依靠感性认识,但远远超脱于感性认识的界限之外,去认识那些没有直接感知过的或根本无法感知到的事物,以及预见和推知事物发展的进程,因而间接性是思维的主要特征。

思维按抽象和概括的水平可以分为三个层次:直观行动思维、具体形象思维和抽象逻辑思维。

直观行动思维就是在实际操作中进行的依赖于实际行动的思维,从动作到动作是这种思维的主要特征。这应该属于思维的初级阶段,但这一阶段是后面阶段的基础。思维处于这一阶段的学生必需借助于实物才能完成思维,如计算 $3+2$ 的结果。

具体形象思维是凭借事物的知觉形象和表象进行的思维,其基本形式是表象。这一阶段的思维已经摆脱了与操作相联系的水平,但是还不能离开具体的对象进行思维。如必需借助于教具或图形才能思考。

抽象逻辑思维,又分为形式逻辑思维和辩证逻辑思维两种形式。这两种思维模式都摆脱了对具体对象的依赖。形式逻辑思维是按照形式逻辑的规律而进行的思维形式,同一律、矛盾律、排中律和充足理由律是这种思维的基本规律。辩证逻辑思维是抽象逻辑思维的高级阶段,是按辩证逻辑的规律而进行思维的。

对于中学高年级的学生,虽然已经具有一定程度抽象逻辑思维能力,但由于中学生的思维能力还处于发展的阶段,因此,借助于直观的思维模式依然是必要的,它可以帮助学生理解和接受数学知识。如①在证明组合数公式 $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}(m,n\geqslant 2)$,一方面,可以用逻辑演绎证明:

$$C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=\frac{(n-1)\cdots(n-m)}{m!}+\frac{(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=C_n^m.$$

为了便于学生理解上述公式,还可以采用以下的直观证明:在 n 个元素中固定一个元 a,那么从 n 个元中取 m 个元可以分为两种情形。一种是一定不取 a,有 C_{n-1}^m 种取法;另一种是一定取 a,有 C_{n-1}^{m-1} 种取法,加起来共有 C_n^m 种取法。

---

① 张广祥.代数教学中的模式直观.数学教育学报,2006.1(1).

8.1.2 数学思维及发展

数学思维是人脑和数学对象交互作用并按一般思维规律认识数学的过程。在数学学习中，随着学习内容的不断加深和抽象概括水平的逐步提高，学生的数学思维也逐渐由直观行动思维占主导逐步发展到抽象逻辑思维占主导。

初中学生对数学思维的发展具有两个主要特点：抽象逻辑思维日益发展，并逐渐占有相对优势，但具体形象思维仍起主要作用。在初中数学教学中，我们应该注意这一特点，尽量不将复杂概念过于集中①。如在进行教学运算法则"负负得正"的教学中。现在通用的办法是举例。用向东、向西、某时刻之前、之后作为正负取向的标志，然后采用直观方法验证负负得正运算规律，由于实际上引入了向量这一更复杂的概念，给学生理解带来困难。我们采用另外便于理解的方法，可以降低难度。如我们可以在学生接受了乘法对加法分配律的前提下，给出如下的例子：因为$(-1)\times(-1+1)=(-1)\times0=0$，所以$(-1)\times(-1)-1=0$，从而，$(-1)\times(-1)=1$，也就是说，为了保证乘法对加法的分配律成立，必须有"负负得正"这一法则。

实际上，关于$(-1)\times(-1)=1$的教学曾经给教师和学生带来许多困惑，19世纪法国著名作家司汤达(Stendhal)(《美丽的心灵》的作者)小时候很喜爱数学，也很爱动脑筋。但当老师教到"负负得正"这个运算法则时，他一点都不理解。他希望老师能对负负得正的缘由作出解释。但他并没有得到令他满意的解释。他后来回忆说：

"数学是不会矫揉造作的，在我的青春岁月里，我相信那些使用数学作为工具的科学也必然同样真确；别人是这么告诉我的。但是当我发现没有人能解释负负得正时，你能想象我的感受吗！对我来说，这个没有解释的难题真是够糟的了(它既然能导致正确的结果，无疑地也应该可以解释)。而更糟的是，有人用那些显然对自己都不清不楚的理由来对我讲解。"

他的老师不管怎么解释，总是不能让司汤达信服。老师被问得没办法，只好用债务来做比喻。司汤达更加困惑了："一个人该怎样把10 000法郎的债与500法郎的债乘起来，才能得到5 000 000法郎的收入呢？"

老师彻底崩溃了，他只好搬出大数学家欧拉(Euler L)与拉格朗日(Lagrange)来：这些大数学家都用得理所当然，你又何必钻牛角尖呢？其实，欧拉对等式$(-1)\times(-1)=1$是作过证明的。证明是这样的：$(-1)\times(-1)$要么等于1要么等于-1；因为前面已经证明了$(-1)\times(1)=-1$，所以$(-1)\times(-1)=1$。即便是老师搬出欧拉的证明，也同样不能让司汤达心悦诚服。因为

① 张广祥.代数教学中的模式直观.数学教育学报,2006.1(1).

“$(-1)\times(-1)$要么等于1要么等于-1”为什么是对的呢？这同样是难以解释的。

可怜的司汤达被“负负得正”困扰了很久，最后，在万般无奈之下只好接受了它。“我花了好长一段时间才知道：夏贝尔先生根本不曾听进我对于‘负负得正’的抗拒，杜普先生则老用缥缈的微笑回应我，而我所请教的那些数学专家们则总是报以冷嘲热讽。我最后告诉自己：本来就必须负负得正嘛；毕竟，这个法则已经用了这么久，而且导出的结果似乎都无懈可击。”虽然司汤达接受了这一结论，但这个学习经历一度动摇了对于数学与数学教师的信心：“我挚爱的数学难道是个黑盒子吗？我不知道该怎么做才能到达真理；噢！那时是多么热切地想在逻辑或文艺上面吸收各种接近真理的方法啊！最终我以我可怜的、卑微的智力做出结论：杜普先生可能在说谎；而夏贝尔先生则是一个自欺欺人的可怜虫，完全不能理解旁人的抗拒心理。”

古今中外历史上也不知有多少象司汤达这样聪明的孩子对数学老师甚至数学本身感到失望①。所以数学教师应该怎样不使学生在数学学习过程中对数学感到失望，是每一个数学教师都必须认真思考的问题，解决这一问题应落实到平时的教学中。在教学中，要根据学生的思维状况对结论进行有效地说明或证明。

高中学生的数学思维达到了更高的水平。抽象逻辑思维逐渐占主导地位。因此不必要也不应该将一些问题过于具体化或直观化。如在立体几何的教学中，过多的使用直观教具或多媒体教学，对学生的抽象思维能力的发展是不利的。

培养学生的思维能力是一门艺术，没有直观不行，过于直观也不行，如何把握好一个平衡位置，这就体现一种教学艺术。

8.1.3 数学思维方法

数学思维方法是指数学思维过程中运用的方法，它们分别是观察与实验；类比、分类与系统化；演绎、归纳与数学归纳法；分析与综合；抽象与概括；一般化与特殊化；具体化与模型化；类比与映射；联想与猜想等。这些方法是数学思维操作的基本手段，它们和思想内容、思维形式以及思维品质相互联系，是思维结构的主要成分。下面对部分方法进行讨论。

1. 观察

观察是人们为了认识事物的本质和规律，有目的、有计划地考察、描述各种现象自然发生的一种方法。观察法是数学思维过程中的重要的方法，数学中许多发现都源自观察。例如，几何中的公理，两条直线相交必有一个交点，三点确

---

① 此案例选自华东师范大学数学系汪晓勤老师数学史的教学案例.

定一个平面等，都是通过观察得到的结论；又如通过观察一系列等差数列，发现规律并归纳出等差数列的通项公式等。

进行观察要注意三点：一是要有意识、有目标；二是要有基础，有必要的相关知识；三是要有方法，要抓住要领，尤其要特别注意从个别中想到一般，从平常中发现异常。

2. 实验

实验是人们根据一定的研究目的，运用一定的物质手段，在人为的控制或模拟自然现象的条件下，使自然过程或生产过程以纯粹的、典型的形式表现出来，以便进行观察、研究、探索自然界本质的一种研究方法。数学实验有时候用物质手段难以完成，但通过实验的一部分再借助思维，人们依然可以得到和理解结论。任何实验都和观察相联系。

例如，足够大的一张纸对折100次，有多厚？

我们可以先进行实验，当纸无法继续对折下去时，提示我们用数学计算的方法来解决，$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，…。经过计算我们发现对折100次厚为1 267万兆千米，这个距离比地球到月球的距离大的多。这个例题的实验中途受阻，我们拿不出足够大的纸，也不可能完成一百次对折，但我们认定实验做了，结果是令人相信的，实验是在我们脑子里做的，是在思想中进行的，我们称为思想实验。

上述教学案例给我们的启示是，数学实验可以使学生对数学产生“近距离”，使学生对数学更亲近，从而拉近学生与数学的距离，将冰冷的数学“火热化”。数学实验也可以增强数学结论的真实感，所以适当地使用数学实验对提高学生学习数学的积极性是有促进作用的。随着计算机技术的不断发展，数学实验作为一种新的研究方法得到不断的推广和使用。

3. 类比

类比是确定有关事物的共同点和不同点的思维方法。类比法是根据两个或两类事物在某些属性上都相同或相似，而推出它们在其他属性上也相同或相似的思维方法。数学中的类比是多方面的，包括量的大小类比，形式结构和关系的类比，数学性质的类比。类比是一种重要的思维方法，通过这种方法可以发现研究对象的异同，在数学教学中适当地使用类比的方法，对学生正确认识和理解数学概念和命题具有积极作用。如，对指数函数和对数函数的性质进行比较，可以使学生认识两个互为反函数的函数的关系，对二维和三维空间内直线的位置关系进行比较，对理解两种空间的共性和特性是有积极意义的。

4. 分类

分类是以比较为基础的，按照事物间性质的异同，将相同性质的对象归入一

类，不同性质的对象归为不同类别的思维方法。分类的原则是：不重复，不遗漏。分类思想可以帮助学生清楚地认识一些事物之间的关系，如将三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形，可以帮助学生认识三种三角形的共性和特性，并从总体上把握三角形。

5. 系统化

系统化是在分类的基础上，把整体中各个部分的相关性按照某种顺序组成体系的思想方法。数学中各种概念系统、性质系统、公式系统、方法系统就是以不同的分类标准构成的不同的系统。

如上述三角形的分类，我们可以知道，三角形的性质对于锐角、直角和钝角三角形都成立，如内角和等于180°，三条边首尾相连等，但三种不同的三角形又各自具有自身的一些特性，这便构成一个概念系统及性质系统。又如两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 距离公式 $|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$，当两点位于同一平面时，则公式为 $|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，当两点位于同一直线时，则公式为 $|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=|x_1-x_2|$，这便构成一个公式系统。

6. 演绎

是由一般性较大的前提，推出一般性较小的结论的推理方法，也是由一般到特殊的思维方法。演绎推理结构由三个判断组成，通称“三段论”。第一个判断称为“大前提”，第二个判断称为“小前提”，由前面两个判断得出的判断称为“结论”。如下面的演绎推理就是一个典型的“三段论”推理：

判断1：如果存在常数 T，使对与函数 $y=f(x)$ 定义域内任何自变量 x，有 $f(x+T)=f(x)$，则 T 为函数 $y=f(x)$ 的周期；

判断2：存在常数 2π，使对与函数 $y=f(x)=\sin x$ 定义域内任何自变量 x，有 $f(x+2\pi)=f(x)$；

判断3：2π 为函数 $y=f(x)$ 的周期；

7. 归纳

归纳是指通过对特例的观察和综合去发现一般规律的方法，归纳法与演绎法的关系是：前者是由特殊到一般的方法而后者是由一般到特殊的方法。由归纳所得出的结论具有或然性，而由演绎法得出的结论具有必然性。归纳法往往对研究对象为无限的问题就不能保证其正确性，因此就需要有一些新的方法来解决这类问题，数学归纳法就是其中的一种。

8. 数学归纳法

数学归纳法是用来证明与自然数有关的命题的一种方法，是通过“有限”步骤，证明命题对“无限”多个自然数都是正确的。证明步骤为：第一步证明，当 n 取某个值 n_0 时，某个论段成立；第二步在假设 $n=k$ 成立的前提下，证明

当 $n=k+1$ 时，论段也成立。从而得出论段对于 $n\geqslant n_0$ 的所有自然数都成立。

数学归纳法其实也是演绎推理的一种，数学归纳法的正确性可以由皮亚诺公理给予证明，因而命题满足数学归纳法则也成立。

9．分析与综合

分析与综合是数学思维的两种基本的方法，是其他数学思维方法的基础。

分析是将研究对象分解为它的各个组成部分，然后对这些组成部分分别加以研究，从而认识事物的本质和规律的一种思维方法。如我们为了系统地研究理解圆锥曲线的性质，我们按离心率的取值范围将其分为椭圆、双曲线和抛物线，逐一研究各自的性质，继而研究他们之间的联系与区别。

综合是把研究对象的各个组成部分联系起来加以研究，从而从本质上把握事物的性质和规律。例如将椭圆、双曲线和抛物线的性质及相关系统一起进行研究，挖掘共同属性，得到圆锥曲线最基本的内容：到定点和定直线的距离之比是常数的点的轨迹。

其次，分析法还是特指从结果追溯到产生这一结果的原因的一种思维方法，而综合法则是一种从原因推导到由原因产生的结果的思维方法。

10．抽象和概括

抽象是把研究的事物从某种角度发现的本质属性抽取出来进行考察的思维方法。抽象最典型的例子是欧拉的哥尼斯堡的七桥问题。

概括是把抽象出来的若干事物的共同属性归结出来进行考察的思维方式。如给概念下定义的方法就是概括的方法。

11．特殊化与一般化

特殊化通常是指考虑一般性的命题的特殊例子，或如波利亚所说“是从考虑一组给定的对象集合过渡到考虑该集合的一个较小的子集，或仅仅一个对象。”

特殊化的思维作用包括两个方面：

演绎作用。如由多边形的性质得出三角形、正方形等的性质。

通过对特殊或个别的分析去寻求一般。如要考虑多边形的内角和的问题，我们先考虑三角形和四边形的内角和的问题。

12．模型化与具体化

模型化或模型方法是通过抽象、概括和一般化，把研究的对象或问题转化为本质同一的另一对象或问题加以研究解决的思维方法。七桥问题就是一个例子。其实数学的研究对象就是数学模型，所以将实际问题转化为数学模型，是运用数学解决问题的基础。

具体化是把抽象的概念、原理和规律体现于具体的对象或问题的一种思维方法。如将多边形的性质运用于三角形之中，将一般函数的性质运用于指数函

数之中等。

13. 类比与映射

类比是一种间接推理的方法，也是一种科学研究的方法。它以比较为基础，首先对两个不同对象的某些属性进行比较，找出他们的相似点或近似程度，然后再联想或预见。常用的类比有：平面与空间的类比、数与形的类比、有限与无限的类比等。

映射是关系、映射与反演的简称，它是指在两类数学对象或实际问题与数学对象之间建立“对应关系”，利用关系、映射、反演原则进行问题解决的过程，如七桥问题。再如将代数问题转化为几何问题，即数形结合的思想等都是映射思想的运用。

14. 联想与猜测

联想是由一个事物想到与其相关的另一个事物的思维过程。例如计算 $(1+i)^n\cdot(1-i)^{6-n}$ 可以联想到 $\frac{1+i}{1-i}$ 的特性，从而求出 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$。

猜想是对研究的对象或问题进行观察、实验、分析、比较、联想、类比、归纳等，依据已有的材料作出符合一定的经验的推理性想象的思维过程。猜想既有一定的科学性，又有一定的假定性。

8.1.4 数学思维能力主要包括四个方面的内容

1. 会观察、实验、比较、猜想、分析、综合、抽象和概括；
2. 会用归纳、演绎和类比进行推理；
3. 会合乎逻辑地、准确地阐述自己的思想和观点；
4. 能运用数学概念、思想和方法，辨明数学关系，形成良好的思维品质。

8.1.5 数学思维品质及培养

心理学家认为，培养学生的数学思维品质是培养和发展数学能力的突破口。思维品质包括思维的深刻性、广阔性、灵活性、敏捷性、批判性和创造性，它们反映了思维的不同方面的特征，因此在教学过程中应该有不同的培养手段。

思维品质的差异实质上表现为人的能力的差异，因此在数学教学中要重视对学生良好的思维品质的培养。应注意以下几个方面的培养。

1. 思维的深刻性

思维的深刻性是指思维活动的抽象程度和逻辑水平，它集中表现在善于透过现象和外部联系，揭示事物的本质和规律，深入地思考问题，系统化、一般化地解决问题。数学思维的深刻性品质的差异集中体现了学生数学能力的差异，教学中培养学生数学思维的深刻性，实际上就是培养学生的数学能力。数学教学

中应当教育学生学会透过现象看本质，学会全面地思考问题，养成追根究底的习惯。

思维的深刻性通常具有如下特征：

第一，善于从本质上理解数学对象。如能认识到数学中所研究的几何图形，只是具体对象的抽象物，而不是具体的事物，因而只存在于人的思维之中，而不存在与自然界；又如，能够认识到，任何数学对象的研究都是一个抽象到具体再到进一步抽象的过程等等；

第二，善于运用对立统一的观点理解数学对象。如能够通过有限的情况认识无穷的情况，并能用有限刻画无穷；又如，能够意识到数学研究对象的相互对立的两个方面的相互依赖性；

第三，善于思辨，敢于质疑问题。善于对学习中的问题深入思考，敢于尝试创造性学习。

培养学生的思维深刻性就应该围绕以上几个方面开展教学。首先应该使学生全面认识和理解数学，不仅要认识数学对象本身，而且要认识数学对象产生的过程和数学研究结果的运用。其次，要在数学教学中，使学生通过现象看到事物的本质，在变化中认识不变，在不变中认识变化。

2. 思维的广阔性

思维的广阔性是指思路宽广，善于多角度、多层次地进行探求。主要特征是面对具体问题能够全面地认识问题，并能发现许多与此相关的问题。也就是说数学思维广阔性是对一个数学问题能从多方面考虑，思维呈现发散的状态。

培养学生的思维广阔性就应该具有一定的层次性。首先，为培养学生对一个对象能从多角度观察，可以利用一题多解的方式引导学生对一个题目，想出多种不同的解法。其次，通过开放题和开放教学进行培养。

3. 思维的灵活性

思维的灵活性是指思维活动的灵活程度，主要表现为具有超脱出习惯处理方法界限的能力。即一旦所给条件发生变化，便能改变先前的思维途径，找到新的问题解决的方法。在数学学习中思维的灵活性主要表现为以下几个方面。

第一，随着问题的新的条件的变化而迅速确定解题方向，并能根据目前情况联想到与之相关的其他知识和已经解决的问题；

第二，当思维受阻时，能够很快发现问题，并能从一种解题途径转向另一种解题途径，或从多种方面思考同一问题；

第三，从已知数学关系中看出新的数学关系，从隐蔽的形式中分清实质的能力。

培养学生的思维灵活性就应该围绕以上几个方面开展教学。首先,应增强数学教学的变化性,为学生提供思维的广泛联想空间,使学生在面临问题时能够从多种角度进行考虑,并迅速地建立起自己的思路,真正做到"举一反三"。其次,应较多的应用变式教学。教学实践表明,变式教学对于培养学生思维的灵活性有很大作用。如在概念教学中,使学生用等值语言叙述概念,从多角度理解概念;数学公式教学中,要求学生掌握公式的各种变形等,都有利于培养思维的灵活性。

4. 思维的独创性

思维的独创性是指思维活动的创新程度。即能根据一定目的,运用一切已知信息,在新异情况或困难面前采取对策,独特地、新颖地且有价值地在解决问题的过程中表现出来的智力品质。思维的独创性的基本特征是创造。它表现为思考问题和解决问题时的方式或结果的新颖、独特。能够揭示事物的内在规律,探索新的问题,发现新的东西,对事物的发展趋向具有前瞻性、预见性的高层次的思维能力。具体地说思维独创性有三个特点:

第一,思维方式的独特性。即思维具有明显的个性色彩,能自觉而独立地操纵条件和结论,进而解决问题;

第二,思维过程的发散性。即思维能从某一给定的信息中,产生为数众多、形式各异的信息,形成复杂的结构和复杂的活动方式;

第三,思维结果的新颖性。即思维的结果(概念、结论、方案、优解等),包含着新的因素,它是一种探新的思维活动。

培养学生思维的独创性是一个长期的过程,首先,教学中教师应该鼓励学生发展自己的个性,形成独特的思考问题的方式;其次,是努力培养学生对数学的兴趣,因为只有对有兴趣的对象才有可能进行认真思考;再就是注意培养学生探究的能力。创新思维能力在数学教学中主要表现对已解决问题寻求新的解法,因此,创造性思维品质的培养,还应当使学生融会贯通地学习知识,养成独立思考的习惯。在独立思考的基础上,还要启发学生积极探究,使学生多思善问,"学起于思,思源于疑",学生探索知识的思维过程总是从问题开始,能够提出高质量的问题是创新的开始。在教学中应当鼓励学生提出不同看法,并引导学生积极思考和自我鉴别。也就是说培养学生的创新思维能力必须从培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力开始。

5. 思维的敏捷性

思维的敏捷性是指思维活动的反应速度和熟练程度。它表现为思考问题时敏捷快速,善于运用直觉思维,善于使用数学模式。敏捷是以准确为前提的,是建立在掌握了扎实的基础知识和熟练的基本技能,正确领会知识和把握问题的实质的基础上的。

数学思维的敏捷性主要反映了正确前提下的速度问题。因此，数学教学中，一方面可以考虑训练学生的思维速度，即对思维对象迅速作出反应。另一方面要尽量使学生把握数学概念、原理的本质，提高所掌握的数学知识的抽象程度。因为掌握的知识越本质、抽象程度越高，其适应的范围就越广泛，检索的速度也就越快。另外，思维速度不仅仅是对数学知识理解程度的差异，而且还有思维习惯以及思维概括能力的差异。因此，数学教学中，应当时刻向学生提出速度方面的要求，使学生掌握思维敏捷的要领。

6. 思维的批判性

思维的批判性就是善于发现问题，提出疑问，辨别是非的一种思维品质。批判性的思维是一种实事求是、周到严密的思维。思维的批判性与思维的创新性具有密切的联系，只有具备了思维的批判性，才有可能用“怀疑”的眼光看待已有的知识，也才能够发现新的问题，从而给数学研究开辟新的大路，非欧几何的创立深刻地说明了这一点。

在中学阶段，批判性思维品质的培养，可以把重点放在引导学生检查和调节自己的思维活动过程上。要引导学生剖析自己发现和解决问题的过程，反思学习中运用的基本的思考方法、技能和技巧，它们的合理性如何，效果如何，有没有更好的方法；学习中走过哪些弯路，犯过哪些错误，原因何在。

8.2 运算能力和想象能力的培养

我国从1963年的数学教学大纲开始，就将运算能力、空间想象能力和逻辑思维能力列为数学教育的三大基本能力，而且后来的中学数学大纲或课程标准都明确规定在教学中应培养学生的这三大基本能力，随着社会发展对数学教学的要求的提高，创新能力成为一个公民的重要的能力，因而创新思维能力也成为数学教学能力培养的重要方面。前面已经对逻辑思维能力及创新能力进行了讨论，本节将注意力集中于运算能力、空间想象能力讨论。

培养学生的运算能力和空间想象能力，是数学教育的永恒的话题，也是数学教育长期的教育目的。目前，对培养这两种能力的重要性的认识在数学教育界已经形成一致的意见，但对于如何在教学中培养学生这两方面的能力却是仁者见仁，智者见智。

8.2.1 运算能力

1. 运算能力概述

运算是一个广义的概念。所谓运算能力，是根据运算法则，按照一定的步骤进行推理运算并求得结果的能力，是善于分析题目的条件，寻求合理简捷的方法

与途径达到运算结果的能力，这是运算能力的双重含义①。运算中的智力品质主要表现为：运算的敏捷性、灵活性、独创性。

(1) 运算的敏捷性

运算的敏捷性是指在运算的过程中体现的智力活动的速度与准确率。表现在处理和解决问题的过程中，能够针对问题情况迅速进入积极地思维，产生多方面的联想，并能通过周密地考虑，正确地判断和迅速地作出结论。

如求 $y=\sqrt{x-4}-\sqrt{15-3x}$的最大值和最先值。

一般学生都能注意到 $4\leqslant x\leqslant 5$，但还是难以解决问题，思维敏捷的学生能发现 $0\leqslant x-4\leqslant 1$，从而令 $x-4=\sin^2\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，从而，$y=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$，问题迎刃而解。

智力活动的速度往往以其他智力品质为基础，而更有其自己发展的特点。这种智力活动的速度，和每个不同个体的遗传因素有关，具有一定的先天性，但主要是来自后天的培养。其实速度在很大程度上取决于方法。

如化简$\dfrac{1+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$，一般学生可能想到运用余弦的和差角公式展开，这显然会影响速度，思维敏捷的学生会发现 $\alpha+\frac{\pi}{6}-\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，从而将 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$转化为 $\cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，再利用 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$，问题很快得以解决。

因而，要提高学生运算的敏捷性，一方面，要在平时训练中坚持严格的速度要求，另一方面，要注意解题方法的多样化教学。

(2) 运算的灵活性

运算的灵活性是指在运算的过程中，体现出来的思维的灵活程度。思维的灵活程度反映了思维活动在选择、运用方法、展开思考过程诸多方面的灵活程度。灵活性是创造力的基础，也是运算的智力基础。

为了培养学生计算的灵活性，在数学教学中，一方面，要经常启发引导学生面对问题，从不同角度，用各种方法来推算各类的数学习题。当然这必须以丰富的知识为依据，只有储备大量的背景材料，才有可能从各个方面去把握问题的脉络，来开拓运算途径；另一方面，还应该要求学生对各类定义、公式、公理、定理、法则等运用自如，如正切函数的和角公式

---

① 管延禄. 中学数学教育教学论. 北京：科学出版社，2007.1(221).

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

可以进行多种变形，如

$$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)\cdot(1-\tan\alpha\tan\beta),$$

$$1-\tan\alpha\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}$$

等，应该要求学生能够依据不同的问题利用公式的不同变形。学生只有掌握了各种公式的变形和运用于不同情况的具体实例，才能在面对新的具体问题时，根据具体情况而作出相应的反映，并能依据问题的变化，及时调整自己的运算方案；再就是要求学生全面地理解问题，不忽视各个细节。

(3) 运算的独创性

运算的独创性是智力活动水平的重要指标。逆向思维是独创性的重要表现，所谓逆向思维是相对于习惯思维而言的，也就是从相反的方向来考虑问题的思维方法，它常常与事物常理相悖，但却达到了出其不意的效果，如下例。

古代印度一位老人临终留下遗嘱，要把 19 头牛分给三个儿子，老大得总数的$\frac{1}{2}$，老二得$\frac{1}{4}$，老三得$\frac{1}{5}$。不能宰杀牛，应该如何分？一个智叟沉思片刻后，提出一个方案。借一头牛来，老大就可以分得 10 头，老二分得 5 头，老三分得 4 头，剩下一头还给借主。

学习贵在创新，尤其是数学学习。提高学生运算的独创能力的关键是要培养学生独立思考的思维品质和思维习惯，另外要鼓励学生敢于创新。

2. 运算能力培养

综合上述运算品质的各个方面，我们可以对运算能力的培养提出以下建议。

首先，教师应明确运算能力是数学各种能力的基础，而且教师对中学数学中所涉及的运算应该心中有数。目前，初中数学运算，包括数值的计算、式的恒等变形、方程和不等式的同解变形、初等函数的求值变形、几何量的测量和计算、初等几何变换、统计初步计算等，因此初中运算能力指对具体数值计算和对数、式进行变换的能力。高中数学中的运算不仅包括数值的计算，还包括各种代数运算、初等函数运算、分析运算以及式的变形等等。因此，高中运算能力不仅包括初中的部分，还包括抽象运算。

其次，教师对培养学生的运算能力应该针对不同的学生制定具体措施。一般的说，以下几个方面是应该。第一要加强数学基础知识教学，因为数学基础知识是进行正确、迅速运算的依据，是提高运算能力的关键。教学中，要使学生理解和掌握进行各种运算的有关概念、性质、公式、法则等；第二要加强基本技能技巧训练，因为运算能力只能在运算的过程中得到提高。

8.2.2 估算能力的培养[①]

在实际生活中,许多事物都无需知道,甚至于不可能知道它的准确数,而只要运算出其近似值就可以了,这表明,估算在实际应用中十分广泛。因此培养学生的估算能力就成为数学教育的重要内容,估算不仅可以使学生灵活解决各种问题,而且对学生的直觉思维能力的培养也具有重要的意义。一定的估算能力也是良好运算素养的一种体现。

1. 运用估算培养学生灵活处理问题的能力

在运算教学的过程中,教师不应对运算过程的方法做过多的要求,因为如此不仅学生的学习兴趣难以提高甚至下降,而且对培养学生灵活处理问题的能力也是无益的。反之,教师如果能引导学生灵活处理各种问题,则不仅可以培养学生的估算能力,而且对调动学生的学习积极性也是有帮助的。

例 类似下列的计算经常出现。

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+1.9+0.9+0.9+0.9+3\times 90\%。$$

先估算,由于$\frac{9}{10}\approx 1, 1.9\approx 2$,所以,

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+1.9+0.9+0.9+0.9+3\times 90\%$$
$$\approx 1+1+1+2+1+1+1+3\times 1=11$$

但$\frac{9}{10}<1, 1.9<2$,所以$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+1.9+0.9+0.9+0.9+3\times 90\%<11$,但相差不会太大,因而估计原式近似等于10,有了这一估算过程,学生的计算也就会设法与10联系起来。从而找到简便运算

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+1.9+0.9+0.9+0.9+3\times 90\%$$
$$=0.9\times 10+1=10(\text{或}=0.9\times 11+0.1=10)。$$

2. 利用估算培养学生直觉思维的能力

直觉思维的特点是直接接触问题的实质,思维的路线是跳跃性的、试探性的。直觉思维的培养方式有很多种,而运用估算是一个重要途径。

例 在一个大圆中有100个大小不等的小圆。这些小圆的圆心都在大圆的同一条直径上,且连同大圆在内,相邻两个圆都相切。已知大圆的周长为C,求这些小圆的周长和。

---

① 刘咏梅.应注意培养学生的估算能力.小学数学研究,1998.2;中国人民大学复印报刊资料,小学各科教学,1998.3.

此问题如果先设法求圆的半径或周长就会相当麻烦，利用估算便可以很快解决问题。首先思考：这些圆的周长和是大于大圆的周长、等于大圆的周长还是小于大圆的周长（直接接触问题实质）；另外，由条件可以知道，所有小圆的直径和等于大圆的直径，则可估计，所有小圆的周长和等于大圆的周长。

有了上述估计，则目标已经十分明确，就是检验估计结果是否正确。

$C_1+C_2+\cdots+C_{100}=\pi d_1+\pi d_2+\cdots+\pi d_{100}=\pi(d_1+d_2+\cdots+d_{100})=\pi d$（$d$ 是大圆的直径）$=C$，与估算相符。

3. 近似与精确是对立统一的

数学中存在许多对立统一的问题，近似与精确就是一对对立统一的矛盾，没有精确或没有近似数学都是不完整的。对概念的定义、对问题的证明我们需要精确，而对问题的研究我们也需要近似，也就是说，数学对每一个涉及的概念都希望能够给出严格的定义，将其形式化，然而在对问题的研究时，我们却又要借助于近似与精确相联系的手段来完成。如对于指数函数我们需要给其严格的定义，但在对其性质进行研究时，我们需要作出其近似的函数图像，并需要通过观察等手段来猜测其性质，再利用精确的手段来证明其性质，所以近似与精确在数学中是不可分离的两个方面。

8.2.3 想象能力

想象力是在事物之间搭上关系，就是寻求、发现、评价、组合事物之间的相关关系。更进一步地讲，想象力就是如何以有关的、可信的方式，在以前无关的事物之间建立一种新的有意义的关系。有一个故事无论是否真实，对说明想象力的重要具有一定的意义。据说罗马一出版商为售出滞销的书，想尽办法托人给总统看，但总统工作很忙，无暇顾及。再三请求提意见，总统随便说了句“此书甚好”。该出版商马上推出广告词：“现有总统评价很高的书出售。”结果积压的书一售而空。另一出版商见状，也用此法，总统被利用了一回，这次说了句：“此书很糟。”相应出台的广告词为：“兹有总统批评甚烈的书出售。”结果书也很火爆。又一出版商马上也送了一套书给总统，总统这次决心不加理睬，于是，第三个广告词表述为：“现有连总统也难以下结论的书出售。”他的书销路居然也很好。这是商人为推销自己的商品，而运用想象力于广告的事例。

在数学中，想象力同样重要，特别是空间想象力，以下我们分空间想象力和一般想象力来对数学中的想象力进行讨论。

1. 空间想象能力

所谓空间想象能力就是人们对客观事物的空间形式进行观察、分析和抽象思维的能力。这种能力的特点是：善于在头脑中构成研究对象的空间形状和简明的结构，并能将对实物的一些操作，在头脑中做相应的思考。

中学数学研究的空间就是一维、二维和三维的空间，也就是与我们生活的空间有直接联系的空间，想象就是用人脑储存的资料来构思新事物的形象思维过程，想象能力是创新能力的一部分，因此培养学生的空间想象能力就显得十分重要。

培养学生的空间想象能力同样需要加强基础知识教学，因为学习基础知识的过程也就是说空间想象能力的形成过程。另外培养学生的空间想象能力还需要经历从借助具体模型想象到脱离具体模型进行想象的过程，教学必须以这一点为依据。因为借助于实物或模型可以使学生在头脑中形成一些常见的空间图形的形象，再借助于这些形象在头脑中形成更复杂的形象。

2. 一般想象能力

想象力是人的高级思维活动能力，其特点是既依靠实际又脱离实际。想象力是数学产生和发展的基础，无论是在古代中国还是在古希腊，人们都将想象力充分地运用于数学研究，如在求圆的面积时，人们将圆看成是正多边形的边数无限增加的结果。从某种意义上说现代数学的发展的一个重要的依赖就是想象力，笛卡儿运用丰富的想象，将变量引入了数学，也就是说，运用想象将曲线看成运动变化的结果，这对现代数学的诞生具有里程碑的作用。康托尔利用超人的想象力，设想一个具有无穷间房间的旅馆已经住满了旅客，但却依然能住下无穷位新来的旅客，从而揭示了无穷集合的本质属性，在一定程度解决了几千年关于"无穷是什么"的问题，为数学的发展奠定了坚实的基础。因此，没有想象力的数学是难以想象的。

在中学数学中培养学生的想象力，不仅是必要的，而且在中学教材中也存在大量的需要依据想象力才能理解的问题。如理解极限概念、理解归纳法、理解函数图形的变化趋势等都需要具有足够的想象力。因而教师应该充分利用这些素材，培养学生的想象力。

8.3 数学推理能力的培养

培养学生的数学推理能力应当作为数学教育的中心任务。这是 2002 年 8 月在北京召开的第 24 届国际数学家大会上，数学教育圆桌会议所达成的基本共识。来自多个国家的数学教育专家就各国的数学推理教学现状进行了广泛的交流。共同担心的问题是："推理、证明在基础教育中的地位有下降的危险。"主要原因在于：各国早期数学教育的课程设置基本上是将焦点集中在算术概念、计算和算法上，进入 7 年级和 8 年级后，突然要求学生理解并写出严密的推理过程，缺少一定的"缓冲余地"，学生普遍感到吃力，产生畏难情绪。解决这一问题的手段又过于简单，认为以推理见长的几何证明是造成这一困境的"罪魁祸

首”。因而削减几何内容几乎成为一种时尚。[①] 如何培养学生的推理能力是一个值得探讨的问题。

数学推理本质上是演绎推理。因此培养学生的数学推理能力应立足于演绎推理,同时发展合情推理等其他推理能力。

8.3.1 数学推理的功能

关于数学推理的功能,我们可以先看看希腊哲学家柏拉图在他的哲学学校门口的声明“不懂几何者请勿入内。”其实,他的课并非讨论几何问题,而是关于社会的、政治的和道德的问题,只不过,他认为只有掌握了以推理见长的几何,才具备逻辑思维能力来探讨这些问题。由此可见推理对一个人的意义。

首先,数学中的推理证明对人的逻辑思维的训练有着其他学科所无法替代的作用,也是数学立足于科学之林的根本。美国数学教育家波利亚提出的数学教育主要是“教会年轻人思考”,很大程度上是指教会学生独立进行数学推理的方法。对于中学生来说,推理具体的功能在于以下几个方面:

1. 培养学生理性思维的习惯和能力。新的课程标准将培养学生的“数感”作为数学教育的目的之一,而所谓数感就是具有数学的思维方式和观察问题的方式,也就是理性思维的方式,而数学推理对培养学生的理性思维具有重要的作用;

2. 使学生正确认识数学,形成自己的数学观。数学推理是数学的根本,对数学推理的认识就是对数学根本的认识和理解,因此,也就是形成数学观的基础;

3. 学习推理的方法。数学推理的方法仅仅依靠教师的讲授是很难掌握的,必须经过大量的推理实践才能掌握,因此,推理的重要功能就是使学生学会推理。

另外,数学推理的过程是积累有助于理解命题的“过程性知识”的过程。所谓“过程性知识”是指体验性知识、策略性知识及元认知知识。由于过程性知识是在主体的尝试、探索过程中形成的,融入了个体特定数学活动场景中的特定心理体验,因而是理解相关数学命题所必需的基本要素。数学推理活动的最大特点在于推理活动者本人的“自主参与性”,在这个过程中学习者本人根据待研究的命题特点,从相关知识储备中,提取推理链条中所需的信息,经筛选、组织、转换,使之与正在编码的新信息协调、整合起来,加工成符合逻辑的信息体。在此过程中,既有新旧知识的同化与顺应,又有对象及性质的甄别与重组;既有关系及图式的匹配与构建,又有过程及结构的反省与修正。这些活动充分调动了推

① 宁连华.数学推理的本质和功能及其能力培养.数学教育学报,2003.3(42).

理者本人的思维机制,形成了一条系统、有序的推理活动链。无论是顺利的成功推理,还是经过多次挫折、迂回获得的胜利,都使推理者本人获得了相关的过程知识,增强了对数学问题的感悟和理解。

8.3.2 数学推理能力的培养

我国的数学教育在推理能力的培养问题上,无论是教学内容还是教学方式,一度出现过分追求严谨性、形式化演绎推理的倾向,有必要对之进行反思和整改,但也应谨防从一个极端滑向另一个极端,失去数学理性这一基本特点。因此在进行推理能力培养的时候,要注意以下问题:

首先,课程内容的删减与添加应确保演绎推理占有足够的份额,这是培养学生推理能力的根本保证。

其次,数学教学过程要力求为学生创设推理的机会和环境,暴露推理的真实思维过程,引导学生自主参与到推理活动中去,因为推理能力的获得不是靠"传授"得来的,而是在学生自主参与的推理活动中"领悟"出来的。

具体地说,在推理能力培养的教学中,教师可以从以下几个方面开展教学。

1. 明确推理的意义

如前所述,推理是数学的基本特点,数学对象的真确性的保证必须依据运用逻辑推理方式的证明手段,因而推理是证明的过程。另外,推理也是发现新的数学问题、创立新的数学概念、形成新的数学思想的基本方法。如在数学中,有一个基本的命题,就是"平面内两个点可以确定一条直线。"依据对偶原理可以推理,平面内任意两条直线应该可以确定一个点,然而,平行直线的问题怎么解决?人们创造了"无穷远点"的概念来完成对偶命题成立的"心愿",这一创造又为数学研究增添了新的活力。

2. 掌握基本的推理知识

推理是从一个或几个判断得到一个新的判断的思维形式[①];推理有一些需要遵循的推理规则,如三段论推理规则;推理有似真推理和必真推理两种形式等这些基本的推理知识应该使学生掌握。另外对于常用的推理形式,也应该适当地使学生掌握其逻辑基础,如"为什么反证法证明的结论是可靠的?"回答这一问题,就必须依据逻辑中的基本原理进行说明。实际上,我们可以利用真值表或命题演算推出$\neg(p\rightarrow q)\rightarrow(r\wedge\neg r)\equiv p\rightarrow q$,因而,用反证法得出的结论是可靠的。

3. 学会基本的推理方法

在中学中基本的推理有归纳推理、类比推理等,应结合实例使学生理解这些推理的作用和内涵。如下面两个例子就分别运用了归纳推理和类比推理。

---

① 钱佩玲,等.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999.7(104).

例 1　已知 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$，$a+b=2$，求$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$的最小值。

思考这一问题，可以先考虑 $n=1$ 的情况，求$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$的最小值，经过简短的运算和利用不等式$(1+a)(1+b)\leqslant\left(\frac{1+a+1+b}{2}\right)^2=4$，从而$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$的最小值为 1；

再考虑 $n=2$ 的情况，$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{6-2ab}{5-2ab+a^2b^2}$，令 $ab=t$，则$\frac{6-2ab}{5-2ab+a^2b^2}=\frac{6-2t}{5-2t+t^2}$，可以求出$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}$的最小值也为 1；

最后只要证明$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$的最小值为 1 即可。

这里运用了归纳推理，使问题的方向明确了。

例 2　(1) 函数 $y=f(x)$满足$f(x)=\frac{f(x-1)}{f(x-2)}$，$f(x)\neq 0$，求证 $T=6$ 是函数的周期；(2) 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_n=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}(n\geqslant 3)$，求 $a_{2\,006}$。

先考虑(1)，由于$f(x)=\frac{f(x-1)}{f(x-2)}$得$f(x-1)=f(x)\cdot f(x-2)$，
类推得$f(x-2)=f(x-1)\cdot f(x-3)$，
两式相乘得$f(x-1)\cdot f(x-2)=f(x)\cdot f(x-1)\cdot f(x-2)\cdot f(x-3)$，
从而$f(x)=\frac{1}{f(x-3)}$，$f(x+3)=\frac{1}{f(x)}$，即$f(x+6)=\frac{1}{f(x+3)}=f(x)$。

再将上述结果类比到(2)，$f(n)=a_n$，$f(n-1)=a_{n-1}$，$f(n-2)=a_{n-2}$，则由已知得$f(n)=\frac{f(n-1)}{f(n-2)}$，又由(1)类比得 $a_{n+6}=a_n$，即 6 是数列各项组成函数的周期，故 $a_{2\,006}=a_2=2$。

这里，我们利用了类比的推理，使比较难的问题简单化了，实际上，我们还可以类比得出更一般的结论。

8.4　数学技能的培养

技能是教育学和心理学中常用的术语，依据心理学家加涅的学习结果分类理论和信息加工心理学理论，可将技能分为动作技能、智慧技能和一种特殊的智慧技能。数学技能是顺利完成数学任务的活动方式，数学技能有心智技能与操作技能两种。所谓心智技能是指一种内部的(思维的)活动方式，如代

数式变形、解方程、推理证明等许多自动化的思维活动方式。所谓操作技能指一种外部的自动化的活动方式,如绘图、测量、使用计算器等的外显的动作方式。

8.4.1 关于基本技能的训练

熟练掌握一些基本技能,对学好数学是非常重要的。技能的训练必须合理和全面。在过去的数学教学中,往往偏重于单一的“纸与笔”的技能训练,对一些非本质的细枝末节的地方,过分地做了人为技巧方面的训练,例如对集合中“三性”的过于细微的训练、对于函数中求定义域过于人为技巧的训练等等。特别是在对于运算技能的训练中,经常人为地制造一些技巧性很强的高难度计算题,或者技巧性不强但是计算非常繁琐、意义不大的计算题,比如三角恒等变形里面就有许多复杂的运算和证明,这样的训练往往使学生感到枯燥,渐渐地学生对数学学习就会失去兴趣,这是我们所不愿看到的。我们对学生基本技能的训练,不单纯是为了让学生学习、掌握数学知识,还要在学习知识的同时,提高学生数学能力,提高学生对数学的认识。

事实上,数学技能的训练,不仅应包括“纸与笔”的运算、推理、作图等技能的训练,还应包含更广泛更有效的技能训练内容。我们要在教学中重视对学生进行以下的技能训练:

第一,在计算技能方面,应使学生能够熟练地完成心算与估算;能决定什么情况下需寻求精确的答案,什么情况下只需估计就够了;能正确地、自信地、适当地使用计算器或计算机;能估计数量级的大小,判断心算或计算机结果的合理性,判断别人提供的数量结果的正确性;能用各种各样的表、图、打印结果和统计方法来组织、解释、并提供数据信息;能把模糊不清的问题用明晰的语言表达出来;能从具体的前后联系中,确定该问题采用什么数学方法最合适,会选择有效的解题策略等等。

第二,随着时代和数学的发展,对基本技能的理解也应相应的变化。教师对学生应该掌握的基本技能的理解的差异,反映在教学中就会产生不同的要求和处理方式。

如在目前高中数学中,有这样一个基本不等式:对任意正数 a,b 有 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立。在高一进行这一基本不等式的新授课教学中,对于下列问题哪些应是基本技能要求的,不同的教师就有不同的看法。

问题一:对于正数 x,证明 $\frac{x+1}{x}\geqslant 2$。

问题二：对于正数 x，求函数 $y=\frac{x+1}{x}$的最小值。

问题三：对于实数 x，证明 $\left|\frac{x+1}{x}\right|\geqslant 2$.

（问题三的证明有很多思路，如

思路1：分两种情形：正数 x，证明$\frac{x+1}{x}\geqslant 2$；负数 x，证明$\frac{x+1}{x}\leqslant -2$。

思路2：$\left|\frac{x+1}{x}\right|\geqslant 2\Leftrightarrow\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\geqslant 4\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x^2}\geqslant 2$。）

问题四：若 $x>\frac{3}{2}$，求 $y=\frac{x+4}{2x-3}$的最小值，并求相应的 x 值。

这些问题哪些是基本技能的问题，不同的教师有不同的看法，但大多数教师认为，问题一、二、三都应该是基本技能的要求，要求学生对这类问题熟练掌握，并形成自动化。将问题四看成是基本技能的教师认为，这类不等式的问题也是常见的问题，应要求学生熟悉这类型的问题，掌握（记住）解题流程，即变形（变分母）⇒利用基本不等式⇒最值⇒求相应的 x 值。

由于教师们对什么样的数学技能是基本数学技能有不同的认识，所以虽然大家都认可加强基本数学技能的训练，但训练的要求、内容是不同的。因此对于教师来说应该注意确定哪些才是基本技能要求的内容，要注意两个方面的问题。一个是要注意技能泛化可能带来的危害。如果将过多的内容作为技能来要求，则可能造成学生机械性学习，而且容易加重学生的学习负担。另一个是技能训练过少，不仅学生的基础知识不能扎实，而且能力的培养也会受到影响，因为没有一定的训练量是不可能培养出学生的能力的，况且没有一定的技能作支撑，遇到问题学生就将陷入盲目。

第三，技能训练状况与学生的能力培养和学习负担有密切的联系，因此，在教学中教师应该区分技能的状况来进行训练。数学技能分为基本数学程序性技能与基本数学非程序性技能。所谓基本数学程序性技能，指的是可以将其过程简化为一些基本的程序，而基本数学非程序性技能是不能简化为一些基本的程序的技能。如对初中生来说，在不同情况下，灵活选择一元二次方程的解法是非程序性数学技能，而用求根公式解一元二次方程是基本程序性技能。一项数学基本技能只有是程序性技能才能达到自动化的要求。教师有必要对哪些技能是基本程序性技能做出梳理，教学中只要求学生对这些技能做出熟悉掌握，逐步达到自动化的要求。而对非程序性技能，则应使学生灵活运用知识解决问题。这样区分可以减低学生学习成本，提高学习效率。另外，不同层次、学习阶段的学生对基本程序技能自动化程度应有不同的要求，而且，自动化也要逐步到位。

8.4.2 技能的教学

技能教学在数学教学中有重要的作用。实际上,如果学生没有形成如何完成某些数学作业的技能,势必影响他们进一步学习,如仅仅让学生知道有理数的运算法则是不够的,必须使他们能熟练地进行有理数的运算。

1. 技能教学的特点

技能的一个特征是模仿学习,技能的另一个特征是速度和准确性。因此教师必须给学生提供可以模仿的对象,并通过练习达到提高速度和准确性的要求。

2. 数学技能的学习过程

一般认为,数学技能的学习过程包括认知、示范模仿、外部语言和自动化四个阶段。

认知阶段是指理解、掌握与数学活动有关的数学知识、理解操作的条件和操作的结果。在这个阶段中,认知的首要目的是奠定形成数学技能的知识基础。例如学生在学习利用公式进行运算时,必须对公式理解并对公式的特点进行分析。

示范、模仿阶段是指学生在教师的示范下,领会与理解数学技能,并根据教师的示范模仿进行数学活动,以获得数学技能。在这一阶段,教师不仅要示范操作,而且要用精练的语言解释执行操作的条件。学生一方面要模仿教师的操作,另一方面要注意执行操作的条件。

外部语言阶段是指学生不再依靠范例的指引而是依靠自己的数学活动经验的指引进行某些活动,边活动边进行语言表述。如学生一边进行运算一边将运算的过程说出来。

自动化阶段是指学生可以自觉地、无意识地进行某种活动,并达到正确迅速的程度。自动化阶段的特征是:第一,数学活动迅速而正确;第二,数学活动的步骤简约顺利。这些特征都可以从学生进行数学活动过程中直接观察到,因此数学教师往往根据这些特征来判定学生是否形成数学技能。

3. 数学技能的教学步骤

第一,引入步骤。即通过集中注意、展示目标、诱发动机等步骤来使学生的注意力集中到需要练习的技能上来。

第二,解释说明步骤。命题教学中的解释说明步骤有时也能用来帮助学生理解法则或操作性原理的含义。

第三,说理步骤。同命题教学一样,在技能教学中,教师也常常会设计一些步骤来说明操作性原理的正确性,数学中的一个操作性原理,如果循着它达到了预期的目的——即数学上的一个正确结果,则赋予其“真”的值。因此向学生说明某个操作性原理是正确性的一个方法是,使他们确信他们所依据的原理将得

到正确答案。说明某个原理的正确性的第二个方法是，证明这个原理是建立在某个已经被证明的数学命题的基础上。

第四.练习步骤。前面讨论的步骤主要涉及技能学习的第一个方面——即知道如何做某事。第二个主要的方面就是技能的练习，因为只有通过练习，人们才能形成和发展既快又准地完成一项作业的能力。一个人要在求解方程、作图、证明等数学活动中变得熟练，就必须进行这些方面的练习。

当然，仅就练习本身而言，并不能保证学生对练习过的某项操作变得熟练，练习可能是有效的、无效的或不利的，这取决于它的特定背景。教学中判断练习是否有效的标准是：是否达到了某种目的。如果学生由于兴趣等方面的原因积极参与练习，则这种练习对他们来说就具有积极的意义，如果学生对练习无动于衷，这种练习不仅起不到积极的作用，而且还有可能发展成为一种漠不关心或不正确的反映。

4. 数学技能的练习设计

第一，强化和反馈。学习理论的一个基本命题断言，受到奖赏的行为更有可能反复出现。这个命题也被称为强化律。提到这条原理，霍德松作出了下面的评论：这条基本的学习律，确实已为数以千计的实验所征实。它似乎适合于每一种动物的学习行为，没有什么别的能如此强烈地影响着学习。

在心理学文献中，强化被定义为任意一种能使反应增强的刺激。通常的情况下，正面的强化由某种奖赏组成。在数学学习中，这种奖赏可以是来自学生由于精通了某项作业，获得一个好成绩而自我满足，或同伴、教师、父母的夸奖，学校领导的赏识，或某些别的奖励等。这些强化形式都能充当激发技能学习的积极手段。

强化虽然是一种促进学习的重要手段，但要使强化达到有效，必须注意以下几点：首先，学习的起始阶段，所有合乎要求的结果都应该得到强化；其次，预期的行为一旦出现，立即给予强化；再次，在学习者的心目中，强化必须是与合乎需要的行为建立鲜明的联系；最后，不强化不合乎要求的行为。

在技能教学中另一个要考虑的因素是反馈。教育心理学家把反馈定义为，学生得到的一种信息，一种使得他可以将自己的实际操作行为与技能要求的某种标准操作行为进行比较的信息。对技能的习得研究表明，反馈是确定技能学习的最重要的因素。反馈给学生提供矫正的信息，从而使学生能修正他们的操作行为。教育心理学家特别强调应在学生操作完成后立即给予反馈，认为拖延的反馈会变得无效，而且往往降低学生对作业的兴趣。

根据以上讨论，这里就数学技能教学中，对练习、强化、反馈的使用提出一些建议。首先，练习期间要尽量提供强化和反馈。在课堂上，教师在练习一开始就要注意观察学生的努力情况，并及时对合乎需要的行为给予强化；其次，教师的

强化要与实际相符,当出现无根据的或言过其实的夸奖时,学生会很快发现,这种夸奖的效果就会被削弱,甚至出现副作用;再次,对于在练习中出现错误的行为,应鼓励学生发现错误并纠正错误,并通过告诉学生答案提供反馈。要尽可能快地发还练习本或试卷,以便学生及时了解自己的错误,从而为改正错误提供机会;另外,应提醒学生注意他们的学习目标,教师应该告诉学生对他们的期望是什么,让学生了解自己达标的情况是对学生进行强化的一种形式。有时学生虽然作业是正确的,但是速度还不符合要求,或者作业的步骤没有有效地利用技能的操作程序,教师可以在对学生强调这种准确性的同时,鼓励他们逐步提高练习的速度;还要注意让学生为自己的作业成绩而自豪,来自学生自己提供的强化源泉是取之不尽的,教师可以通过称赞学生取得的成绩来加强这种强化作用。

第二,合理安排练习。练习的形式是多样的,如集中练习和分散练习就是其中两种。所谓集中练习是指长时间或不间断地练习,而分散练习则表示每次练习时间较短且允许有时间断期。研究表明,一般而言,分散练习比集中练习更优越。这是因为,首先,疲劳和烦躁更有可能伴随集中练习而出现,阻碍技能习得;其次,在集中练习期间出现的错误有可能变成痼疾;再次,不间断地练习可能会给识别学生弱点和不足增加难度。有间隔的练习有助于发现学生的弱点和不足,从而为学生提供弥补不足的机会,比如,可以让他们练习一下他们感到困难的部分。有时练习一下已经忘记的作业有利于技能习得。

集中练习也有优点,它对于直接记忆和保持有意义的学习内容更为有效。正如奥苏伯尔指出的,死记硬背式的集中练习是一种提高学习成绩的有效办法。但尽管这种练习在短时间内是奏效的,但分散练习更有利于长期记忆和保持。

由于集中练习和分散练习各具特点,因此我们要根据不同的练习内容和不同的练习时间来安排练习。

第三,提供变式练习和多样化的练习。在安排练习时还须注意,不要把练习弄得枯燥、单调和纯粹机械式的。把练习过程变成游戏过程对激发学生的兴趣是有效的。

8.4.3 技能教学的策略

总结上述,我们认为技能教学应注意以下几个方面。

(1) 提供技能基础知识;

(2) 让学生经历从“会”到“熟”的学习过程;

(3) 及时矫正;

(4) 注意在技能习得过程中发展学生的数学能力。

知识、技能和能力三者是密切相关的,它们相互联系、相互制约。一方面,技能的形成和能力的发展是以知识学习为基础的,离开数学知识的学习,数学技能

难以形成，数学能力也不可能得到发展。另一方面，数学能力水平制约着学生理解知识的快慢、深浅，也制约着学生巩固知识的程度，从而也影响学生技能形成。

在数学教学中，完成一项复杂的数学活动，往往必须应用多种数学技能，或者需要决定应用何种数学技能，这就需要对数学对象进行观察、分析，即完成复杂的数学活动必须以数学能力为基础。在形成技能后，要及时为学生提供发展能力的机会。

本章思考题

1. 中学数学包含哪几方面的能力，应该如何培养？
2. 中学生应该怎样进行逻辑基本规律的学习？
3. 逻辑思维对中学生素质的影响有哪些方面？
4. 中学数学包含哪几方面的基本技能，应该如何训练？
5. 谈谈知识、能力、技能之间关系的认识？

第9章 中学数学教学工作

一位中学数学教师,所要做的工作很多,除了与课堂教学有关的工作以外,还有许多其他工作,本章介绍与课堂教学相关的部分工作,并依据工作的顺序进行介绍。

9.1 教学设计

教学设计也称备课,是为其他教学环节所做的准备工作,是教学工作的起始环节。合理地进行教学设计是搞好教学的先决条件,是教师教学能力的体现。教师要实现课程目标,就需要采用一定的教学过程和方法。现代教学设计理论认为,教师所采取的教学过程、教学方法等,都是为了支持或促进学生的学习过程,使学生实现学习目标。因此教学过程和方法的选择要视学生的学习过程和规律而定。

教学设计的主要功能是把知识的学术形态(书本形态)转化为适合学生的教育形态,将理想的课程转化为教师所理解的课程并成为学生能较好接受的课程,也就是运用教育理论对数学知识进行加工,使书面形式的内容转化为学生能较好接受的教学知识内容。教师应以一定的教学思想、教学观念、教学理论为指导,对教材、学生及教学环境作全面的分析,并依此对教学行为做出设想。具体地说,要做好以下几个方面的工作。

9.1.1 研究教学目标

关于教学目标在第4章已经进行了讨论,这里主要讨论如何制定课堂教学目标的问题。

1. 课堂教学目标概述

教学是人类所从事的一种特殊的培养人的社会实践活动,是有明确目的的活动,教学活动的意义就在于达到预期的目标。因此,在教学时,必须明确期望达到的教学目标是什么,即期望学习者通过学习,在多方面起点的基础上,获得一个提高的效果是什么。

在数学教学设计过程中,制定教学目标是众多环节中的第一步,也是最重要

的一步。它关系到数学教学方法和策略的选择、数学教学内容的选择与组合、教学媒体的运用、教学效果的评价，它同时关系到教育目标的落实，起到指导教师数学课堂教学实践活动的作用。如果教学目标的制定不充分、不合理，即使再好的教学也很难达到其原本的目的。研究教学目标，目的就是使教学工作有的放矢。

教学目标分为认知领域、情感价值观领域和动作技能领域。在备课时要围绕这些领域来制定教学目标，并围绕目标选择教学的策略、方法和媒体，进行必要的内容重组。在过去的教学中，教师比较重视认知领域的教学目标，而相对忽视其他领域的教学目标。数学教育要传授知识，这是有史以来的一个共同的目标；但如果只注意这一目标，则难免使教学出现片面性。而且学生在数学学习过程中，很难体会到学习数学的意义和乐趣，容易使学生的学习在一种被动的情况下开展。要使学生全面发展，就必须在教学中注意几个方面的目标的协调。这三个方面的教学目标是相辅相成的，互相促进的，是一个整体。

在新数学课程标准下，要设计好课堂教学目标，必须掌握教学理论中关于教学目标的理论。理解教学目标的概念、体系和分类①。这里以高中数学课程标准为例来进行一些说明。

(1) 教学目标的分类

教学目标应分为知识领域的目标、技能领域的目标和情感价值观领域的教学目标。

(2) 教学目标的叙述

教学目标应明确在数学教学活动结束后学生学业行为的变化，包括知识、技能的获得，方法过程的掌握，情感、态度、价值观的形成。在表述时，应具体明确，应用“学生能……”、“学生会……”这样的语句来表述。在教学目标中，行为的表述是最基本的成分，说明学生在数学教学过程结束后应该达到什么要求。行为的表述应具有可观测点，使用明确的行为动词来描述。根据《普通高中数学课程标准》的要求，在知识与技能目标领域的行为动词有：了解、知道、理解、掌握等；在过程和方法目标领域的行为动词有：经历、观察、感知、设计、梳理、整理、分析、发现等；在情感、态度与价值观目标领域的行为动词有：感受、认识、获得、提高、增强、形成等。

分析教学目标，首先要考虑学习者这一主体。教学目标不是设计者或教学者施加给学习过程的，而是从学习者的学习过程中提取出来的。另外应尊重教学内容内在的逻辑体系特征，使教学目标有一定的弹性、可变化

---

① 濮安山. 新高中课程标准下数学课堂教学目标的设计. 数学教育学报，2006.1(92).

性。还要区分学习目标和教学目标,要支持学习者在学习过程中追求自己的目标。

2. 教学目标的种类

一般来说,教师应研究的教学目标有:一学期(或一学年)的总体目标,每个单元或章节的教学目标以及每个课时的教学目标。前两种在第四章已经叙述,本章重点谈论第三种教学目标的制定方法。

(1) 总体教学目标

总体教学目标一般由课程标准给出。课程标准是国家教育领导机构根据总体教学计划规定某一门课程教学内容和要求的文件,是教师教学的依据。在制订教学计划时,教师应对课程标准进行研究,使各个教学环节都符合课程标准中总体教学目标。

(2) 单元或章节教学目标

中学数学教学内容,是按单元或章节编排的。教师在进行教学设计时,不仅要把握每一个具体内容的精神,更要把握一个单元或一个章节知识的内在联系,从而全面地、整体地把握知识,掌握这个单元或章节的教学目标,并以此指导整个单元或章节的教学设计。

(3) 课时教学目标

课时是指教学时间单位,即一节课的时间。课时教学目标是每位教师在每一次上课前都需要制定的教学目标。每一节课都有教学目标,因而课时教学目标的制定是一项常规性工作。教师在进行教学设计时,要对每一节课的具体教学目标进行仔细的分析,使整个教学活动围绕教学目标来展开。

如直线参数方程的知识领域的教学目标是,使学生理解参数方程是直线方程的一种重要形式;理解参数方程中参数的意义(主要是几何意义);能利用直线的参数方程解决一些有关问题;从参数方程的参数选择过程中,体验数学的思想方法,即参数法。情感方面的目标可以制定为,从参数方程的形成过程体验数学解决问题时追求简洁、明确、方法多样等,从而理解数学研究问题的基本思路,并试图使学生体验数学的美。技能方面的目标可以定为掌握设参数的方法,并通过训练形成技能。

对目标进行研究,就是要将课程目标的几个方面的内在联系,以及关键目标分析清楚。如上述知识领域目标中关键的是第二个目标,即理解参数方程中参数的意义(主要是几何意义),因为这对于运用参数方程解决问题起关键作用。

3. 教学目标制定要注意的几点

课时教学目标是选定课型和教学方法的依据,是检查教学效果的标尺。确定教学目的深度、广度要适当。太宽就显示不出本节课的教学要求和特点;太窄

就会因小失大;过低会达不到大纲(或课程标准)所规定的要求;过高会脱离实际,完不成教学任务。总之,确定教学目的,一定要全面考虑,恰如其分、宽窄相宜、高低恰当。具体地说,设计教学目标应注意以下几点:

首先是全面性,教师在制定教学目标时,应从知识与技能,过程与方法,情感、态度与价值观这三个方面进行全面的考虑;

其次是具体性,在设计一堂数学课的教学目标时,必须注意贴近本堂课的教学内容,具体反映学生的学习行为,切忌笼统、泛泛而谈。如有的教师无论什么教学内容,都不忘在教学目标中将培养学生爱国精神、刻苦学习的精神等放在第一位,虽然这是教学的主要目标,但这一目标由于难以在一节课中实现,而且也难以检测实现状况,所以对教学的具体指导意义不强;

第三是难易应适度,要接近学生认知结构的"最近发展区",如有的教师在进行高中函数概念第一节课的教学时,就要求学生能够理解函数概念,并运用概念解决实际问题,这是很难实现的,因为理解是一个复杂的过程,要依赖多次的反复研究,在几十分钟内,要求学生理解这样一个较难的概念是难以做到的。因而将目标制定为初步认识函数概念及其发展过程更合适一些;

第四是重点应突出,一节数学课的内容很多,解决的问题也很广,通常可以设计多个教学目标,教师应对各种目标权衡,确定主要教学目标。其他教学目标要围绕主要目标设计,应突出重点。如在进行余弦和角公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 的教学时,至少有两个知识领域的目标,一个是掌握两点之间的距离公式及其推导过程,一个是运用两点间的距离公式推导余弦和角公式,那么就应该确定哪个是重点目标;

最后是学习结果便于检测,通过教学,学生的学业行为会有所变化,设计数学课堂教学目标时,应考虑它们能容易检测学生的预期行为变化。因此要在制定教学目标时,多使用知道、认识等一些便于检测的动词。

9.1.2 分析教材

数学教材是学生学习数学的知识载体,也是教师从事数学教学和学生从事数学学习的知识依据。毫无疑问,教材的好坏直接影响到教育质量的高低,由于教材是以知识凝聚的形态出现的,因此对教材的理解和分析的过程是对教材进行"解压缩"的过程,它不仅体现了教师的知识能力水平,而且对数学教学有制约作用。在教学中我们经常会发现,许多教师的教学不成功的原因是由于对教材的分析和理解还存在问题。

对教材进行仔细分析,是进行教学设计的关键。分析教材应从以下几个方面进行:研究教材的地位和作用,明确教学目标和把握教材的重点、难点及疑点,

以下主要对如何把握教材的重点、难点和疑点进行讨论。

1. 重点

所谓重点就是教材中举足轻重的、关键的、最基本的、最重要的内容，是教材中贯穿全局、带动全面、起核心作用的内容，它是由教材本身在知识结构中所处的地位和作用以及对学生的影响状况决定的。一般的说，教材中的定义、定理、公式、法则以及它们的推导和重要应用，各种技能技巧的培养和训练，解题的要领和方法，图形的制作和描绘等，都可确定为重点。确定教学重点是为了进一步明确教学目标，以便突出重点，实现目标。一般来说，可以从知识体系和非知识体系两个角度确定教材的重点。

(1) 从知识体系的角度来确定重点

从知识体系来考虑，重点应该具有层次性，首先是把握整个中学数学教材涉及的知识体系，确定重点"章"，这是重点的第一层次；其次是分析每一章的知识结构，找出重点"节"这是重点的第二层次；再次是深入分析每一节的知识结构，确定重点知识内容，这是第三层次。要注意的是有的章、节虽然可能不是整个知识体系的重点，但这部分内容本身却有自己的重要内容，因此在分析教材时，每一节课都有重点。

在上述三个层次中，第三层次是教学设计时需要重点考虑的内容，它与前两个层次有着密切联系。有时在一部分内容中，有若干个重点，那就必须仔细分析其重要程度及其相互联系，在教学中做出合理安排。

如在复数的乘法部分，教材主要有五个方面的内容。一是复数乘法的运算法则；二是复数乘法的运算律；三是重要公式当 $z\in\mathbf{C}$ 时，$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$；四是复数乘方的运算性质；五是 $i^n(n\in\mathbf{N})$ 的值的规律。其中，一、三、五均为重点内容，要想一节课完成所有重点内容的教学不仅较困难，而且也使教学失去了重点，必须进行取舍。由于公式当 $z\in\mathbf{C}$ 时，$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$ 的应用有许多方面，而且要求的技巧较高，讲这一内容就需要大量时间，为了给学生一个完整的认识，第一课时可以只安排一、二、四、五这四个内容，而此公式只要能够给出公式就可以了，这样一来一气呵成，对学生完整理解和掌握知识都有利，因此第一课时的重点应确定为一、五。

由于每一堂课都要有一个重点，而整堂的教学都是围绕着这个重点来逐步展开的。为了让学生明确本堂课的重点，教师在上课开始时，可以在黑板的一角将这些内容简短地写出来，以便引起学生的重视。讲授重点内容，是整堂课的教学高潮。教师要通过声音、手势、板书等的变化或应用模型、投影仪等直观教具，刺激学生的大脑，使学生能够兴奋起来，对所学内容在大脑中刻下强烈的印象，激发学生的学习兴趣，提高学生对新知识的接受能力。

“椭圆”第一课时，其教学的重点是掌握椭圆的定义和标准方程，难点是椭圆方程的化简。教师可从太阳、地球、人造地球卫星的运行轨道，谈到圆的直观图、圆萝卜的切片、阳光下圆盘在地面上的影子等等，让学生对椭圆有一个直观的了解。为了强调椭圆的定义，教师事先准备好一根细线及两根钉子，在给出椭圆在数学上的严格定义之前，教师先在黑板上取两个定点（两定点之间的距离小于细线的长度），再让两名学生按教师的要求在黑板上画一个椭圆。画好后，教师再在黑板上取两个定点（两定点之间的距离大于细线的长度），然后再请刚才两名学生按同样的要求作图。学生通过观察两次作图的过程，总结出经验和教训，教师因势利导，让学生自己得出椭圆的严格的定义。这样，学生对这一定义就会有深刻的了解了。在进一步求标准方程时，学生容易遇到这样一个问题：化简出现了麻烦。这时教师可以适当提示：化简含有根号的式子时，我们通常有什么方法？学生回答：可以两边平方。教师问：是直接平方好呢还是恰当整理后再平方？学生通过实践，发现对于这个方程，直接平方不利于化简，而整理后再平方，最后能得到圆满的结果。这样，椭圆方程的化简这一难点也就迎刃而解了，同时也解决了以后将要遇到的求双曲线的标准方程时的化简问题。

(2) 非知识体系的角度来考虑

在教学过程中，知识是一种“载体”，学生在学习过程中，除了掌握一定的知识外，更重要的是素质的全面提高。在数学教学中应努力培养学生的数学素养，数学素养包括的方面很多，要具体问题具体分析。如有的内容适合于培养学生的能力，有的内容适合于培养学生的思维品质，有的内容适合于培养学生对数学的热爱等，教师应在对教材有充分理解的基础上，确定非知识体系的培养目标。

这里我们应该特别注意的就是数学思想方法的教学和数学理性精神的培养。关于理性精神我们在第 11 章数学文化中再讨论。这里主要讨论数学思想方法的教学的问题。其实数学教学也就是数学化的过程，在一定意义上也就是数学思想方法的形成过程。然而，在教学中数学思想方法由于以隐蔽的方式存在于教材之中，往往难以引起数学教师的注意。如概念的形成过程，往往就包括了数学的抽象过程、知识的运用过程，还包括了数学建模的过程，但是这些内容需要教师透过知识挖掘出来。这就需要教师具有一种意识，而且这一工作也是更深入和更复杂的过程。

如双曲线几何性质的教学，由于椭圆的相关性质已是学生掌握了的知识，所以在这部分教学中，应将双曲线几何性质的教学作为载体，借助于双曲线与椭圆的集合性质之间的联系，重点使学生掌握类比、归纳等思想方法。另外，无论是双曲线还是椭圆，都是许多自然界中的运动轨迹的理想化，因而研究这些曲线的

性质对掌握自然界中的一些运动规律具有重要的意义，这样的引导可以使学生对数学与实际的关系有充分了解，对学习目的也具有重要的意义。这些都应该是教学的重点内容。

2. 难点、疑点、关键

所谓难点是指学生目前的认识水平接受起来比较困难的内容。所谓疑点，是容易使学生混淆、误解或产生疑惑的地方。所谓关键，就是理解、掌握某部分知识或解决某一问题的突破口，它还是攻克难点、突出重点之所在，往往是起转折作用。一旦掌握好关键，其他部分的学习就迎刃而解了。也就是学生通过这一知识的学习能够突破难点并把握知识的环节。难点具有相对性，且是相对学生而言的。一般的说，教材中比较抽象，结构比较复杂，本质属性比较隐蔽，需要应用新的观点和方法或学生缺乏必要的准备知识均可确定为难点，教师必须善于发现教材的难点。例如，高中数学中的极限概念、反三角函数概念、排列概念、集合概念等都应该是教学中的难点，用数学归纳法证明问题的方法、建立数学模型等也都是难点，全面把握和理解高中函数概念也是教学的难点。另外，除了这些知识内容方面的难点以外，还有非知识内容的难点，如如何提高学生的学习积极性和学习兴趣，如何创设情境将学习变为有意义的学习等都是教学中的难点。

这里主要讨论难点和疑点的确定问题。确定教学的难点和疑点，必须从学生的实际出发，教师要能够经常换位思考，即以学生的思维，学生的眼光来审视教材。这是新教师最容易忽视的问题，也就是用学生的眼光来审视教材，如有的新教师，会觉得某些内容很简单，因而觉得用一节课或几节课来教学某一单元无法安排，其实如果我们站在学生的立场就会发现，很多问题是比较难理解的。

如直线的参数方程，某教师在教学设计时是，先给出一例，已知一直线过定点 $P_0(x_0,y_0)$，其倾斜角是 α，求直线的参数方程。

教师引导学生以直线上任意一点 $P(x,y)$ 到定点的距离为参数 t，求出了直线的参数方程。看上去顺理成章，学生也似乎听明白了，但从学生的角度来说，就不可能在解决上述问题时先想到以任意一点到定点的距离为参数。如果从学生的角度来思考，首先想到的可能是先求出直线的点斜式方程，再设法求出其参数方程。

学生的思考如下：

由已知条件可知直线方程为：

$$\frac{x-x_0}{y-y_0}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\text{于是,}\begin{cases}x-x_0=t\cos\alpha,\\ y-y_0=t\sin\alpha。\end{cases}$$

如果从学生的角度出发进行教学设计，就应先让学生求出直线的参数方程，再让学生探讨参数的几何意义。

又如，在基本初等函数的导数 $y=a^x(a>0)$ 的教学中，教材是先讲对数函数的导数，再讲指数函数的导数。在指数函数的导数部分，教材是这样处理的：

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}。$$

现令 $a^{\Delta x}-1=t$，则 $\Delta x=\log_a(1+t)$，又当 $\Delta x\to 0$ 时，$t\to 0$，于是有：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a。$$

所以，$y'=a^x\ln a$。

如果教师照本宣科，学生似乎也可以理解，但若站在学生的角度去思考就会发现问题：这个推导关键的步骤是，设 $a^{\Delta x}-1=t$，而这一步是怎么想到的呢？对学生来说，这就是难点也是疑点。如果这个问题不能较好解决，对学生解决问题的能力的培养是不利的。

因此，教师在进行教学设计时，如果从学生的角度出发，可以先让学生思考，如何求 $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$。经过学生的多方面尝试后，教师提出“在解决问题时，有时候需要将问题上升到一般问题，即先解决一般问题，再解决特殊问题”；因为与指数函数互为反函数的对数函数的导数是已经解决了的问题，从而引导学生先解决互为反函数的函数的导数之间的关系，学生比较容易从形式上得出互为倒数的关系，由此可以引导学生借助于对数函数的导数解决指数函数的导数问题①。

在教学实践中，我们往往会发现这样的问题，学生上课都能理解教师所讲的内容，但课后自己解决一些数学问题时，如果是教师讲过的类型，可以模仿教师的操作方式，如果是教师没有讲过的类型，就会遇到困难。还有另一种也是数学教学中的常见问题，学生似乎不完全明白教学内容，但又不知道自己的问题在哪里。这些问题，实际上都说明教师在教学中，看上去已经解决了全部问题，但实际上没有真正明确学生的问题，也就不可能真正解决学生的问题。上述两个教学案例实际上都说明了这一问题。

不仅教师发现学生学习的难点需要对学生进行认真研究，而且在教学中我们还会注意到，许多学生对自己的问题也难以发现。因而教师在教学中应该善于使学生发现自己的问题，并使学生学会提出问题。如在第二个求 $y=$

① 郑敏信，等. 数学思维与数学方法论. 成都：四川教育出版社，2001.4(407).

$a^x(a>0)$的导数中，让学生尝试解决$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$就是使学生发现自己的问题，而引导学生解决问题的方法，实际上也就是数学中最常用的方法，也就是划归方法，因而使学生发现问题并体会数学思想方法应该是这部分内容教学的重要目的。

数学思想方法是数学的精髓，而这些精髓往往又是蕴涵在具体的数学知识内容之中，因而，教师一方面要能够站在学生的角度发现教学的难点，另一方面，又要能站在足够的高度充分挖掘隐含在教材深处的数学精髓，只有这样才能够在具体的教学中，达到又学习知识，又提高数学素养的目的。如，在教学对数的定义及运算法则时，如果教师只将教学目的放在使学生掌握对数的定义上，则可以由运算的需要，如已知 $2^x=9$ 求 x 的值，学生思考后觉得在已经掌握的知识中，没有办法解决这一问题，怎么办，引进符号暂时代替，于是便有了$\log_2 9$ 这一符号。如果教师将提高学生运用数学方法解决问题的能力作为重要的教学目标，则可以顺水推舟将问题引申一步，这里实际上所用的方法，就是数学中的重要方法，也就是符号法。就是说，在数学研究中，当我们已知的知识不够使用的时候，我们就先引进一个符号来代替某一新的对象，然后在进行形式化的研究它所具有的特点。教师只有提高数学思想方法教学的意识，并经常地向学生展示数学思想方法，才能使学生通过数学知识的学习，体会数学的内涵，也才能使教师的教学由知识传授转变为素质提高。实际上，数学思想方法的教学往往就在现有的教学中稍微深入一步，但效果却大不一样。

另外，在处理难点时，不宜把难点化为及其容易，学生无需努力就可以解决问题，这样实际上是以教师的思维代替了学生的思维，学生的思维能力并未得到发展，学生的主体作用也难以发挥。

现行的数学教材在编写方面还存在一些需要进一步完善的地方。如教材中经常出现与数学发展顺序不一致的地方。例如，历史上先有了对数，后来作为其逆运算才引进了指数，而教材是先讲指数再讲对数；历史上先研究积分运算（求无穷和），再研究微分运算（求曲线的切线斜率或运动的瞬时速度），教材却是先讲微分再讲积分。这些编写方法，有时会给学生的理解带来一些麻烦。例如，中学教材指数的引入是从底数的连乘开始的：$a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a=a^n$，这样只能得到自然数指数。由此再引申出分数指数与负指数，而后者已不好解释，况且还有指数为一般实数的指数函数。教材中的应用题却都是使用正整数，学生见不到一般指数的应用例证。教材后面的对数则是作为指数的逆运算引入的。实际上，如果先讲对数，再讲指数就可得到指数为一般实数的情况，这样的引入就自然一些，教师在进行教材分析的时候可思考这样的问题，并依据实际情

况对教材进行调整。

9.1.3 从实际出发

所谓从实际出发,就是在教学设计中,要从学生的实际出发,从教材的实际出发,从社会发展的实际出发。

1. 从学生的实际出发

教学设计必须从学生的实际出发。因为无论是教材的编写还是教师的教学,其结果都要在学生那里得到体现和落实,教学离开了学生的积极参与是不会有任何成效的。建构主义强调学生是学习的主体,该理论同时认为,为了取得好的教学效果,必须充分了解学习者的特征,并进行有针对性的教学设计,依据这一理论,在教学设计时必须对学生进行分析,并应从学生的实际出发。具体地说,必须做好以下几个方面的工作。

(1) 研究学生的数学认知结构状况

因为只有将学生的认知结构与数学的知识结构结合起来,才能收到好的教学效果,这是现代教育理论在数学教学中的应用。如在进行立体几何教学时,学生已经学习了平面几何,首先要引导学生复习运用好平面几何的知识,但又要注意两者的不同。如在画图方面,平面几何所画的图都是真实的(或相似的),而立体几何所画的有些部分是保持真实或相似,而有些部分却改变了原来的形状,而学习画图和看图是立体几何的重要问题。

我们应重视对学生的分析,从学生的角度出发去备课,为了充分地了解学生,在备课时不妨认真回答以下一些问题。

第一,学生是否已经具备了进行新的学习所必须掌握的知识和技能;

第二,学生是否已经掌握或部分掌握了教学目标中要求学会的知识和技能?没有掌握的是哪些部分?有多少人掌握了?掌握的程度怎样?哪些知识学生自己能够学会?哪些需要教师的点拨和引导?上述问题可以在课前进行了解。

(2) 依据学生的具体情况设计分层教学方案

按照目前课堂教学的具体情况,一般的说,可以将课堂教学划分为三个层次,设计三个层次的问题,由浅入深,引导学生主动探索。

一层问题主要围绕"是什么"进行设计,应该使每一位学生经过自己的努力都能解决这些问题,如对数函数是什么等;

二层问题主要围绕"为什么"进行设计,如为什么要学习对数函数等;

三层问题是一些难易适当的典型问题的探讨。

如互为反函数的图像间的关系的教学设计可以这样进行:一层问题设计为"求反函数并做出原、反函数的图像,再观察它们的图像之间的关系";

二层问题可设计为“为什么它们的图像会有这种关系?”;三层问题可设计为(1)已知函数 $y=\frac{-5x+1}{4x+5}\left(x\neq -\frac{5}{4}\right)$,求证它的图像关于直线 $y=x$ 对称(将 x 与 y 的位置互换,所得函数与原函数一致);若(1,2)既在 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图像上,又在其反函数的图像上,求 a,b 的值;(2)你能设计出一些新的问题吗?

2. 从学习内容实际出发

学习内容是教学目标的载体,教学目标要通过学习内容才能体现出来。教学设计必须从教材的实际出发,教师通过对教材进行研究,能够了解教材的知识特点,能正确理解教材的实质和各项知识内容,并能把握相关的基础知识与实际知识,使教师本体性知识、文化性知识与实际知识融会贯通。教师通过钻研教材,可以掌握教材的重点、难点和疑点,理解教材中基本知识和基本技能的要求,把握教材的内部联系,发现知识的关键点。

如通过对教材中两角和与差的余弦公式证明的分析,可以把握此证明的三个关键点:(1)单位圆的引入;(2)$-\beta$ 角的引入;(3)公式的推广。因此,在进行教学设计时,可以在这三处设置相关问题,并进行重点指导。

教师对教材的深入钻研,有利于教学设计的创新。因为只有在充分理解教材的基础上才能创造性地为学生设置发现的问题情境,这对于培养学生的创新能力是极有帮助的。

如在对等差数列前 n 项和公式的推导的教学设计时,可以利用高斯的故事,先让学生求 $1+2+3+\cdots+100$,然后提出问题,怎样将高斯的思路运用于一般等差数列的求和当中?学生便由此可以想到,将等差数列的第1项与第 n 项相加,将第2项与第 $n-1$ 项相加,……,依此类推,可以得出猜想,即将首尾对称的项相加,便可以得出等差数列的前 n 项和公式。这样的设计不仅有利于学生知识的正迁移,而且符合学生的思维状况。

又如,球的体积公式的教学设计,可以由学生熟悉的圆的周长、球的表面积的线和面的公式,进行猜想,得出“体”的公式,设置以下问题:

圆的周长 $=2\pi R$,

球的表面积 $=4\pi R^2$,

球的体积 $=?$

引导学生从系数和 R 的指数出发得出球的体积 $=k\pi R^3$ 的猜想后,继续提出问题:如何找到 k 使这一猜想成立?由圆锥、圆柱的体积公式你得到什么启发?

也可以直接由圆柱、圆锥的体积公式得出球的体积公式的猜想。同底等高的圆锥、半球和圆柱半球的体积为的体积之间的关系是,半球的体积介于圆锥和

圆柱体积之间，而圆锥体积为$\frac{1}{3}\pi R^3$，圆柱体积为 πR^3，于是可猜想出半球体积 $V=\frac{2}{3}\pi R^3$，而这正好是圆柱的体积与圆锥体积之差。当然，猜想不能代替证明，但这一猜想可以为证明提供思路，经过猜想后证明是关键。

深入钻研教材，可使教学设计有利于学生主体性的发挥。因为在深入钻研教材的基础上，才能为学生提供问题情境，引导学生发现问题进而解决问题。如：

“线性规划”的处理方法

提出问题：已知$\begin{cases}1\leqslant x-y\leqslant 2,\\2\leqslant x+y\leqslant 4,\end{cases}$求 $z=4x+y$ 的最值？

学生正常思路：两不等式相加得：$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$，故 $6\leqslant 4x\leqslant 12$；将第一式化为 $-2\leqslant -x+y\leqslant -1$ 后，再与第二个不等式相加得：$0\leqslant y\leqslant \frac{3}{2}$。于是有 $6\leqslant 4x+y\leqslant 13\frac{1}{2}$。但 6 与 $13\frac{1}{2}$不能取得（若取则与已知条件不符）（与$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$ 矛盾），由此引发学生的反思，形成认识冲突。并逐步形成“$x+y$，$x-y$ 应被看成一个整体”的思路，从而去寻找另外的解题思路。

$$4x+y=\frac{5}{2}(x+y)+\frac{3}{2}(x-y),$$

由此可知：

$$\frac{13}{2}\leqslant 4x+y\leqslant 13,$$

进而问题得以解决。

3. 学习资源和认知工具分析

学习资源是指提供给学生的各种信息资源，丰富的学习资源是知识建构学习的一个必不可少的条件；在各种资源中，存在着数学知识的发生和发展以及各种类型的运用的材料。教师要指导学生怎样从大量的信息中找到有用的信息，要提供引导学生正确使用搜索引擎的方法。

认知工具在现代学习环境中，主要是指与通信网络相结合的广义上的计算机工具，以帮助和促进学生的认知过程。教师可以引导学生通过各种计算机实验来检验和理解知识。

现代社会学会学习比获得知识更为重要，而学会学习的重要体现就是能通过各种途径获取所需要的知识或信息，因此教师应对学生获取信息的方法和途径进行分析，并进行有效指导，使学生能够充分利用学习资源和认知工具进行

学习。

4. 利用知识的迁移

我们来做一个游戏,填表:(表中每一问题都给出 A,B,C 所能装的水量,怎样借助于 A,B,C 三个容器取到所需取的水)

问题编号	容器大小			所取水量
	A	B	C	
1	21	127	3	100
2	14	163	25	99
3	18	43	10	5
4	9	42	6	21
5	20	59	4	31
6	23	49	3	20
7	15	39	3	18
8	28	76	3	25

游戏将同学分成两组,一组同学全做,另一组同学做 6,7,8 题。我们会发现全做的部分同学 6、7、8 题的计算过程与前面相同,而只做 6、7、8 题的同学却能够找到更简便的方法,这是什么原因,这就是迁移的作用,因为全做的同学受前面题的解法的影响,采用前面的方法,而只做后三题的同学却不受这种影响。这个实验是心理学的一个著名实验,从实验结果来看,思维定式对于问题学生的学习是有重要影响的,因为思维定势能够产生思维的迁移,在教学设计中,教师可以有效利用知识的迁移来进行教学。

如利用知识的迁移导入问题提高学生的学习积极性。

在函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的处理方法的教学设计:

先让学生用五点作图的方法作 $y=\sin x$ 和 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像并发现两者之间的关系:后者可以由前者的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到。

接着提出问题:如何由函数 $y=\sin 2x$ 的图像得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的函数图像? 由于知识的迁移作用,学生可能回答:向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位。再问:对吗?

请用五点作图法检验。

检验结果使学生发现问题，于是寻找新的解决问题的方法。

5. 将静态知识化为动态知识

教师在进行教学设计时，应将科学研究的最新成果及时吸收到自己的教学中来，这样既能激发学生的学习兴趣，又能使其了解科学研究的动态。这就需要教师平时加强学习、关心社会、收集资料。

另外还应善于将静态知识动态化。教材是课程标准的具体体现，是教师进行教学的依据。教材上的知识是静态的，它只是为知识的传递提供了可能。一般的教材限于篇幅，不可能把所有的教学内容都讲得十分详尽，学生看到的往往是思维的结果，而不是知识的形成过程和思维活动的过程。换言之，当教材在没有进入教学过程前，它只是处于知识的储备状态，为知识的传递提供了可能。因此我们在备课时，根据教学需要，根据优化课堂教学的需要，从学生的实际出发，把教材中内容利用多种方式（如多媒体）转变为学生易于接受的动态的形式，因为这种形式更符合学生的心理，可以极大地增强学生的参与欲望，提高学生积极性。另外，要结合一些资料将知识的发生和发展过程展现于课堂，使静态的知识动态化。

9.1.4 突出双基

“双基”即基础知识和基本技能，是教学大纲或课程标准中规定的要求学生起码掌握的数学基本内容。我国数学教育具有重视基础知识教学、基本技能训练和能力培养的传统，扎实、系统的基本功训练是中国数学教育的一大特色，是提高学生各种能力，在各种考试中取得佳绩的重要基础。中国学生之所以能在国际奥林匹克数学竞赛中连年取得佳绩，在国际数学水平测试中名列前茅，所派留学生在国外受到好评等，在很大程度上应归功于中国传统数学教学中常抓不懈的“双基”训练。

我国中学教育承担着向高校输送优秀人才和为社会培养合格公民的双重任务，而社会对人才素质的要求随着社会的发展而有较大的改变。因此在数学教学中，要求我们与时俱进地审视“双基”和“双基”教学。基础知识不应再仅仅局限于数学中的概念、性质、法则、公式、公理、定理，由此反映出来的数学思想方法也应界定在数学基础知识之中，它是显性知识中蕴藏着的隐性知识。作为基础知识的学习，其思想方法的学习和掌握显得更为重要，这也进一步体现了数学的教育和文化价值。

“双基”是一个发展的概念，这里我们从新课程对新增的“双基”内容，以及对原有内容的变化和发展上，去思考这种变化，去探索新课程理念下的“双基”教学。

1. 如何把握新增内容的教学

在新一轮数学课程改革中,课程增加了许多新的内容,这是教师在新课程实施中遇到的挑战。为此,我们首先要认识和理解为什么要增加这些内容,在此基础上把握好“标准”对这些内容的定位,积极探索和研究如何设计和组织教学。

例如:由于“算法”在当今数学科学技术中的作用已经凸显出来。现代社会,计算机已经成为人们日常工作和生活中不可缺少的工具。那么计算机是怎样工作的呢?要想弄清楚这个问题,就需要学习算法。

机械地按照某种确定的步骤,通过一系列简单的计算操作,完成复杂计算的过程,被人们称为“算法”过程。算法早期发展中值得一提的一个成果应归功于古希腊的欧几里得,他提出的计算最大公约数的辗转相除法至今仍在使用,也是基础数学的一项基本内容。中国古代数学研究中也有许多有关算法的成果。在社会上广泛使用的珠算口诀就可以看做是典型的算法,它把复杂的计算描述为一系列简单的算珠拨动操作。

其实中国古代的数学中算法的内容是非常丰富的。如,中国古代数学著作《九章算术》中介绍的约分方法:“可半者半之,不可半者,副置分母之数,以少减多,更相减损,求其等也,以等数约之。”意思是:若分子、分母全是偶数,则用2除以分子分母;若分子、分母不全是偶数,则把分子、分母分别放于不同的地方,然后由较大的数减去较小的数,并辗转相减直到两边所得差数相等,就用这个差数(等数)来约分,这个数就是分子和分母的最大公约数。如$\frac{6}{9}$,先用9减6得3,再用6减3得3,3便是9和6的最大公约数。

现代意义上的“算法”通常是指可用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤,这些程序或步骤必须是明确和有效的,且能在有限步完成。如,我们所熟悉的带余除法、解线性方程组的消元法等,都是算法。

描述算法可以用不同的方式,可以用日常语言和数学公式描述,也可以使用程序框图直观地表示算法的整个结构,而要想在计算机上具体实施算法,则还需要将算法转化为程序语句。

算法和计算机有着密切的联系,计算机解决任何问题都要依赖算法。只有将解决问题的过程分解为若干明确的步骤,即算法,并用计算机能够接受的“语言”准确地描述出来,计算机才能够解决问题。因此,算法是计算机科学的重要基础,没有算法也就没有计算机的运用。

例1 一个三角形的三边边长分别为2,3,4,设计一种算法,求出它的面积。

算法分析:(1) 输入3个数2,3,4;(2) 计算$p=\frac{2+3+4}{2}$;(3) 计算三角形

的面积 $s=\sqrt{p(p-2)(p-3)(p-4)}$；(4) 输出三角形的面积 s 的值。

条件结构以条件判断为起始点，根据条件是否成立决定执行哪一个处理步骤。如下面的例题就要求我们做出判断。

例 2 任意给定 3 个正实数，设计一个算法，求分别以这 3 个数为边长的三角形面积。

算法分析：(1) 输入 3 个数 a,b,c；(2) 判断 a,b,c 能否构成三角形？(3) 如果能够成三角形，则计算 $p=\frac{a+b+c}{2}$ 和三角形的面积 $s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$；(4) 输出三角形的面积 s 的值或“无法构成三角形”的信息。

循环结构是指在算法设计中，从某处开始有规律地反复执行某一处理步骤，该处理步骤称为循环体。循环体的执行次数由一个控制循环条件决定。满足条件反复做，不满足条件则停止。

例 3 用二分法求方程

$$\ln x-\frac{2}{x}=0$$

的误差小于 0.005 的近似根的算法可描述为：

(1) 令 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$，误差小于 0.005。确定 x_1,x_2 使 $f(x_1)f(x_2)<0$，比如 $x_1=2,x_2=3$；

(2) 令 $m=\frac{x_1+x_2}{2}$，判断 $f(m)$ 是否为 0，若是，则 m 为所求，否则继续判断 $f(x_1)f(m)$ 大于 0 还是小于 0；

(3) 若 $f(x_1)f(m)>0$，则令 $x_1=m$，否则令 $x_2=m$；

判断 $|x_1-x_2|<0.005$ 是否成立？若是，则 x_1,x_2 之间的任意取值均为满足条件的近似根，若否，则继续回到(2)。

又如，对于微积分的概念的教材处理问题，也是教学中教师需要认真思考的问题。“定义要不要讲？怎样讲？”一直是一个讨论的问题。我们知道高中的学生的思维状况是逻辑思维基本形成，并逐步向辩证思维发展。也就是说，高中生的辩证思维能力还处于起步阶段，理解定义中的“用有限刻画无限，无限是有限的发展结果”等问题，还有困难，因此很难理解极限的定义。但是如果不讲极限的定义，只讲极限的求的方法，则又与数学研究方法相悖。因为数学研究对象（包括极限）的确定是依赖于定义的，没有定义也就是没有确切的研究对象，那么这一研究就建立在一个“虚的”基础上，这对学生认识数学是不利的。因此，如何处理极限的定义的教学教师就必须充分考虑，并结合教学对象制定有效的教学措施。

2. 教学中如何使学生对基本概念和基本思想有更深的理解和更好的掌握

首先,教师必须很好地把握诸如:函数、向量、算法、统计、空间观念、运算、数形结合、随机观念等一些核心的概念和基本思想。其次,要通过整个高中数学教学中的螺旋上升、多次接触,通过知识间的相互联系,通过问题解决的活动等方式,使学生不断加深认识和理解。

如对于函数概念真正的认识和理解,是不容易的,要经历一个多次接触和较长的认识过程。高中必修课的“数学1”模块中安排了函数的概念教学,在教学中首先要在义务阶段学习的基础上,通过提出恰当的问题,创设恰当的情境,使学生产生进一步学习函数概念的积极情感,帮助学生从需要认识函数的构成要素;需要用近现代数学的基本语言——集合语言来刻画函数概念;需要提升对函数概念的符号化、形式化的表示等方面来进一步认识和理解函数概念。并在义务教育阶段学习函数三种基本表示法的基础上,通过具体的问题背景,让学生恰当选择相应的表示方法去解决问题,在解决问题中帮助学生加深对函数概念的认识和理解。

随后,通过基本初等函数——指数函数、对数函数、幂函数、三角函数的学习,进一步感悟函数概念的本质,通过利用函数模型解决实际问题的过程,使学生体验函数模型的意义,从而理解为什么函数是高中数学的一个核心概念。

再在“导数及其应用”的学习中,通过对函数性质的研究,再次提升对函数概念的认识和理解,等等。这里,我们要结合具体实例(如分段函数的实例、只能用图像来表示的函数的实例等),结合作为函数模型的应用实例,强调对函数概念本质的认识和理解,并一定要把握好对于诸如求定义域、值域的训练,不能做过多、过繁、过于人为的一些技巧训练,而要将教学重点放在利用函数模型解决问题上,使学生分别理解指数函数、对数函数、幂函数、三角函数的模型的作用,如三角函数中的正弦、余弦函数不仅对于刻画周期变化的事物具有重要作用,而且是进一步学习的基础,如通过傅里叶级数,可以将函数表示为正弦、余弦的级数形式,而正切函数对于用斜率描述函数曲线的变化状况具有重要的意义。而指数函数、幂函数、对数函数则可以提供快速、中速和慢速变化的模型。

经过上述长期的学习过程,学生才有可能对函数问题有比较深刻的认识。

又如,对于统计的学习,必须强调统计基本思想和方法的认识理解,而不能把统计作为计算统计量的学习。在教学中,要让学生比较系统地参与收集数据、整理、分析数据、从数据中提取信息、进行估计、做出推断的全过程,并让学生在经历解决问题的活动过程中,感受和体验统计用样本来估计总体,即从局部来推断整体的归纳思想,学会收集数据的一些基本方法。还可以通过适当的例子,使学生认识到用统计结果进行推断是有可能错的,从而体会统计思维与确定性思

维的差异。

9.1.5 书写教案

有了以上各项工作以后，就要完成各个部分的“组装”任务了，即对一堂课进行整体设计并书写教案。整体设计必须体现各部分之间的组合自然、配合默契、有整体的结构美，过度的自然美。教案有许多格式，但一般都应包括：课题、教学目的、教材分析、课型与教法、教具、教学过程几个方面，而教学过程一般又包括创设情境、提出问题、学习新知识、解决问题、巩固提高等几个环节。

教案的书写一定要简单明确，详略得当。教学目的的制定一定要明确、具体，要符合实际，语言表达要精炼。教材分析应该包括重点、难点和关键。教学过程要结合教学内容和学生实际，清晰体现教学环节，要恰当选择教学方法，并说明在教学过程中如何运用，还要简单阐述选择的教学媒体及使用时的注意事项。教案要体现清晰的教学过程，教学过程的每一个环节及时间安排都要有明确的计划，要附有板书设计图。还要在教案后留有备注栏，用以记载课后的教学分析。

9.2 课堂教学

课堂教学是教学设计的实施过程，它包括教师教的过程和学生学的过程。在当前进行的基础教育课程改革中，课程目标中强调了学习过程，这是本次课程改革的新颖之处。那么，过程是什么？我们可以从新的课程标准的解读来理解过程。(1) 过程指探究过程和探究方法；(2) 过程指教学过程，即达到教学目的或获得所需结论而必须经历的活动程序；(3) 过程指学生的学习过程，根据现代教育心理学的研究，教学过程不仅是一个接受知识的过程，而且也是一个发现问题、分析问题、解决问题的过程。

在进行课堂教学时，教师是学生学习过程的指导者，教师不仅要使学生积极参与学习，而且要使学生学会学习，成为学习的主体。为此，教师必须努力调动学生探究知识的积极性和主动性，要依据学生学习的心理规律，改进自己的教学方法；教师要给学生创造自主学习、自主活动的机会，鼓励学生多思善问，敢于质疑争论；教师要注意学生自学能力的培养。具体地说，教师在课堂中应做好以下几方面的工作。

9.2.1 突出教学的重点内容

数学教学最重要的要求之一就是条理要清晰，线条要分明，不能混乱。因此

教师在具体的课堂教学中，要将内容的主要部分突出出来，重点内容是否突出，一方面表现在时间安排是否充分，另一方面表现为整个课堂教学的其他内容是否围绕这一主要内容来设计。

突出重点既是一个理论问题，又是一个实际问题，还是一个教学中难以把握的问题。如在高中的函数概念的教学中，重点应该是高中函数概念（对应说）的必要性和产生过程，但在教学中，许多教师却对此一带而过，而将重点放在函数的三要素的训练上。其实函数的三要素是在函数概念中自然产生的问题，只要学生真正理解了概念的特点，也就可以理解三要素的必要。又如等差数列的概念是教学和研究等差数列的意义是教学的重点，但许多教师在教学中却将通项公式的推导作为重点，其实理解了等差数列的概念，则通项公式只是其符号表示而已。

9.2.2 教学情境的创设

2005年8月23—8月27日，欧洲第十一届关于学习与教学研究的大会在塞浦路斯的首都尼科西亚举行。会议的中心议题是从不同的角度来认识如何构建有效的学习环境。大会探讨了教育研究的两个方面：一方面是我们需要通过多种教学途径来加强学生的知识学习过程；另一方面，当前的教育研究要充分认识到有效教学情境的创设在学习与教学中的重要作用[①]。可见，关于教学情境的创设问题已经受到国际教育界的充分重视。

"情境"就是指"环境"，它包含了"情景"。从社会学的角度看，"情境"是指一个人正在进行某种行为时所处的社会环境，是人们社会行为产生的条件。从心理学角度看，"情境"表现为多重刺激模式、事件和对象等。从学生角度看，"情境"可以理解为学生从事学习活动、产生学习行为的一种环境和背景，它提供给学生思考空间的智力背景，产生某种情感体验。所谓数学"情境"，就是从事数学活动的环境，产生数学行为的条件[②]。

这里有一个问题是应该引起注意的，也就是对情境的误解。部分教师认为，所谓情境主要是在引入教学内容时发挥作用，因而将创设情境与有效地导入新课等同起来，在客观上导致部分教师追求"开场白"的新颖。在一些教学比赛中，我们往往能看见，部分教师在一个十分有趣的课堂引子中，开始了枯燥乏味的教学，学生的学习积极性随着课堂教学的时间推进而逐步消失。当然，有趣的开始是成功的一半，但是否真正成功，还主要不是依赖"开场白"。因而真正的情境应该是在整个的课堂教学过程中，学生都能在教师为其所设

① 陈丽敏. 如何构建有效的学习环境. 数学教育学报，2006.1(57)

② 吕传汉，等. 论中小学"数学情境与提出问题"的教学. 数学教育学报. 2006.2(74)

置的环境中，进行有效学习。也就是说，教师既要注意知识的导入，更要注意学习的发展。

创设情境可以有不同的方法，就数学内容本身的教学而言，学习和掌握这个数学内容的本质是第一位的。因此教学情境的创设关键是要能揭示数学的本质。

1. 教学案例

案例1

是一位教师的教学案例。上课的内容是概率，教师提出第一个问题：如果中国足球队和巴西足球队比赛，你认为中国队取胜的可能性是多少？在足球这个问题上，男孩子的热情永远大于女孩子，他们开始发表自己的高见，什么除非巴西主力队员全部伤病，除非中国队吃了兴奋剂，等等，一些不着边际的想法都从他们的脑袋里产生，从他们“不负责任”的嘴里喊出来，教师只是笑着，听着，不加评判，而后在黑板上写下了一行字“一切皆有可能”，这个时候大家哄然而笑，教师接着说：“排除你们说的那么多除非的条件，我们再仔细想想看，P(中国足球队获胜)=0(中国队获胜的概率为0)吗？”，学生们一下子明白过来，某学生站起来做总结，一切皆有可能，所以中国队不是没有可能赢球，所以P(中国足球队获胜)不一定等于0，但是从各个角度分析，中国队的实力绝对不如巴西队，所以P_1(中国足球队获胜的概率)应该是小于P_2(巴西队足球队获胜的概率)。

第二个问题：P(明天又是新的一天)=?，问题一出，就听到一位学生小声地说了一句“飘”，教师当即请她站起来说说看，学生有条理的叙述让大家不得不对她刮目相看：“这句话是美国作家玛格丽特·米切尔的著作《飘》中的女主人公郝思嘉常常说的一句话，我觉得她是用来自勉的，但是我更喜欢小说中的梅兰妮，因为在我的心目中，梅兰妮是完美的。”于是教师也加入讨论：“《飘》是中文翻译的名字，直译为随风而逝，英语是gone with the wind，讲述了南北战争时候一个魅力四射、倾倒众生、传奇女子郝思嘉在面对不幸时能坚强生活，从一个受人仰慕的庄园娇小姐，到自食其力的女商人的过程，是大背景下小人物的故事。郝思嘉遇到难题常说的一句话就是明天又是新的一天，用来鼓励自己不屈不挠的生活下去，所以老师比较喜欢这个人物，刚刚发言的同学说的梅兰妮是二号女主角，是个善良坚忍的完美女人，但是人完美了总让人觉得不够真实。我把明天又是新的一天这句话送给大家，希望你们也可以以这样的心态面对我们的生活和学习，永不放弃。现在大家来告诉我P(明天又是新的一天)=?”，学生异口同声“1”。

上述案例中，教师用学生熟悉的足球赛和文学名著中的人物来使学生体会概率的意义和在生活中的运用，学生不仅初步认识了概率的概念，而且将教学过程与学生喜闻乐见的足球运动和文学欣赏联系起来，起到寓教于乐、启迪思维的效果，可以认为是一个比较好的情境创设。

案例2

这是美国的一个教学案例，虽然不是数学案例，但教师的别出心裁的设计却可以给我们启发。老师宣布考试分数后，发现学生垂头丧气，便说，如果要想加分数，就给10美元，但是，只能是白种人的学生。学生都愤怒喊叫，拼命跺脚，把课本、书包扔向教师表现抗议。老师用早已准备的盾牌来抵挡，并用水枪向学生扫射。学生们坐下歇一歇的时候，老师严肃地说：刚才就是当年黑人领袖马丁·路德反对种族歧视，组织示威游行的情境。今天我们就来学习这方面的内容。

本案例对我们如何调动学生的情绪，使其进入数学家研究问题的状态是有启发意义的。

案例3

是一则数学求和教学案例

在给初二学生上数学竞赛辅导课时，几乎每年都会讲“$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\,024}$”的求和问题。对于此问题学生总不太感兴趣，而且也不易接受。于是某教师将它编成一道应用题：有10只小猴子一道去逛公园，途中有一人送一块大饼给它们吃。第一只小猴子抢先说：“我得吃大饼的一半”第二只小猴子紧接着说“我得吃剩下的一半”，第三中小猴子说“我要吃剩下的一半”，……，第十只小猴子说法相同。问：这10只小猴子一共吃了大饼的几分之几？

问题一呈现，学生门就议论开了。根据以往的经验，把大饼看作1，大家很快列出算式$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\,024}$，问题是怎么求和呢？

学生开始思考并在本子上划来划去。

师：“那位同学回答一下？”

学生A：“我发现一个规律。”

师：“什么规律？”

学生A边说边在黑板上写：

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$，…

应该有$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\,024}=\frac{1\,023}{1\,024}$。

师：“大家明白了吗？A同学是先从前几项求和中发现所求和中的分母与最后一项的分母相同，而分子比分母小1。然后提出猜想，大家要学会这种从特殊到一般的思维方法。还有别的想法吗？”

学生B：可以用拆项相消法，也就是

$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{1\,024}=\frac{1}{512}-\frac{1}{1\,024}$。

然后代入：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\,024}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{512}-\frac{1}{1\,024}\right)=\frac{1\,023}{1\,024}$。

师：B 同学能根据题目特点灵活运用以前学过的方法。

学生 C：可令 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\ 024}$，那么 $2S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{512}$，于是 $2S-S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{512}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\ 024}\right)=\frac{1\ 023}{1\ 024}$所以 $S=\frac{1\ 023}{1\ 024}$。

师："刚才两位同学都采用了相互抵消的方法求得答案，那么 C 同学和 B 同学所使用的方法的区别在哪里呢？只见同学们面面相觑，教师顺势比较着两种方法的异同前者是局部抵消，而后者是实现整体抵消。其目的都是为了减少项数，方便求和。

教师的话音刚落，又有学生要求回答。

学生 D：在受到同学 C 的启发后我想到利用多项式相乘，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\ 024}\\&=(2-1)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\ 024}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{512}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\ 024}\right)=\frac{1\ 023}{1\ 024}。\end{aligned}$$

师：D 同学对 C 同学的方法有所改进，说明他学习肯动脑筋，我们平时不仅要虚心吸收别人好的方法，而且还要有自己的独立思考。

这时课堂气氛活跃起来，教师不失时机地鼓励大家讨论一下，还有没有别的方法？

只见一位平时不大说话的学生显露出跃跃欲试的表情，教师赶忙示意他站起来回答。

学生 E：我看这题目的数字象一级级楼梯，可以把$\frac{1}{2}$看成最高，$\frac{1}{1\ 024}$看成最低的，相邻高度是 2 倍关系。

如果再借来一个最低的一阶$\frac{1}{1\ 024}$放在最后一阶上，那么它们的和就和前一阶一样高，依此向前摞上去就会出现$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，再把借来的$\frac{1}{1\ 024}$去掉便得结果如下：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\ 024}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\ 024}+\frac{1}{1\ 024}\right)-\frac{1}{1\ 024}=\frac{1\ 023}{1\ 024}$。

学生 F 怯生生地站了起来，同学们个个向她投去惊奇的目光，因为在大家眼里，她是一个学习困难生，从不主动回答问题，今天她怎么也站起来了？

学生 F：我们要解决的是 10 个小猴子一起吃大饼的总和的问题，可以把大饼看成圆形，视为 1，第一只小猴吃了大饼的$\frac{1}{2}$还剩$\frac{1}{2}$，第二只小猴吃了大饼的$\frac{1}{4}$还剩$\frac{1}{4}$，……，那么，第十只小猴吃了大饼的$\frac{1}{1\ 024}$还剩$\frac{1}{1\ 024}$，这样一来，它们共吃了 $1-\frac{1}{1\ 024}$即$\frac{1\ 023}{1\ 024}$。

沉默片刻之后，教室里突然爆发出热烈的掌声。

此案例说明了情境应体现在整个教学过程中。

案例4

由“旧知”引出“新知”[①]

由已知的“指数”知识引入新知“对数”概念。

$$\begin{cases} 2^x=4\Rightarrow x=2, \\ 2^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1, \\ 2^x=\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}, \\ 2^x=3\Rightarrow x=? \end{cases}$$

由此看出,需要引进新的运算。

由“旧知”引出“新知”的最佳途径是,使学生由旧知中产生困惑或新的情境——形成和激发认识新知、发现新知、获取新知的欲望和行动——经历知识发生、发展的过程。

2. 情境创设材料举例

这里提供一些经常被运用于课堂教学创设情境的例子,主要是提供一些资料,读者可以根据实际情况运用,也可以在它们的启发下创设出对学习更有意义的情境。

(1) 电视中的数学问题

《幸运52》中有这样一个题:一列数71,51,31,11,x,…,你能说出x是多少吗?有什么规律?(可用于等差数列的教学中)

(2)(动画)画面背景:擂台。横幅:解题大赛奖品丰厚

比赛双方:诸葛亮VS臭皮匠团队

比赛规则:各位参赛选手必须独立解题,团队中有一人解出即为团队获胜。

人物:诸葛亮,臭皮匠老大,臭皮匠老二,臭皮匠老三。

诸葛亮(手摇羽扇):依我以往的经验,我解出的把握有80%。

臭皮匠老二:老大,你的把握有50%,我只有45%,看来奖品与咱无缘了。

臭皮匠老大:别急,常言道:三个臭皮匠,赛过诸葛亮。咱去把老三叫来,我就不信三人之力,攻不下这个擂台。

问题:假如臭皮匠老三解出的把握有40%,那么这三个臭皮匠中有一人解出的把握真能抵得过诸葛亮吗?

事件构成分析:

事件A为:臭皮匠老大解出题目;

事件B为:臭皮匠老二解出题目;

① 张奠宙.中国数学双基教学.上海:上海教育出版社,2006.5(10).

事件 C 为：臭皮匠老三解出题目。

则所求为 A,B,C 至少一件发生的概率。

事件 A,B,C 并非互斥事件，并具有相互独立的特征。（结果为 1 减三人都未解出的概率）（可运用于概率教学）。

(3) 2^k 的故事

一位国王为了奖励象棋大师，国王答应大师“要什么给什么”大师指着 64 格的棋盘说“在第一格放一粒麦子，第二格放 2 粒，第三格放 4 粒，以后每格放的是前一格的两倍，……，直到最后一格”。国王觉得大师没有把握集敛财富的机会，大师还是笑着请国王答应，国王只好答应。

解 设第 k 个格子里放的麦粒数为 2^{k-1}，其和为

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

不妨设每千粒麦粒重 10 g，取 $2^{64}-1$ 约等于 2^{64}，$\lg 2^{64}$ 约等于 19，即 2^{64} 是一个 20 位整数的数。我们再把粒换算成吨，即 $\dfrac{(2^{64}-1)\times 10}{1\ 000\times 1\ 000}$（吨）为一个 12 位整数的数，数千亿吨。这无论对谁，都是个天文数字，国王在谋士的提醒下惊呆了（此例可用于对数与指数关系的运算，也可用于等比数列的求和公式）。

(4) 报纸问题

一张报纸，对折 50 次会有多厚？用它做云梯能达到哪？珠穆朗玛峰还是月球？

解 设报纸厚度 $a=0.1\text{mm}$，则第 k 次对折的纸层厚度为 $2^k a(\text{mm})$，第 50 次对折的纸层的厚度为 $2^{50}a(\text{mm})$。

$\lg 2^{50}$ 约等于 15.65，即 2^{50} 是一个 15 位整数。

$2^{50}\times 0.1\ \text{mm} = \dfrac{2^{50}\times 0.1}{1\ 000\times 1\ 000}(\text{km})$ 为 9 位整数，而几亿 km 大于地球到月球距离（可用于等比数列导入）。

(5) 差之毫厘，谬以千里

问题 1 设想用铁丝绕半径为 1 cm 的小球的大圆作成一个圆，再用一根比这圆周长长 1 m 的铁丝作成一个圆。两圆相套成同心圆。试问，圆周间能放下一个巴掌吗？能放下一个拳头吗？

（学生一般回答能），为什么能？可以做一个实验，发现铁丝比小球大圆的周长长 1 m，套起来两圆间距离会很远的。

问题 2 在地球赤道上绕一钢圈，（把赤道当作一个理想的圆，这个钢圈就是这个圆），可以算出这钢圈约长 $2\pi R$ km（$R\approx 6370$ km），这时钢圈紧贴赤道不留间隙。假若再增 1 m 的长度，问在钢圈与赤道间能否伸过人的拳头。

（学生一般回答：不能）为什么觉得不能？1 m 长的铁丝和赤道比起来，几乎

什么也没有。因此两圆几乎连一张薄纸片也放不下。

我们来计算一下：在第一个问题中，小球半径 $r_1=1$ cm，较大同心圆周长为 $(2\pi+100)$ cm，半径 $r_2=\frac{2\pi+100}{2\pi}$，两圆周间的距离：$r_2-r_1=\frac{2\pi+100}{2\pi}-1$ 约等于 15.9 (cm)。

在第二个问题中，地球半径 $R_1=6\ 378\ 245$ m，较大同心圆周长为 $(2R_1\pi+1)$ m，半径 $R_2=\frac{2R_1\pi+1}{2\pi}$，两圆周间的距离：$R_2-R_1=\frac{2R_1\pi+1}{2\pi}-R_1$，约等于 15.9 (cm)，同样足够放下一个巴掌。

可以使学生体会差之毫厘，谬以千里的道理。（可用于圆的周长和半径之间的关系的教学）

3. 数学趣题

(1) 无中生有

用学过的运算符号（这里的运算不仅仅指加减乘除，还包括括号、绝对值等）把四个 0 连接起来，使其值为 24：0 0 0 0 = 24

答案：(0! +0! +0! +0!)! =24

(2) 数学谜语一则

哪个汉字包含“大于”、“小于”和“等于”。

答案：互。

(3) 猫捉老鼠

问题：如果 3 只猫在 3 分钟内捉住了 3 只老鼠，那么多少只猫将在 100 分钟内捉住 100 只老鼠？

这是一个古老的趣题，常见的答案是这样的：如果 3 只猫用 3 分钟捉住了 3 只老鼠，那么它们必须用 1 分钟捉住 1 只老鼠。于是，如果捉 1 只老鼠要花去它们 1 分钟时间，那么同样的 3 只猫在 100 分钟内将会捉住 100 只老鼠。

遗憾的是，问题并不那么简单。刚才的解答实际上利用了某个假定，它无疑是题目中所没有谈到的。这个假定认为这 3 只猫把注意力全部集中于同一只老鼠身上，它们通过合作在 1 分钟内把它捉住，然后再联合把注意力转向另一只老鼠。

但是，假设 3 只猫换一个做法，每只猫各追捕 1 只老鼠，各花 3 分钟把它们捉住。按照这种设想，3 只猫还是用 3 分钟捉住 3 只老鼠。于是，它们要花 6 分钟去捉住 6 只老鼠，花 9 分钟捉住 9 只老鼠，花 99 分钟捉住 99 只老鼠。现在我们面临着一个计算上的困难，同样的 3 只猫究竟要花多长时间才能捉住第 100 只老鼠呢？如果它们还是要足足花上 3 分钟去捉住这只老鼠，那么这 3 只猫得花 102 分钟捉住 102 只老鼠。要在 100 分钟内捉住 100 只老鼠——这是题目关

于猫捉老鼠的效率指标，我们肯定需要多于3只而少于4只的猫，因此答案只能是需要4只猫，虽然这有点浪费。

显然，对于3只猫是怎样准确地计算猫捉老鼠这种行动的时间，题中没做任何交代。因此，如果允许答案不唯一，那么，答案可以是丰富多彩的，3只、4只、甚至更多。如果要求答案唯一的话，这个问题的唯一正确答案是——这是一个意义不明确的问题，由于没有更多关于猫是怎样捕捉老鼠的信息，因此无法回答这个问题。

这个简单的兴趣题启示我们，在解答一个数学问题（也包括其他问题）前，一定要仔细领会题目所给出的全部信息，既不要曲解题义，也不要人为添加条件以迎合所谓的标准答案。

（4）多少只动物

在饲养的动物中，除了两只以外所有的动物都是狗，除了两只以外，所有的都是猫，除了两只以外所有的都是鹦鹉，我总共养了多少只动物？你想出来了吗？

只养了三只动物：一只狗，一只猫和一只鹦鹉。除了两只以外所有的都是狗，除了两只以外所有的都是猫，除了两只以外所有的都是鹦鹉。

如果你领悟到"所有"这个词可以指仅仅一只动物的话，头脑中就有了这个问题的答案。最简单的情况一只狗，一只猫，一只鹦鹉，即是其解。然而，把这个问题用代数形式来表示也是一次很好的练习。

令 x, y, z 分别为狗，猫，鹦鹉的只数，n 为动物的总数，我们可以写出下列四个联立方程：

$$n = x + 2,$$
$$n = y + 2,$$
$$n = z + 2,$$
$$n = x + y + z.$$

解此联立方程有许多标准方法。显然，根据前三个方程式，可得出 $x = y = z$。由于 $3n = x + y + z + 6$ 减去第四个方程，得到 $n = 3$，因此 $x + 2 = 3$，所以 $x = 1$。全部答案可由 x 值求得。（用于一元一次方程的教学）

4. 创设数学情境的原则①

（1）围绕既定的数学知识点。数学情境创设应服务于一定的教学目标，应有利于学生对有关的数学知识和数学思想方法的掌握，有助于对数学知识的理解。要避免为创设情境而创设情境，或喧宾夺主的情况；

（2）符合学生的年龄特征及数学思维发展的实际。数学情境创设应与学生

① 吕传汉等. 论中小学"数学情境与提出问题"的教学. 数学教育学报. 2006. 2（74）

的数学认知发展水平相适应，接近学生的“最近发展区”，应是学生能够理解的；

(3) 具有科学性、探究性、趣味性和发展性。即所创设情境的内容、结构与表述要科学。情境材料或活动应富有探究性，有利于学生从事观察、实验、猜想、验证、推理与交流等数学活动；在内容与问题信息量上应有较大的发展空间，有利于学生积极广泛的思考；

(4) 尽量贴近学生生活实际。数学情境的创设尽可能源于学生的生活，不脱离学生的实际。因为远离学生实际的情境不易使学生产生亲切感，且在认识数学情境的相关信息上花时过多；

(5) 激发认知冲突，注重教学实效。创设数学情境应促使学生原有知识与必须掌握的新知识发生认知冲突，由此导致学生意识中的矛盾激化，从而产生问题意识，促进探究学习。

5. 创设情境的取材来源

(1) 实际生活与操作情境。如根据我国古代数学的“垛积法”，在教学等差数列的求和公式时，可以创设计算“垛积”的例子，从特殊到一般的推出求和公式；

(2) 故事与史实情境。如在向学生介绍平面几何时，可以先介绍欧几里得和古希腊的文化特点，向学生介绍勾股定理时，可以向他们介绍我国赵爽利用“出入相补”原理推出的堪称一绝的证明方式，此方式曾被第十届国际数学家会议选做会徽；

(3) 悬念或矛盾情境。如在向学生介绍集合概念时，可以结合集合论悖论的产生原因，使学生体验当时数学界的矛盾和恐慌，并由此介绍集合为什么不能给出确切定义，使学生初步体验公理化的必要性和研究方法；

(4) 游戏或竞赛情境。这种方式比较适合于年龄比较小的初中生或高中一年级学生，如介绍坐标法，可以用游戏的方法。如有的教师在教室拉两条互相垂直的绳子为坐标，让每位同学说出自己所在位子的坐标；

(5) 类比或猜想情境。如在教授立体几何时，将平面几何的定理类比到立体几何，有的可能使学生发现成功的类比，有的可能使学生发现失败的类比，但无论如何都是一个体验，对所学知识都将有较深刻的理解；

(6) 音像动态情境等。如有的教师在教授圆锥曲线时，为学生播放了一段宇航员上月球的纪录片，然后结合宇宙飞船的运行方式介绍卫星运行轨道，虽然介绍过程比较长，但却可以使学生理解圆锥曲线的运用，从而对学习意义和学习的必要性有较深刻的理解，对培养学习积极性是有帮助的。

6. 创设情境的类型

(1) 创设产生学习兴趣的情景；

(2) 创设产生认知冲突的问题情景；

(3) 创设产生发现乐趣的发现情景;

(4) 创设产生探索欲望的知识迁移情景;

(5) 创设产生成就感的成功情景。

9.2.3 教科书的使用

1. 正确看待教科书

教科书是学校教学的重要依据,无论教师的教还是学生的学,内容都要依据教科书来确定,教科书也是学校教学知识的载体,离开了教科书教学将陷入盲目。但教科书又具有知识的学术形态的特点,其知识是静态的,因此教师应依据教科书进行教学,但不能完全依赖教科书进行教学,要在教科书的基础上结合数学的最新成果、学生的实际情况创造性地组织教学内容,将静态的知识动态化。

2. 认真分析教科书

只有对教科书进行了仔细分析,教师才能深刻理解教科书,也才能在教科书的基础上进行创造性的教学。分析教科书主要从以下几个方面进行[①]。

第一是从知识的维度对教科书进行分析,即分析教科书是以什么理论作为基础的,或者所选择的知识是以什么为依据的;另外教科书的内容能否反映本学科的发展趋势,内容是否适合学生的发展状况和进一步发展的需要;教科书的结构与学生的认知结构是否具有相适应的特点;教科书的内容是否与其他学科相协调。

第二是从思想品德和文化内涵的维度对教科书进行分析。教科书能否反映辩证唯物主义和历史唯物主义思想;教科书能否反映人类的积极向上的精神;教科书是否具有数学文化的特点,能否反映数学与人类社会的关系;

第三是从学生心理特点和发展水平相适应的维度对教科书进行分析。教科书能否引导学生积极主动地探究知识;教科书对学生的起始要求是否与学生的实际水平相适应;教科书是否与学生的心理发展水平相适应。

3. 教师与教科书的关系

教科书虽然为教师的教学提供了依据,但从怎样使用教科书却能看出教师的驾驭知识的能力和教师的知识结构状况,因此在教师与教科书的关系中,教师应起主导作用,教师对教科书的理解和处理直接决定了学生学习的过程和学习的结果。

教科书只是将知识列出,但并没有知识的教学安排,因而怎样将教科书所列的知识形成一个有机的整体,是教师应该思考的问题。如在高一年级的指数运算性质这一部分,教科书首先复习了初中已经学过的内容,$a^n a^m = a^{m+n}$($a>0$,n,

---

① 刘华祥,刘咏梅等.中学数学教学论.武汉:武汉大学出版社,2003.8(361)

$m\in\mathbf{Z}$)等公式，并说明要将 n,m 的范围扩大到有理数，然后介绍了平方根、立方根和 n 次方根，再来讨论 n,m 为有理数时的运算法则。那么，如何将这些知识连成一个有机的整体呢？有的教师提出了以下的设计，首先复习初中的公式，然后提出猜想，也就是说 $a^{\frac{p}{n}}a^{\frac{q}{m}}=a^{\frac{p}{n}+\frac{q}{m}}(a>0,n,p,m,q\in\mathbf{Z})$ 是否成立的问题，而要研究这一问题首先必须明确，$a^{\frac{p}{n}}$ 等表达式的具体含义，而 $a^{\frac{p}{n}}=\underbrace{a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{n}}\cdot\cdots\cdot a^{\frac{1}{n}}}_{p个}$，因而就必须先明确 $a^{\frac{1}{n}}$ 的含义，这样一来，自然就需要研究平方根、立方根和 n 次方根的问题，这样的教学一气呵成，形成一个整体。

4. 学生与教科书的关系

在学生与教科书的关系中，学生起到了矛盾的主要方面的作用，学生对教科书的学习和使用状况决定了教科书能否发挥其功能的作用。因此充分发挥教科书对学生学习的作用，和使学生借助于教科书形成自己的认知结构是数学教学中教师应该考虑的问题。

在部分学生中，教科书的作用相当于公式册或习题集，学生不善于阅读教科书，预习也仅成了对内容的熟悉，所以教师必须指导学生认真钻研教科书，并培养学生自学的能力。

9.2.4 组织教学

组织教学也是课堂教学的重要内容，在组织教学中有许多问题要处理，这里对两个方面的问题进行讨论。

1. 处理好一些偶发事件

尽管教师对每一堂课都作了充分的准备，但有时也可能遇到一些预料不到的事情。如一位教师在讲授复数的概念第二课时，有"两复数不全是实数时，不能比较大小"这一结论，但没有证明。教学计划中也没有证明的要求。在课堂教学中当提到这个问题的时，有一位成绩较好的学生要求教师给出证明。教师就因势利导，向学生介绍了数的大小比较的原则，并利用这一原则说明了"$\mathrm{i}>0$"不能成立的原因，并进行了简单的证明。教师还可以进一步渗透一维数与多维数的区别和联系。这样，虽然增加了课时的内容，但却保护了学生的学习主动性和积极性，满足了学生的求知欲。也就是说，在教学中会出现一些学生突然提出的问题，这是对教师的挑战，教师一方面需要具有充分的知识储备，另一方面，要善于保护学生的学习积极性，不要将问题过于深化，点到为止。

处理好偶发事件对调动学生的学习积极性是有帮助的.在新的基础教育改革中提倡课堂生成问题的研究，生成性问题的研究对教师提出了挑战，实际上，提倡课堂的生成性就是提倡在课堂教学中教师和学生应该是共同成长的过程，也是使课堂教学充满活力的有效手段，因此教师不应回避生成问题。但目前有

的教师在教学中却会通过引导使学生沿着教师所安排的问题思考，而不能放开手让学生提出问题，这种情况要注意克服。

2. 正确处理好教师与学生的关系

在课堂的过程中，需要处理的关系很多，但有些是主要关系，依据辩证唯物主义对事物的认识，只要抓住了主要矛盾，其他矛盾也就迎刃而解。因此我们应该认识教学过程的主要矛盾，也就是主要关系。一般认为，课堂的主要关系有教师与学生的关系，教师与学习内容的关系，学生与学习内容的关系。而在这三个关系中，对课堂教学状况起决定作用的还是教师与学生的关系。

在教师与学生的关系中，教师起了矛盾的主要方面的作用，教师对学生的态度和选择的教学方法决定了学生在学习中的地位和作用，因此教师应充分认识和正确处理自己在教学过程中的主导地位的问题，并发挥好主导作用。

9.3 活动课程和课外活动

数学课外活动和活动课程是数学课堂教学的延伸和发展，课外活动不受教学内容、教学要求的限制，可以充分发挥教师和学生的特点和专长，活动内容可以根据教师和学生的具体情况来决定，这里只对数学建模和探究性课题研究两个方面进行一些讨论。

9.3.1 数学建模

所谓数学建模，就是对一实际问题应用数学语言和方法，通过抽象、简化、假设等对其近似地刻画所得的数学结构。简单地说，数学模型是用数学俗语对部分现实世界的描述，数学建模是指根据需要对实际问题组建数学模型的过程。

数学建模是典型的、直接的数学实践活动，因此数学建模的过程应该是学生数学实践能力的培养过程。

1. 数学建模对学生能力的培养

第一，捕捉信息，收集数据的能力。数学建模起源于实际问题，但实际问题又是纷繁复杂的，面对实际问题要能够抓住本质，并依据变化情况收集数据，这对学生的分析问题的能力是一个重要的培养过程。

第二，简化问题，合理假设的能力。一个数学模型不可能解决所有问题，为了更好地研究和解决问题，必须将问题简化，这对学生的处理问题的能力是一个重要的培养过程。

第三，数学基础知识的应用能力。实际问题往往是复杂的，学生必须综合利用多方面的知识才能解决问题，这对学生数学基础知识和其他知识的应用能力是一个重要的培养过程。

第四,将实际问题转化为数学问题的能力。一般的,数学建模的过程可以用下面的框图9.1表示。这一过程对学生将实际问题转化为数学问题的能力是一个重要的培养过程。

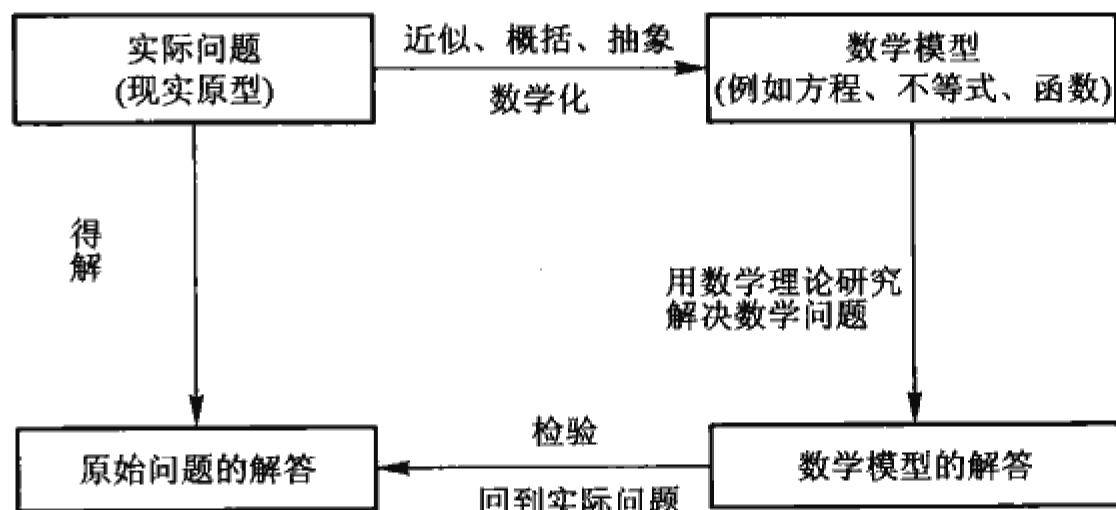


图9.1　数学建模的基本程序

2. 建模思想的运用

在新的课程改革中,特别强调了学生运用数学知识解决实际问题的能力,而对学生这一能力的培养的途径数学建模不失为一种好的选择,数学建模不仅应该在课外活动中开展,也不仅应对部分学生教学,应该将其作为教学的基本程序,对于每一部分知识,都尽可能要使学生体会知识的发生过程和数学模型的创立过程,也就是说将数学建模作为数学教学的基本手段,贯穿教学的过程中。

数学建模不仅可以从实际问题中抽象出数学模型,也可以改变数学模型使原问题得到简化,从而得到迅速解决。

如解方程组[①]
$$\begin{cases} x+y+z=1, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{3}, & (2)\\ x^3+y^3+z^3=\dfrac{1}{9}. & (3)\end{cases}$$

这是一个方程组的模型,但这个模型在解决这一问题时过程会比较复杂,因此我们可以将其转化成其他数学模型加以解决。

[方程模型]方程组中(1)表示三根之和,由(1)、(2)不难得到两两之积的和 $xy+yz+xz=\frac{1}{3}$。再由(3)又可得三根之积 $xyz=\frac{1}{27}$,由韦达定理,可以构造一个一元三次方程模型,而 x,y,z 恰好是其三个根:

$t^3-t^2+\frac{1}{3}t-\frac{1}{27}=0$,通过分解因式可以求出三次方程的解,从而解决原问

① 钱佩玲等.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999.7(101).

题，$x=y=z=\frac{1}{3}$。

[函数模型]观察(1)、(2)两边的特征及联系，若以 $2(x+y+z)$ 为一次项系数，$x^2+y^2+z^2$ 为常数项，则以 $3=1^2+1^2+1^2$ 为二次项系数的二次函数

$$f(t)=(1^2+1^2+1^2)t^2-2(x+y+z)t+(x^2+y^2+z^2)$$
$$=3t^2+2t+\frac{1}{3}.$$

为完全平方函数 $3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2$，又根据上式有 $f(t)=(t-x)^2+(t-y)^2+(t-z)^2$，从而有 $t-x=t-y=t-z$，即 $x=y=z$，这是(1)、(2)的实数解，也适合(3)故 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 是原方程组的唯一实数解。

[平面解析几何模型]方程(1)、(2)有实数解的充分必要条件是直线 $x+y=1-z$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{3}-z^2$ 有公共点的充分必要条件是圆心(0,0)到直线 $x+y=1-z$ 的距离不大于半径。即 $\frac{|1-z|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}-z^2}\Leftrightarrow(3z-1)^2\leqslant0\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}$，由对称性知原方程组的解为 $x=y=z=\frac{1}{3}$.

9.3.2 探究性课题

新一轮基础教育数学课程改革强调了探究性课题的教学，“探究性课题学习”就是学生在教师的指导下，从自然、社会和自身生活中选择和确定研究专题，主动地获取知识、应用知识、解决问题的学习活动，也就是采取研究性的学习方法进行学习①。

1. 学习方式的特点

在学习方式上研究性学习具有以下一些特点。

(1) 整体性特点

任何研究性学习课题都应该立足于学生整体性发展，综合各个学科的相关知识，融学生对知识的理解、运用、创造过程于一体，体现全面发展的教育原则。

(2) 实践性特点

“探究性课题学习”应该以学生的现实生活和社会实践为基础挖掘课题资源，课程活动的开展过程也应体现实践性特点，强调学生的亲身经历和直接参与，发展学生的实践能力和创新能力。

---

① 刘华祥，刘咏梅，等. 中学数学教学论. 武汉：武汉大学出版社，2003.8(361)

(3) 开放性特点

"探究性课题学习"面向每一位学生,强调每一位学生在课题研究中发挥作用,因此,其目标具有开放性的特点。另外研究性学习方法也具有开发性,强调充分发挥学生在学习过程中的创造能力。研究性学习的评价具有多元化的特点。

(4) 生成性特点

"探究性课题学习"的本质特点就是目标的生成性特征,它不仅注意学习内容和方法的设计,更注意在学习不断深入的过程中,学生自主性的发挥,一些新的目标、新的主题不断被创造和实现,这就是课题学习的最佳状态。

(5) 自主性特点

"探究性课题学习"强调在教师指导下的学生自主性的充分发挥,学生可以自主决定研究方式,自己决定研究成果的呈现方式。教师的作用体现在帮助学生不断完善研究成果和研究意识上。

2. 教师在研究性学习中的行为

虽然我们强调学生在"探究性课题学习"中的主体作用,但教师的指导作用也是不可忽视的,教师的作用主要应体现在以下几个方面。

(1) 培养学生提出问题和解决问题的能力

首先是提出问题,教师可以通过展示研究性学习的案例等方式,启发学生提出问题,当学生提出了问题以后,一方面要给予鼓励,另一方面也要引导学生对问题进行筛选,选出最有研究意义的问题开展研究。在研究的过程中,教师应引导学生对问题进行分析,并提出解决问题的途径,最后选择有效途径达到解决问题的目的。

(2) 提高学生的科学研究能力

"探究性课题学习"过程不仅是学生运用知识解决问题的过程,也是培养学生研究能力的过程,虽然学生的研究可能不具有先进水平,但对学生而言却是进行科学研究的开始,因此,在研究方法上的指导也是教师的作用发挥之初,应结合研究内容传授给学生一些基本的科学研究方法,使学生的研究更具有科学性,研究能力也就得到相应的提高。

(3) 创设研究情境提出初始问题

为了激发学生对研究性课题的兴趣,教师应创设适当的问题情境,设置初始的问题,初始问题一定要具有吸引力和启发性,如对于函数的运用问题,如果教师将初始问题设置为"研究函数在实际中的运用",往往学生不知道怎么开始研究,也就自然没有兴趣。如果教师能够首先收集一组数据,并用适当的函数模型反映这一组数据,则学生将受到启发,并可以将研究开展起来。

9.4 作　　业

作业是数学学习中必不可少的重要组成部分，无论对于教师还是学生通过作业都可以起到改进教学和学习的目的，教师可以通过学生作业的批改发现教学中的问题，学生可以通过作业巩固知识，并通过反馈了解自己在学习中的问题。

9.4.1 在新的教学环境下教师所应具备的作业观

虽然在任何时候数学学习都有作业，但在不同的时期对作业有不同的认识，对作业的理解和运用方式也将随之而变化，目前，新一轮基础教育改革正在开展，教师在新的环境下必须具有新的作业观。

1. 在作业的功能上应强调形成性和发展性

作业不能停留在对学生的学习进行检查的功能上，更要注意通过作业促进知识的形成和发展。在促进知识形成方面，主要可以从理解和记忆并形成技能的角度安排作业。在促进发展上可以是对上课内容的延续，对课堂教学中问题的进一步思考或对某问题的不同解决方式的探讨等。

2. 在作业的内容上应突出开放性和探究性

作业不仅应该要求学生独立思考，也应该要求学生通过合作共同完成，因此，作业的内容就应该突出开放性，使不同的学生能有不同的解答，从而为研究和探索提供可能性。

3. 在作业的形式上应体现新颖性和多样性

作业不仅要注意一些基本格式的基础题，也应该体现形式的新颖性和多样性，作业可以口头也可以书面完成，可以是课堂完成也可以是课后完成，可以是解决一些数学问题，也可以是建立数学模型，还可以是学习体会或论文等。

4. 在作业的容量上应考虑量力性和差异性

作业即应该包括统一要求完成部分，也应包括不同层次的选择性作业。

5. 在作业的评判上应重视过程性和激励性

作业的评判即要使学生认识到自己学习中的问题，又要对学生的学习态度和学习过程进行评判，要使学生增强学习的自信心。

9.4.2 作业的设计

作业的设计是一项非常重要的教学工作，教师可以按以下步骤进行设计。

1. 作业分层次

教师在新知识教学之后，认真分析各类学生现有的数学基础，以及他们的最

邻近发展区的状况,设计一套题量适当、由浅入深、由易到难的习题,它们分别是基础题、巩固题、综合发展题三种题型,并分类标号,如:A1、B3、C1,为学生搭脚手架。

2. 鼓励学生参与作业的完成

教师宣布作业不要求上交,学生可以自己选择交或不交,学生围绕教师设计的题与问题尽自己能力想与做,教师只做抽样调查,但对独立做完题的或比上次多做题的同学施行奖励。

3. 注意学生反思能力的培养

学生从易到难独立作业。教师明确表示题目可以不做完,但必须完成以下任务:

(1) 写出本次作业中,你独立完成的题的标号,按做题的顺序编排。目的在于搞清学生新旧知识的构建情况,将不同的学生分类,为下一步的教学做准备;

(2) 在所做的题中你用到了哪些知识?这些知识你正确掌握了吗?目的在于梳理知识,考查学生自主学习的能力,为再学习做准备;

(3) 写出本次作业中途卡壳的题的题号。思考卡在哪里?与什么知识有关?目的在于引导学生如何建立知识的联系,找到问题所在;

(4) 写出不动笔的题的题号,你认为不会做的原因在哪里?目的在于找到学习难点,为寻找帮助者做准备。

4. 互相交流

作业可以让学生协作完成,要求同学相互交流,但严禁抄袭。具体可以按下列步骤进行:

(1) 公布自己会做题的题号,寻找同号伙伴,相互交流各自的做法,学习别人的不同方法,推出团体的最优方法并将此方法告知老师;

(2) 公布自己卡壳题的题号,寻找会做此题的团体,加入其中,寻找卡壳的问题症结所在,讨论解决问题;

(3) 公布自己不会做的题号,寻找此题开始卡壳并且现在会做的同学伙伴,加入其中,相互帮助,相互学习讨论解决问题;

(4) 全体不会做的题,在教师的分层启发下,教师与同学一起探讨完成。

9.5 学生数学成绩考核与评定

1. 对学生学习考核的方面

新一轮基础教育改革提倡充分发挥考核与评价对学生学习的促进作用,强调考核的多面性,对学生的学习状况的考核至少可以从以下几个方面进行。

(1) 对数学知识的理解的考核;

（2）对数学技能掌握的考核；

（3）对数学学习中发现问题和解决问题能力的考核。

2. 数学成绩考核与评定方法

（1）数学成绩考核的方法

数学成绩考核主要可以通过书面考试的方式进行，教师在命题方面具有对学习的导向作用，因此，教师的命题必须考虑学生的实际情况和课程标准对知识技能和能力的基本要求命题。

（2）数学成绩评定的方法

数学成绩的考核虽然具有客观性，但由于种种原因学生可能在一次或几次考核中失败，因此为了培养学生的自信心，我们不能以一次或几次考试就给学生下定论，为此，对学生成绩的评定应该的多方面情况的综合评定。

9.6 说　　课

9.6.1 说课的概述

说课是一项对基础教育具有重要意义的教学研究活动，因为这一教学活动对教师发展，特别是对教师的教育研究意识和研究能力的提高，对学校的文化建设、学生成长都具有极其重要的价值，但要在说课的过程中体现这些价值，必须注意一些操作模式。

随着新一轮基础教育改革的不断推进，出现了一些新的问题，其中教师对教学的不适应问题显得尤其突出。这一问题似乎也能通过教师的不断总结经验、不断适应解决，但这只是技术层面上的解决，或者可以认为是教师习惯后的一种机械操作。要从根本上解决问题只能依赖教师对教育的理解、对学生的理解、对教学内容的教育意义的理解，从而达到对新课程理念的理解，也就是说教师需要经过理性的思考，形成与目前教育发展相通的教育观、学生观和教学观，并将其内化，形成从内而外的行为。

著名教育家叶澜教授指出“在学校中，没有教师的发展，难有学生的发展。”[①]促进教师的专业发展由于直接关系到教育改革的成败，因此成为教育发展的首要问题。而教师的发展必需依赖教师自身对教育的研究，这便对教师的科研能力提出了新的要求，因此，教师的科研素质便成为基本素质。提高教师对教学的研究意识和研究能力也就成为新一轮基础教育改革能否取得实效的关键因素之一。

① 叶澜.“新基础教育”论.北京：教育科学出版社，2006.9(234～235).

百年大计，教育为本；教育大计，教师为本，所以在教育迅速发展的今天，对提高教师素质，特别是提高教师研究素质怎样强调都不过分。目前围绕教师教育问题的研究，人们已经提出了许多途径，以达到提高教师研究素质的目的，但由于这些途径大多是希望借助于外部力量来解决问题，而忽视了教师内部因素，因此效果并不显著。成功的说课活动是教师自身教育智慧的展示，是教师的研究能力和水平的体现，是教师的合作、探究意识和能力的发挥，因此能够促进教师对教育问题的研究，从而促进其研究能力的提高，这就使说课这一教研活动在提高教师科研素质方面具有其他活动所不可取代的作用。

说课，是当今教学改革的新课题，是教学研究工作的新形式，说课活动的开展，引起了广大领导和教师的广泛重视与关注，为教学研究工作注入了新的生机与活力。

说课，就是让对教材的某章节有准备的教师，根据教学大纲（或课程标准）、教学理论，对教材内容、教学目标、教法、学法、教学过程等方面的内容进行全面的设计与阐述，不仅要层次清晰地说明这节课怎样教，而且要简练精辟地揭示这节课为什么要这样教，然后由其他教师，提出改进意见，再由说课教师修改、完善其教学设计的教研形式。因此说课就是全面阐述和完善教学设计的过程。

9.6.2 对说课内涵的解读

1. 目前对说课的理解

把握说课的内涵，把握说课与其他教学活动的联系，充分发挥这一产生于我国本土的教学研究方式的作用，必须先对说课进行分析和理解。说课是目前在中小学比较活跃的一项活动，虽然如此，人们对说课的认识却不能说已经很清楚。事实上人们对“为什么要说课?”和“怎样说课?”这两个基本问题的认识也还是比较模糊的，对这两个问题的认识不清，使人们目前只将说看成是一种可以开展的比赛，或可以考察一个教师的途径，因此说课比赛经常开展，在教师聘用时说课也经常被作为一种考察的手段，但将说课真正用于教学研究的情况却还是比较少的，这就难以发挥说课的真正价值。

为了对上述两个基本问题认识清楚，我们先试图给说课一个界定。关于说课的概念，应该说到目前为止还没有一种具体的科学的定义。一般认为，说课就是教师将自己的教学设想和教学方法以及教学步骤用语言向同行表达出来，并由教师依据说课中提出的问题进行研究的一种教学活动。简单地说，说课就是针对一定的教学内容的设计情况（内容可以是一单元、一课时、一个知识点等等）说明为什么这么设计？其理论依据是什么？这样设计要达到什么样的目的等等进行说明。因此，说课的关键是在说明如何设计的同时说明依据。

目前使用较多的是其操作性界定，即认为说课是教师以语言为主要工具，在

备课的基础上，面对同行、专家，系统而概括地介绍自己对具体课程的理解，阐述自己的观点，表示自己对某课题的教学设想、方法、策略以及组织教学的理论依据等。这一对说课的操作性界定虽然便于操作，但却只是从形式上理解说课，这种理解容易将说课教师放到一个接受检查、等待评审的被动地位，这不但不利于教师主体性的发挥。而且这一界定容易使说课教师对说课的目的不明确，从而为"说"而"说"。另外，各种激烈的竞赛容易使人变得浮躁和急功近利，这不仅对于提高教师的科研水平是不利的，而且对教育的提升也是没有什么帮助甚至有副作用的。

2. 说课的内涵

为了认识说课，我们必须先认识说课与研究之间的关系，从本质上说，"说"和"研"的关系是辩证的，"说"是为了"研"，"研"是"说"的目的，"说"是"研"的过程，也就是说，说课的重点应该放在"研究"上。说课最核心的内涵是对教学的研究，说课中的研究的特点是围绕上课开展的，研究不仅是说课的目的，也是上课的前提。所以我们可以对说课的内涵给出如下的界定，即将说课理解为教师通过"说"的方式，对教学问题和教学环节等进行研究，并在与同行交流的前提下达到提升教学的过程。

由于说课以研究为目的，因此通过说课，可以让教育充满智慧。而且说课不仅是教师教育智慧的展示，也是教师思维能力和理论研究水平的展示，是教师对教育问题的研究和探索的成果展示。从这个角度也就可以认为，说课便是教师提高研究素质的有效途径，也是教师由"经验型"转变为"研究型"实现"专家型"的重要途径。

9.6.3 说课的价值

所谓价值就是指对事物发展的积极意义，价值具有内在的价值和外在的价值两个方面，说课作为一种对教学的研究活动，我们也可以从内外两个角度来认识其价值。这里的内在价值是指对说课教师自身的价值，主要表现在对教师主体性的彰显和教师素质(主要是研究素质)的提高上。而外在价值指对学校或学校其他成员的价值，主要表现在对学校文化建设的价值和对学生成长的价值上。以下从这些方面进一步阐述。

1. 说课对教师主体性发挥的价值

主体性的理论基础是马克思关于人的学说，马克思说"主体是人，客体是自然。"[1]因此在学校，无论是学生还是教师都应该是主体。新课程的改革突显了学生在教学中的主体地位，然而学生主体性的发挥在很大程度上依赖教师主体

① 《马克思恩格斯全集》第2卷第88页

性的发挥，因为教师是承载学校教育的主要力量，教师主体性发挥的重点表现在对教学的设计上，而这也就是学生主体性发挥的前提。

教师主体性的发挥的另一重要方面是教师自身素质的提升。从20世纪90年代以来，教师专业发展的研究范式便开始从关注教师专业发展的外部条件转向强调教师个体内在专业特征的提升，彰显教师在专业发展中的主体地位。[①]因此在教师的专业发展过程中，应突出强调教师主体性的发挥。马克思理论认为实践出真知，因此教师主体性在促进专业发展方面的重要途径，应该是体现教师的教学实践，即教学设计和教学过程。说课以教学设计为依托，以教学过程为成果，反映教师个体对教育的理解，对学生的理解以及对教学内容的理解，是教师哲学观、教育观、学生观的综合体现，因此，说课是教师在提升自身素质中主体性发挥的重要部分。

班杜拉的学习理论强调自我效能感对个体行为的影响，所谓自我效能感指个体相信自己能成功地执行产生一种特殊的结果所要求的行为。说课使教师具有一个阐述自己观念和研究成果的平台，可以将教师隐性的观念和能力转换为显性，从而突出教师个体的特点。教师还可以在与同行和专家的交流中体验研究的过程，而且他人的认可与参与是自我效能感产生的重要因素，从而教师可以将自己置身于教学研究的主体位置，体验主体性，达到增强主体意识的目的。

2. 说课对教师科研精神和科研能力发展的价值

教师素质的提高和发展是学校发展的原动力，也是教育发展的关键，而教师素质的发展在很大程度上依赖于教师的科研精神的形成和研究能力的提高。教师研究素质的提高也是教师专业化的必由之路，是教师由“经验型”转变为“理论型”的重要途径。随着新课程的进一步推进，教师角色也在逐步发生变化，教师不仅是课程的实施者，更应该是课程的开发者，这对教师的研究能力提出了新的挑战。

由于说课中的讨论可以使教师形成理解和分析他人意见的能力，也可以使教师认识到要使自身的观点具有说服力，依靠迷信、权威、书本不能奏效，只能依靠理性的思考和逻辑的论证，因此，说课对教师理性地分析和认识问题提供了依托，这对教师科研精神的形成具有重要的意义。

列宁在《哲学笔记》中对人的认识过程有一著名论断“由生动的直观到抽象的思维，再由抽象的思维到实践，这是认识真理、认识客观实在的辩证的途径。”列宁的论断说明，人要达到对事物的理解，必须有实践上升到理论再到实践的过程，而说课的过程也就是使教师将实践经验经过理性的思考而达到理论的高度来认识的过程，因此通过说课教师对教学的认识将更全面、更科学，这是形成和

① 郑东辉.教师课程领导的角色与任务探析.课程·教材·教法，2007.4.

发展教师科研意识和提高科研能力的出发点。

3. 说课对学校的文化内涵建设的价值

文化是人类文明的总汇,学校最大的特点是通过“育人”来延续文明和发展文明,因而学校是文化的圣地,而且学校文化也是学校的灵魂,是学校的凝聚力和学校活力的源泉。学校的建设在很大程度上是校园文化的建设,而校园文化主要包括学生文化和教师文化,在这两种文化中,起决定作用的是教师文化,因为教师文化对学生文化具有重要的带动作用。因此教师的发展是学校文化创造的核心内涵和真正动力。

在教师文化的内涵中,应该包括教师的合作、探究、积极向上的重要成分。由于目前评价体系导致了学校教师之间存在不当竞争,这种竞争不仅使学校失去了整体的优势和集体的智慧,而且使教师文化中普遍缺失合作意识和合作精神。教育改革的历史反复证明,只依赖个别教师自身努力的教学改革大都以失败而告结束。究其根源,主要是教师在进行教育改革过程中缺乏同行的支持,缺乏相互研究、切磋的氛围,因此许多教师在竭力支持了一段时间后,便感觉“江郎才尽”、“精疲力竭”,从而不得不放弃改革,这也是许多教育改革总是昙花一现的根本原因。

因此,在校园文化中彰显合作内涵极其重要,而说课正是为教师的合作提供了一个良好的平台,因此,说课可以促进教师的合作意识和合作能力的发展,从而为校园文化增加极为重要的内涵,这对教师合作意识的增强,形成包括合作在内的文化观也具有重要的意义。

4. 说课对教学的价值

教学的目的是促进学生的成长和发展,学校的发展水平最终体现在培养的学生状况上,学生发展的基础是教师的发展,因此教师优先发展应该是学校发展的战略措施。

通过说课,教师能够从内部更新自身的教育观念,形成教育理念,而教学过程正是教师对自身教育理念的追求过程,从这个意义上来理解,说课这一研究活动的最终受益者就是对学生的教学。

新一轮的课程改革提倡探究、合作、交流的教学模式,这首先要求教师具备与之相适应的能力,说课由于需要教师与同行或专家面对真实的教学问题,并为解决问题而共同寻找方法及理论依据,因此需要教师的交流与合作,这就为教师这一能力的提高提供了催化作用。

另外,由于说课的重点是说明教学设计的理论和实践依据,这便能促进教师从这两个方面对教学进行研究,从而使教师能更理性地对待教学中的问题,克服偏见,从这个意义上说,对教学及学生的影响是极为深远的。

9.6.4 说课的价值实现

从上所述可以看出,说课有许多重要的价值,但目前的说课大都停留在只"说"不"研",或以"点"(专家点评)代"研"上,这种汇报式的说课是很难体现说课的真正价值。因此,说课应该为教师营造"研"的氛围,从而达到"研"的目的。要实现说课的价值,从以下几个方面努力是必须的。

1. 在说课中突出"对话"

"对话"已经成为当代社会的关键词,从国际事务到人与人之间的关系,从政治领域到学术领域,"对话"已经成为人们追求的一种状态。有研究者认为"社会不过是因互动而联系起来的一些个体的名称而已"也就是说社会就是个体间的互动,只有互动才可能产生交流。而教师之间以教学研究为目的的"对话"就是教师最好的互动,也是形成教师共同体的最好方式。

苏格拉底主张教育不是知者随便带动无知者,而是师生共同寻求真理。将苏格拉底的观点推广到教师教育,也就可以认为教师教育不应该是专家对教师或年长教师对青年教师单方面的引领,而应该是共同寻求真理,而这一过程的实现就应该是通过"对话"来完成的。

近来关于教师知识状况的研究也表明,教师的知识包括理论知识和实践知识都是以"缄默"的状态存在于教师个体,其作用是十分有限的。通过说课过程中的对话,则可以将"缄默"的知识激活并转换为"明晰"的知识,并使其在教师之间流动。通过"对话"的深入,可以将个体的知识转换为教师共同体的知识,以共同体"财产"的方式存在,这一知识的不断积累和发展,便成为教育的原动力。

现代社会是一个只依靠个人打拼走不远的时代,是一个需要合作的时代。在"说课"这种教师群体间的"对话"互动中,我们不仅要重视教师教学经验的分享,更应该注意教师对教学的研究成果的相互叙说,并应将教师的研究成果进行"连接",形成教师群体的研究成果。因此,从这个意义上说,应该将说课发展为教师共同体的知识发展和创新的过程,"这样一个知识(发展)与创新的过程对于成功具有核心的意义。"①

2. 将说课发展为教师自我教育的过程

随着教育改革的发展,"教师教育"这一词汇的使用频率也不断增高,然而在各种培训班结束以后,人们发现培训的效果却并不显著。究其原因,主要是因为目前的培训总是只将教师作为培训的对象,因此总是离开教师自身在教师外部寻找培训方案。虽然培训模式总是不断更新,却很少注意利用一些传统的教

① 饶从满,张贵新.教师合作:教师发展的重要途径.教师教育研究,2007.1(12)

研方式达到教师自己培训和提高的目的。

教师培训中的专家讲座在形成教师的教育观念方面具有重要的作用,但如果不用观念指导教学,观念就只能是观念。要使观念转变为行动,只依靠外部力量的灌输和说服是很难奏效的。建构主义心理学认为,学习是在学习者内部发生的事情,因此,要使教师的知识和素质得到提高和发展,重要的一个方面要使学习在教师的"内部"真正发生。具体地说,就是开发和利用一些传统的教研模式,充分调动教师在教育中的主体作用,以达到自我培训的目的这样的培训才可能取得实效。

一所好学校不仅应走出优秀的学生,也应该能产生杰出的教育大师。高素质的教师的形成,需要教师个体在本体意义上产生质的飞跃,而这种飞跃依靠外部力量是难以奏效的,依靠各种竞赛也是不能达到目的的,必须调动教师的内部主体性。

缺乏理论研究是目前我国教师的主要问题,它使教师的教学发展始终停留在对经验的总结和摸索上,使教师难以摆脱"教书匠"的尴尬。说课为教师提供了研究的对象、目标,使教师的研究成为有的放矢的行为。因此教师应充分利用说课的活动,通过自身的研究,形成与时代相通的教育理念和教育思想,并上升到理论,从而形成自己独特的教学风格。

在说课活动中,教师应该努力提升自己的科研能力,形成探索的习惯,这也是教师进行自我教育的最强大力量。因此,使每位教师都走上科研这条幸福之路(苏霍姆林斯基语)是说课的最佳境界。

3. 将说课作为学校文化建设的重要组成部分

教师是学校教育成败的决定因素,教师文化是学校文化的核心部分,和谐、合作是社会也是学校追求的目标和发展的基础,更是教师文化的最好状态。有研究表明,教师整体专业发展需要一定的社会文化环境,特别是合作文化的支撑。富兰(Fullan)指出:"合作对于个人的学习非常重要。如果我们不与人交往,我们能够学到多少东西是有局限的。合作的能力不论在小范围还是在大范围内,在后现代社会正成为十分需要的能力之一。只要思想开放(即提倡探索),个人的力量与有效的合作相结合将变得更为巨大。"[①]因此在学校营造相互合作的文化氛围对教师的发展进而对学校的发展是及为重要的。

目前教师进行教学研究的问题,不是知识的不足,也不是能力的不足,更不是在于教育经验的缺乏上,关键就是研究的意识不强和学校文化氛围的不支持。也就是说,目前许多学校的文化中还缺乏教学研究的内涵。教育部近来决定在全国中小学开展创建和谐校园活动,而创建和谐校园是关注教育内涵发展的实

① 饶从满,张贵新.教师合作:教师发展的重要途径.教师教育研究,2007.1(12)

践要求。说课的目的是研究，对各种教学因素的研究和对各种教学问题的研究，只有形成了研究之风，合作才有可能。同样只有在相互合作的状况下才能使研究之风更浓。也就是说研究与合作是互动的，要形成研究与合作之风，说课是重要的途径。因此说课应该成为建设和谐、合作的校园文化的重要途径。

在学校关系的研究中，人们更多的是关注师生之间的关系，实际上教师之间的关系也是值得关注的一种关系，没有教师之间的和谐是很难有师生之间的和谐，也就不可能有一个和谐的校园。"学校教育唯有在教师和学生双方的主动性和潜力都被开发，并在教育教学实践中积极产生交互作用时，才能办出个性和生气，形成独特的文化，才会成为参与学校教育和教学活动的每个具体人的生存发展的有机构成。"①我们应该充分利用说课这一教研活动，营造和谐、合作的教师之间的关系，将说课活动作为学校文化建设中的重要活动。

综上所述，理论研究是说课的重要前提，展示研究结果和研究过程是说课的重要内容，相互研讨是说课的重要过程，共同提高和改进教学是说课的主要目的。在基础教育改革中，应充分发挥说课这一教研活动的作用，由此带动教师素质的提高，从而促进校园良好文化氛围的形成。

9.6.5 数学说课的内容

我们知道，数学说课是数学教师间的业务交流，其根本宗旨是为了追求数学课的优化。数学说课，要向同行说什么？一般认为对于一堂课的数学说课内容，主要有四个方面：

1．说教材

即能制定较为完满的教学方案，为数学课堂教学的改进提供前提条件，这主要包括以下几个方面的内容。

(1) 介绍课时教学内容的地位、作用和意义

说课教师首先要阐述所备、所上的数学课在整个一节、一章乃至整个数学全套教材中的地位、作用和意义，而不是孤立地看待某课时教学内容。这是由数学教材环环相扣、具有严密的逻辑性和序列性所决定的。如直线的参数方程，是直线方程的另一种形式，由于这一部分内容是学生学习参数方程的开始，因此，对于其他参数方程的学习是基础。另外，由于参数方程在解决一些与圆锥曲线相关的问题时（如求直线和圆的交点等问题）具有优势，因此这一部分的学习具有比较重要的意义。

另外，在说明教学内容的地位和作用及学习意义时，还应结合对学生的影响来讨论，主要应说明对学生掌握知识的影响、对学生思维的影响、对学生非智力

① 叶澜."新基础教育"论.北京：教育科学出版社，2006.9(234 ~235).

因素的发展的影响。因此必须对学生现有状况和通过学习应达到的状况进行分析。

(2) 提出本课时的具体明确的教学目标

教学目标是课时备课中所规划、课时结束时要实现的教学结果。课时目标越明确、越具体,反映教者的备课认识越充分,教法的设计安排越合理。说课中要注意避免千篇一律地提出“通过教学,使提高学生的思维能力……”一类的套话,要从识记、理解、掌握、应用四个层次上分析教学目标。课时目标制定中还要提出思维能力和非智力因素方面的培养目标,包括思想品德教育渗透和兴趣、习惯培养目标。如直线的参数方程的知识目标应该是,使学生理解参数的设置过程和参数的意义以及参数方程的形式,并能利用参数方程解决一些问题。

另外,说课时对一些重要的教学目标不但要说明目标是什么,而且要说明制定这一目标的意义,还要从学生认知结构的发展的角度阐述目标的可行性。如上述直线的参数方程的知识目标的设置,一方面由于利用参数方程解决问题可以简化过程,另外由于学生具有平面几何知识作为基础,对参数方程的设置在理解上不存在障碍等原因,所以这一目标的设置是有积极意义的,而且也具有可行性。

(3) 说本课教学内容

教学内容应说明包含哪些知识点,教材是如何展示教学内容的,教材叙述语言与例题怎么配套,按什么顺序展开的例题与习题的分布类型,其中的重点、难点内容是什么,还要说明重点、难点确定的理由。如直线的参数方程的教学难点是参数的几何意义,即如何使学生理解参数 t 是直线上任意一点与已知点的数量,t 的选择的意义(即理解 t 的变化与点的变化的对应关系),这是因为,如果没有教师的引导学生很难直接确定参数。

2. 说教学程序

程序是否合理,是否符合认知规律,也是课堂教学是否优化的标准之一。数学说课中的教学程序有点近乎教案上的教学过程安排。在教案中,过程自己很清楚的可不必都写出来,而说课中不谈清楚,别人不一定都了解;教案上重视具体教学内容安排,而说课介绍教学的重要教学环节的次序和安排方式。备课只要备出是什么,说课不但要说是什么,还要说为什么,让别人接受信服,如为什么这样导入新课,为什么选用这个例子等。

3. 说教法

引导学生学习数学所采用的主要方式。这是改进数学课堂教学的主要方面。比如,教学思路和策略上,可以选择目标教学的方法,尝试教学的方法,发现教学的方法,阅读自学的方法,组织小组讨论交流的方法等;教学信息和感知材料的呈现上,选用题组呈现方式或一题多变的方法,投影、录音的方法,教具模型

演示的方法;在思维活动的组织上采取由实例列算式抽象的方法,从个别到一般的概括方法,由此及彼的类比推理方法,比较对照、区别异同的方法等等。教师在说课时,一方面要说明选择了什么教学方法,另一方面也要说明选择这些教学方法的依据。

指导学法方面,有指导学生阅读数学教材的方法,有组织学生按顺序有重点地观察的方法,有分析数量关系的方法,有安排学生操作、演示的方法等。叙述教法和学法,要注意坚持使教法学法有利于突出教材重点、突破难点,符合学生认识规律和年龄特征。同样地,教师在说明选择方法的同时还应说明选择方法的依据或操作的可行性。

4. 说练习和板书

作业的安排和板书设计。练习作业是课堂教学中必不可少的活动,犹如工业生产中的"产后服务"。说课就要谈谈是如何安排练习作业的,比如从内容上围绕重点,巩固新知;从层次上逐层深化、拾级而上;从数量上适度适量,紧凑而可以完成等等。

板书是教学内容的浓缩和集中反映,板书要醒目突出,具有内在合理性,要让人体察到教学的"序",这就有必要在说课中予以陈述。当然有些数学课的板书并不都显得十分重要和突出,也可不必说。

一般数学说课材料都可从这四个方面去准备,但也不是面面俱到,应有详有略,有的部分突出一些,而有的部分却可以简单带过。这主要依据教师对哪些问题进行了深入思考,在说课时就将其思考结果或需要共同讨论的遗留问题提出。

以上我们是对说课的基本内容进行了说明,如前所述,说课经常是对某一个教学问题进行提出自己的看法并与同行探讨,说课也没有僵化的模式,其内容不必包罗万象,应有所侧重,详略得当,要体现出教师的教学理论素养。说课经常出现的用语应该是"对这个问题我是这样思考的。"

9.6.6 说课的评价方面

1. 教材分析

(1) 教材的地位及作用分析得准确

主要指说课教师能准确认识教材对学生的知识学习、能力提高、兴趣养成等方面的重要意义。

(2) 教学目标及确立目标的依据恰当

首先教学目标必须全面,既要有知识能力等方面的目标,又要有数学素养的培养、合作意识的形成、自我探索精神的养成等方面的目标。另外,教师所制定的目标要切合实际,既要与教学内容相结合,又要与学生实际相结合,要避免大

而空的教学目标。

(3) 重点、难点明确

重点的确定一方面要依据知识的特点来确定,另一方面还要依据非知识的情况来确定,如果一部分知识虽然对学生的知识掌握的影响不大,但这部分知识的学习对学生的能力培养或素质提高有一定的意义,也应将其确定为重点内容。难点内容的分析要依据学生的情况,因此要充分体现因材施教的特点。

2. 教材处理

(1) 教学内容的组织与安排合理

教学能围绕一个或两个主要问题开展研究思路清晰明确,而且教学设计的可行性强。如果教学中出现两个或三个主要问题,教师能明确这些问题之间的联系。

(2) 学生状况分析得准确,采取对策恰当

分析学生状况不仅应注意到学生的知识状况,还应对学生学习数学的兴趣、数学思维能力、数学运用能力、数学解决问题能力等方面进行分析,要体现所教学的班级的特点。

3. 教学方法

(1) 教学方法及选择的依据恰当

教师必须对每一种教学方法的优势和局限性有一定的了解,既要说明运用这一方法的意义,有能说明在运用某一教学方法时要注意的问题。

(2) 教学方法灵活、实用

能综合运用各种教学方式进行有效地教学。

4. 教学手段

(1) 教学手段新颖

这一方面是反映教师的创新意识和创新能力的方面,无论是在概念的抽象还是公式的推导或是定理的证明,都体现出教师对教学的驾驭能力,给人耳目一新和美的享受。

(2) 实验、教具、电化等教学手段运用恰当

这一方面是体现教师运用现代教育技术的能力,要能够有效、合理地利用多媒体等教学手段,使教学具有现代化的气息。

5. 教学程序

(1) 新课导入自然、新颖

导入新课时教师一般应该为学生创设一个学习的情境,使学生能很快进入学习状态。情境应切合学生的实际,而且与教学内容有密切联系。

(2) 新课讲解透彻

这里体现出教师对教学内容的理解程度,教师应站在高等数学的角度审视教学内容,充分挖掘隐含在教学内容中的数学文化、数学思想方法等因素,在教学中不仅能使学生深刻理解知识内容,而且能使学生体验数学研究和解决问题的思想和方法,体验数学知识的产生和发展过程。

(3) 演示实验正确、科学

教师必须将正确的和清晰的知识传授给学生,而不是错误的或模糊的知识传授给学生,保证知识传授过程的科学性。

(4) 反馈练习恰当

教师选择的练习必须全面,既要有巩固练习和技能训练方面的练习,又要有能力培养、素质形成方面的练习。练习的量也必须合理,不应人为加重学生的学习负担。

(5) 归纳总结简要、明确

教师的总结、归纳是教学的画龙点睛部分,归纳不仅应该将本节课的内容加以概括,更重要的是有自然地提出一些有意义和学生感兴趣的思考问题,引导课堂向课外延伸。

(6) 板书设计美观合理

教师的板书在一定程度上反映了教师的教学技能状况。板书设计主要要体现的就是条理性和美观性,要使板书能反映本节课的主要内容和内容之间的相互练习。

6. 教学基本功

(1) 语言清晰、准确、逻辑性强

教师的语言必须富有感染力,必须能够吸引学生的注意力。数学教师的语言还应强调条理分明、层层递进、逻辑性强。

(2) 板书字迹工整、准确、美观

教师的字迹不应太大也不应太小,要根据教学内容合理安排,教师要尽量使板书在黑板上保留的时间长一些,以便学生进行进一步思考。

9.6.7 说课与备课、上课的关系

说课所营造的教科研氛围,有助于引导教师积极参与教学研究,具有很好的导向作用。说课能够强化教师的备课意识,说课要求教师对教材进行“二次开发”,促使教师深入钻研课程标准和教材,研究教学对象的具体情况,恰当地确定教学目标,认真研究教法,加强学法指导,精心设计,优化教学过程。

1. 说课与备课的关系

(1) 相同点

第一,主要内容相同,说课与备课的教学内容都是相同的;

第二,主要任务相同,都是课前的准备工作,当然说课有时也是课后说。

第三,主要工作相同,都要学习大纲(或课程标准),都要认真钻研教材,都要了解学生的认知状况和学习兴趣等方面的情况,都要选择适当的教学方法,都要对教学过程进行精心设计。

第四,主要目的相同,都是要达到优化教学和提高教师水平的目的。

(2) 不同点

第一,概念内涵不同。说课是表达教学思路并与同行切磋,而备课主要是设计使学生理解知识和学习解决问题的方法;

第二,对象不同。说课的对象是教师,而备课的对象是学生。

第三,活动形式不同。备课是教学活动而说课是教研活动。

第四,基本要求不同。说课要求重点对所确定的教学目的、教学方法、教学过程等方面从理论和实践两个方面说明依据,而备课要求重点是对实现教学目的的途径所采用的教学方法和教学过程进行精心设计。

2. 说课与上课的关系

说课与上课之间也存在着明显的区别,说课和上课从不同侧面、不同角度反映教师的业务能力,主要表现在以下方面。

(1) 说课与上课要求不同

说课的目的主要是通过教学研究优化课堂教学,而上课的主要目的是促进学生有效学习。通俗地说,上课主要是围绕怎么上的问题,而说课主要是围绕为什么要这样上的问题来论述。

(2) 说课与上课的对象不同

说课面对的是同行或专家,而上课面对的是学生,所以,说课就不应该对知识本身做过多解释,而应该对知识的教学方案进行解释。如说明什么是函数概念之类的问题应该是上课的内容,而学生在学习函数概念时可能出现的问题和怎样在课堂上引进函数概念则是说课的内容。

(3) 说课与上课的评价标准不同

说课是以教学目标、教学方式、教学过程、学生分析等方面的阐述的理论和实践依据是否充分、是否可行等作为评价的标准,而上课是以学生的学习状况为依据作为评价标准的。

上面的分析可以看出,说课是介于备课和上课之间的一种教学研究活动,对于备课是一种深化和检验,能使备课理性化,对于上课是一种更为严密的科学准备。

9.6.8 说课所应遵循的原则

说课和其他教学活动一样,也应遵循一些基本的原则主要有以下几个方面的原则。

1. 科学性原则

这一原则要求教材分析透彻、准确,对学生的学习状况和知识结构、知识准备状况、认知结构状况分析客观、正确并符合实际;所制定的教学目的符合课程标准、学生情况和教材的要求;教学方法紧扣教学目的、符合学情特点和学科特点,有利于发展学生智力,可行性强。

2. 理论联系实际原则

说课必须要有理论指导,将教学目的方法等上升到理论的高度来分析,并要将理论与教学班的实际联系起来,避免空谈理论。

3. 实效性原则

说课针对性强,能针对不同的说课目的进行说课,如一节课的教法分析,教学难点的分析与处理等;说课教师应对某一方面的教学问题进行仔细分析和研究;评说要有科学性并具有指导性。

4. 创新性原则

首先是教学方式的创新。能依据学生的特点提出创造性的教学模式,并具有可行性,创设的问题情境具有创新性,对学生的思维具有启发,能否调动学生学习的积极性;对教材的理解的创新。对教材有自己独特的理解和认识,能在知识教学安排中体现创新。

本章思考题

1. 在一章结束后,王老师决定上一节复习课,他是这样上的:首先对本章节的内容进行简单地回顾小结,然后安排一系列的例题进行讲解,最后小结,布置作业。你觉得王老师的这节复习课上的如何? 如果你来上你会怎样上?

2. 在一次课上老师本打算处理四个例题,前面很顺利,可到了例题3出现了意外:先是解题方法出现波折,反复修改,才现结果。然后一波未平,一波又起,气氛活跃,局面失控,结果第四个例题被挤掉了,请你对这节课进行评价,并说明理由。

3. 中学数学教学目标是什么? 教学目标的作用有哪些?

4. 结合实践,谈谈如何对学生进行数学的情感、态度和价值观的培养?

5. 结合案例,谈谈数学课堂教学评价的方法和策略。

6. 选择一个内容写一份教案并写一份说课稿。

□ 附录　说课、上课、听课案例

附录一　两角和与差的余弦说课稿[①]

一、课题:两角和与差的余弦(第一课时)(见高中代数(必修本)上册)。

二、教学内容

两角和与差的余弦一节,分两个课时,我讲的是第一课时,重点是公式的推导,其次是它的简单应用。至于结合同角三角公式来用、逆用以及对公式大的鉴赏宜留在第二课时进行。

三、思考的问题

讲这一节课,我主要思考了这样几个问题:

1. 如何推出课题,也就是怎样才能让学生产生一种需求,感到有一种必要:用单角的三角函数来表达和角的三角函数。这里有两种方案,一种是选择恰当的实例,再一种是通过求值来说明其必要性。鉴于前者需要对模型做过多的解释,容易喧宾夺主,因此,我选择了后一种方案。

2. 第二个问题关系到推导。推导的关键是什么? 事实上,不是距离公式,也不是单位圆,关键是三角函数的定义。令人遗憾的是参考书对这一关键问题缺乏应有的表达。由于中学缺乏代数证明的训练,使突破这一关键成为难点。对此,我不得不采用了观念指导的方法,就是给学生一种观念:当面对陌生问题时,我们应当回到定义。这样在解决关键问题的同时,也教给了学生思想方法。

3. 第三个问题是如何让思路来得自然一些。课本出于叙述方便,隐去了证明的思路,教师的任务就是要给出一种合理的思路,比如我们要表示 $\alpha+\beta$ 的余弦,那么就得作出 $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 的角,当发现 $|P_1P_3|$ 可以用 $\cos(\alpha+\beta)$ 表示时,想到应该寻找与 P_1P_3 相等的弦,从而才想到作出角 $-\beta$。这种思路和课本的叙述是不同的,但从思维的角度来讲,也许具有某种合理性。另外,从 $\cos 15^\circ$ 的求值来说明 α,β 的任意性,并由此推出两角差的余弦公式,也是基于这样的考虑。

4. 第四个问题是如何根据教学目标设计学生作业? 我考虑了两点。

首先,公式的证明是重点。但一般教学活动中,定理一旦得到证明,就只有应用的单一作业。本人认为这种对待重点的态度是不够的,因此设计了一个反思的情节:要求学生对证明过程进行概括,并提出探索其他证明方法的建议。

其次,对公式掌握的定位。对公式的掌握应以对公式的识别为前提。作为第一课时,我把练习的重点定位在公式的识别上,从而出现了这样的题:从 12 个小题中,选出能用公式做答的题并解答。这都是一些初步的尝试。

最后,作为教案,我认为教学目标的表述也是一个难题。认知目标好说,能力和情感目标如何表述,如何做到既反应教学的真实又不留于空泛。从而才有了教学目标的第二条(即通过推导思路的形成,让学生对创新、探索的过程有所体验。)。

---

① 裴光亚. 说课案例. 中学数学教与学,2002(11).

四、遗留问题

对这节课，留给我的一个重要课题是：能不能找到这样的方案，让学生自主突破关键，自己表达证明思路，对那些有前述课题参照，或者与前述内容具有相同逻辑结构，或者前提明确往下展开的课题，我们都有一套办法。但像今天的课题，它是陌生的，它本身就是全章的起点，为解决关键学生好像还缺乏能力上的准备。像这样的课题，我们应该怎么办？我将为此做些探索。

五、教学过程

在教学过程上我做了如下安排。

首先，我要求学生说出 $\cos 30°$，$\cos 45°$，$\cos 75°$，$\cos 15°$ 的值，学生能说出 $\cos 30°$，$\cos 45°$，但不能说出 $\cos 75°$，$\cos 15°$的值，从而引导学生形成下面的想法：

（1）75°，15°虽然不是特殊角，但有某种特殊性，即可以表示成特殊角的和与差。那么能不能由特殊角的三角函数值来表示这种和角与差角的三角函数值？

（2）如果特殊角可以，对一般的两个角，当它的三角函数值已知时，能否求出和与差的三角函数值？

由此产生一种探究的愿望，把这种愿望具体化，归结到：如何由 α，β 的三角函数值表示 $\cos(\alpha+\beta)$？

接着，探索公式推导的思路。

为了实现上述想法，我们有没有可以类比的东西呢？没有。一些形式上的类比 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 行不通（如 $\cos(0°+45°)\neq\cos 0°+\cos 45°$），只能回到定义。根据定义，在单位圆中表示 α，β，$\alpha+\beta$ 的三角函数，剩下的就是在这个图形中构造等量关系了。

点评：该说课教师对教学内容进行了比较深刻的思考，提出的问题也具有针对性，教师的思考也具有创新的特点。这节课实际上是一个知识点比较集中的课，涉及的新的内容就有两点间的距离公式的推导和公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 的推导，另外还要利用单位圆的相关知识及点的坐标等知识，怎样安排这些内容，教师介绍了难点的处理，但却没有介绍这些知识的相互依赖关系和如何确定本节课的中心内容。

附录二　反函数说课稿

说课内容：《高中代数》（必修本）上册第 1.11 节

一、教材分析

1. 教材的地位与重要性

“反函数”一节课是《高中代数》第一册的重要内容。这一节课与函数的基本概念有着紧密的联系，通过对这一节课的学习，既可以让学生接受、理解反函数的概念并学会反函数的求法，又可使学生加深对函数基本概念的理解，还为日后反三角函数的教学做好准备，起到承上启下的重要作用。

2. 教学目标

第一，使学生接受、理解反函数的概念，并能判定一个函数是否存在反函数；

第二，使学生能够求出指定函数的反函数，并能理解原函数和反函数之间的内在联系

第三，培养学生发现问题、观察问题、解决问题的能力；

第四，使学生树立对立统一的辩证思维观点。

3. 教学重难点

重点是反函数的概念及反函数的求法。理解反函数概念并求出函数的反函数是高一代数教学的重要内容，它是建立在对函数概念的真正理解的基础上，必须使学生对于函数的基本概念有清醒的认识。

难点是反函数概念的接受与理解。学生对于反函数的来历、反函数与原函数间的关系都容易产生错误的认识，必须使学生认清反函数的实质就是函数这一本质问题，才能使学生接受概念并对反函数的存在有正确的认识。教学中复习函数概念，进而引出反函数概念，就是为突破难点做准备。

二、教学方法选择

根据本节课的内容及学生的实际水平，我采取引导发现式教学方法并充分发挥电脑多媒体的辅助教学作用。

引导发现作为一种启发式教学方法，体现了认知心理学的基本理论。教学过程中，教师采用点拨的方法，启发学生通过主动思考、动手操作来达到对知识的"发现"和接受，进而完成知识的内化，使书本的知识成为自己的知识。

电脑多媒体以声音、动画、影像等多种形式强化对学生感观的刺激，这一点是粉笔和黑板所不能比拟的，采取这种形式，可以极大提高学生的学习兴趣，加大一堂课的信息容量，使教学目标更完美地体现。另外，电脑软件具有良好的交互性，可以将教师的思路和策略以软件的形式来体现，更好地为教学服务。

三、学习方法指导

"授人以鱼，不如授人以渔"，在教学过程中，不但要传授学生课本知识，还要培养学生主动观察、主动思考、自我发现的学习能力，增强学生的综合素质，从而达到教学的终极目标。教学中，教师创设疑问，学生想办法解决疑问，通过教师的启发点拨，在积极的双边活动中，学生找到解决疑难的方法。整个过程贯穿"怀疑—思索—发现—解惑"四个环节，学生随时有意识地对所学知识引起注意，思想上经历从肯定到否定、又从否定到肯定的辩证思维过程，符合学生认知水平，可以培养学习能力。

四、教学过程

在新课导入、新课讲授及终结阶段的教学中，我力求发挥学生自我发现的能力，突出学生的教学主体地位，以启发、引导为教师的责任。

1. 新课导入

首先，在导入阶段的教学中，抓住反函数也是函数这一实质，以对函数概念的复习来引出反函数。指明函数是一种映射的实质，分析原函数中映射的具体情况，进而引导学生考虑，若将定义域、值域互换，此时映射还是不是一个函数呢?

通过提问学生函数基本概念，使学生明白函数是一种单值对应，即映射。再出示电脑动画，以函数 $y=2x$ 来具体分析，结合图像引导学生注意：在定义域内所有自变量，都能在值域内找到唯一确定的一个函数值，即存在 $x \to y$ 的单值对应，例如：$1\to2,2\to4,3\to6,\cdots\cdots$ 若将定义域与值域互换，则对应变为 $2\to1,4\to2,6\to3,\cdots$ 这种对应是否构成单值对应，即映射呢?这种对应是否构成函数呢? 至此，引出反函数的概念，为概念的讲授做好准备。

这样的引入方式，抓住了反函数概念的实质，确保学生不会产生概念上的偏差。此外，可以使学生明白新知识来源于旧知识，促使学生主动运用函数的研究方法去学习反函数，为顺利完成教学任务做好思维上的准备。

2. 新课讲授

在导入的基础上，给出反函数的具体概念。

给出概念后，必须防止学生对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 形式的误解（以为是 $\frac{1}{f(x)}$）。此外，还要学生理解：最终的表达形式写为 $y=f^{-1}(x)$ 是顺应习惯，并且也为后面的图像研究提供方便，y 实际上是原函数中的 x，x 是原函数中的 y。对于这一问题可以引导学生从图像观察得出。

进一步深化对概念的理解，出示电脑幻灯，设置疑问：反函数是不是函数？反函数有没有三要素？如何确定？

引导学生思索，学生逐渐会认识到：反函数也是函数，其定义域是原函数的值域，对应法则可由原函数得到，值域则是原函数的定义域。

这时，给出电脑动画，指明反函数与原函数的关系。澄清学生对于概念的认识，抓住问题的关键。

但是，具体怎样求一个函数的反函数呢？

这些问题，必须通过实例解决，于是进入例题解答过程。

例 1 求下列函数的反函数

(1) $y=3x-1(x\in\mathbf{R})$；(2) $y=x^3+1$；(3) $y=\frac{2x+3}{x-1}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1)$

通过例 1，要使学生明白具体求反函数的过程。以达到突出重点、突破难点的目的。

启发学生：既然反函数也存在三要素，那如何一一求出，得到具体的反函数呢？这时结合第(1)小题，让学生思考问题。引导学生找出关键，通过解出关于 x 的方程，将 x 用 y 表达，以得到反函数的表达式。这个表达式中的 x、y 表示什么？这和我们通常的函数表达式有什么区别？进而引导学生想到交换 x、y 得到我们习惯使用的函数表达式。再考虑：反函数的定义域、值域怎么求？是怎样来的？学生思考后，可得出通过求原函数值域来得到反函数的定义域的方法。

教师板书第(1)小题，学生完成后两题。

此时，引导学生比较三道小题的解题步骤，师生共同小结出求反函数的三部曲：反解（把解析式看作 x 的方程，求出反函数的解析式）→互换（求出所给函数的值域并把它改换成反函数的定义域）→改写（将函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式）。

教师在这一部分教学中，抓住反函数是函数这一本质问题，突出了反函数与原函数之间的联系，给出了具体求解的过程，使学生掌握了重点问题的解决方法。教师以一个个问题来引导学生逐步"发现"解决问题的方法，符合学生的认知水平。在教师创设的问题情境中，学生的认识达到了第一次平衡。

"反函数的概念已经理解，反函数也会求了，任务已基本完成，该休息了"，有的学生会这样想。这时，出示第二道例题，打破平衡，激起学生的疑难。

例 2 (1) $y=x^2(x\in\mathbf{R})$的反函数是什么？

（2）$y=x^2(x\geqslant 0)$的反函数是什么?

（3）$y=x^2(x<0)$的反函数是什么?

相当一部分同学会按部就班求出第（1）小题的“反函数”$y=\sqrt{x}(x\in\mathbf{R},x>0)$。这对不对呢?出示电脑动画，引导学生观察图像，从函数的概念出发，必须存在$x\to y$的单值对应，但反过来呢?$y\to x$存不存在单值对应呢?适当的引导提问，使学生抓住了问题的关键：在原函数的定义域内必须存在$y\to x$的单值对应，这是反函数存在的前提。认清这一问题后，引导学生进一步分析，$y=x^2(x\in\mathbf{R})$不存在反函数，在定义域的局部存不存在反函数呢?让学生借助图形发现答案，并且进一步得出$y=x^2(x\geqslant 0)$，$y=x^2(x<0)$两个函数的反函数。这样，就突破了主要难点，澄清了概念，并为以后反正弦函数的教学做好理论准备。

这样设计的好处是：（1）通过函数图像来研究问题，直观形象，符合学生的认识水平，并且为后续的互为反函数的函数图像关系问题做好铺垫。（2）对于反函数的存在性问题，不能回避，必须使学生理解其内在含义，由具体的二次函数结合图像解决这一问题，可以澄清学生的疑问，达到教学目标。

此时，趁学生对于概念有了一个比较清晰的认识，出示幻灯，从函数概念、反函数的存在性、反函数的求法三方面进行简单的归纳，突出重点，突破难点。

3. 终结阶段

第一步，课堂练习

出示电脑幻灯，让学生完成以下练习：

第一道题为：函数$y=2|x|$在下列哪个定义区间内不存在反函数?（　　）

（A）$[2,4]$;　　（B）$[-4,4]$　　（C）$(0,+\infty]$　　（D）$(-\infty,0]$

第二道题为：求反函数：$y=\dfrac{x}{2x+5}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq-\dfrac{5}{3}\right)$，

第一道题是概念题，使学生对于反函数的概念有更清晰的认识，使学生对于反函数的存在条件认识更深刻。第二道题使学生熟悉反函数的求法，突出重点。

第二步，小结归纳

通过对反函数概念和性质的小结，使学生理清这节课的重难点，并使终结阶段的教学更为完整，达到本堂课的教学目标。

让学生做课本 p.65 习题六 2、3、5，通过作业反馈学生掌握知识的效果，以利课后解决学生尚有疑难的地方。

布置一道发散性的练习：已知函数$y=f(x)$，是增函数且存在反函数，问：反函数$y=f^{-1}(x)$单调性如何?图像中如何反映?进一步深化教学。

总之，在整个教学过程中，我抓住学生的“主体”作用做文章，不浪费任何一个促使学生“自省”的机会，以积极的双边活动使学生主动自觉地发现结果、发现方法。培养了学生的观察分析能力和思维的全面性。具体教学中，教师创设问题情境，学生在这一情境中去讨论分析、探究发现，以符合学生思维的形式发展了学生的能力，达到了教学目标，优化了整个教学。

点评：教师的说课比较规范，能够按要求将所需要说的内容都进行了说明。但在叙述教学目标时却没有将教学目标的制定依据进行说明。反函数的本质特点教师进行了介绍，但却未能明确反函数问题研究的意义和价值，教师的教学不仅应该使学生掌握反函数的定义、能

求反函数、能判断反函数是否存在这些知识的学习上,更应该通过意义和价值的认识,使学生明确知识的产生过程和运用途径。教师应结合函数图像引导学生对 $y=f(x)$、$x=f^{-1}(y)$、$y=f^{-1}(x)$三个函数关系准确认识。

附录三 椭圆标准方程的教案

一、课题:椭圆及其标准方程

二、课型:新授课

三、教学目标

1. 知识目标:理解椭圆的定义;明确焦点、焦距的概念;了解用椭圆定义推导椭圆的标准方程的过程。

2. 能力目标:让学生感知数学与实际生活的普遍联系,培养学生类比、数形结合的数学思想方法,调动学生积极观察、猜想,培养学生探索发现能力,同时培养学生运动、变化的辩证唯物主义观点。

3. 情感目标:培养学生探索能力和进取精神,提高学生数学思维的情趣,给学生以成功的体验,形成学习数学知识的积极态度。

四、教学重点与难点

重点:椭圆的定义和标准方程的应用;

难点:椭圆标准方程的推导。

五、教学方法:实验、讲解法。

六、教具准备:绳子、固定绳子的图钉等。

七、教学过程

1. 创设情境,引出概念。

提问:知道"嫦娥一号"的发射时间吗?

提问:知道"嫦娥一号"的运行轨道吗?

教师:运行轨道是椭圆,我们今天就来研究椭圆。椭圆在实际生活中是很常见的,学习椭圆的有关知识也是十分必要的。那么如何统一地研究生活中出现的各种各样的椭圆呢?这就是我们今天要探究的——椭圆及其标准方程。

(点评:这里可以让学生或教师与学生一起列举各种各样具有椭圆形的对象,以增强学生的感性认识。)

2. 尝试探究,形成概念。

教师用一块带有绳子的纸板,绳子的两端固定在纸板上,并说"我现在用笔尖将绳子拉紧,使笔尖在图板上慢慢移动。我们发现画出的图形是一个椭圆。"教师指出绳长大于两端点的距离是画出椭圆的关键。

提问:在画图的过程中,哪些是不变的量?

得出结论:两个点和绳子的长是不变的。

教师:我们来看椭圆的概念。

(点评:椭圆应直接画在黑板上,为下一步建立坐标和进一步研究奠定基础。)

教师板书椭圆定义:把平面内到两定点 F_1,F_2 的距离之和等于常数 $2a$(大于 $|F_1F_2|$)的

点的轨迹叫做椭圆，这两个定点 F_1，F_2 叫做椭圆的焦点，两焦点的距离 $|F_1F_2|$ 叫做焦距。

说明：若 $2a=|F_1F_2|$，则轨迹是线段 F_1F_2（教师演示）；若 $2a<|F_1F_2|$，则轨迹不存在；所以，$2a>|F_1F_2|$ 是形成椭圆的必要条件。

（点评：教师应该使学生明确定义对问题研究的重要意义，理解数学研究对象是通过建立数学定义，从而确定研究模型的，而不是对实际问题的直接研究，而形成数学定义的过程就是抽象的过程，要使学生体验这一抽象过程）

3. 标准方程的推导

教师：为了研究椭圆，我们现在需要用坐标法建立椭圆的标准方程，同学们回忆一下上一章中求曲线方程的一般步骤是什么？

师生共同得出：建立坐标系；寻找动点满足的几何性质；把几何条件坐标化；化简方程。

（1）建系设点

教师：我们以两定点 F_1，F_2 所在的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，设 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，$P(x,y)$ 为椭圆上任意一点（图 9.2），则有以下结论。

（2）点的集合

由椭圆的定义得出动点 M 满足的集合是 $\{P \mid |PF_1|+|PF_2|=2a\}$

（3）动点满足的代数方程

由 $|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

故 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y}=2a$

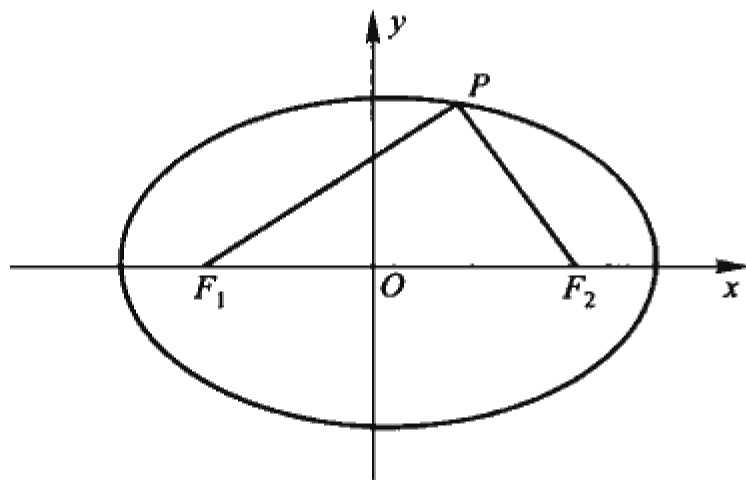


图 9.2　椭圆方程的推导

（点评：这里是用建立直角坐标系的方法求出椭圆的方程，应该使学生明确这一方式的优点，也就是说，可以通过建立直角坐标系形成椭圆的标准方程，用研究标准方程的方式来研究几何图形，将几何问题代数化）

（4）化简方程

将上面的方程移项后两边平方，得：

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

整理得：　$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

两边再平方，得：　$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$

整理得：　$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

因为 $a>c>0$，故 $a^2\neq c^2$，两边同时除以 $a^2(a^2-c^2)$，得：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$。

教师：到此我们已经推导出椭圆的方程，但方程在形式上不一致，x^2 的分母为一个数的平方，y^2 的分母为两个数的平方差。故令 $b^2=a^2-c^2$，所以，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，这就是椭圆的标准方程。

（点评：方程的推导过程课本上比较详细，而且这一内容安排在高中，所以教师只要将化简的一些主要步骤写出来就可以了。另外，$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ 就已经可以作为椭圆的标准方程了，但是形式过于复杂，所以化为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$，但又不对称，因而化为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，这实际上体现了数学追求简洁、追求完美的特点，这一点应该让学生体验。）

（教师板书并讲解）说明：

(1) 方程条件 $a>b>0$ 不可缺少，若 $a=b>0$，则方程就是圆的方程，从而进一步说明圆是椭圆的特例；

(2) b 的引入虽是为了方程形式一致，但也有实际意义，即 $b^2=a^2-c^2$；

(3)（请同学猜想）若焦点在 y 轴上，得到的方程的形式又将如何？

焦点在 y 轴上的方程形式为：$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(b>a>0)$，（请同学课后推导）。

（点评：这里应该突出数学的奇异美，因为 $b^2=a^2-c^2$ 的假设，却发现了一个十分重要的直角三角形（图 9.3），结合图形让学生体验三角形的意义。）

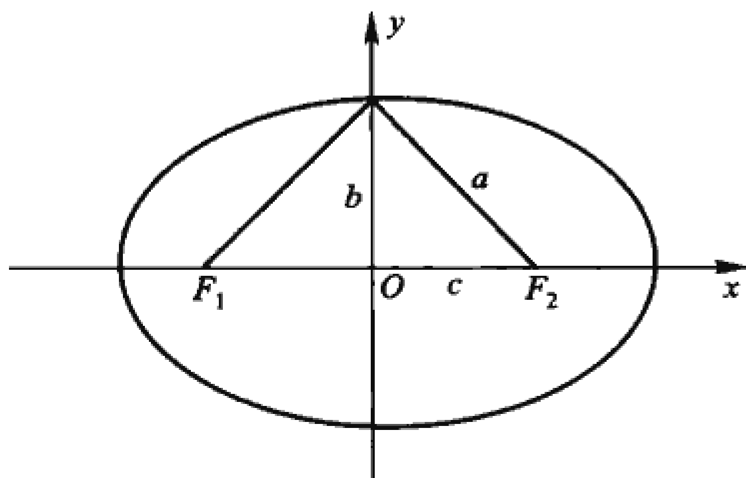


图 9.3 椭圆方程的奇异美

4. 例题讲解

例 求两个焦点坐标分别是 $(-4,0)$，$(4,0)$，椭圆上一点 P 到两焦点距离的和等于 10 的椭圆的标准方程。

解 因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以它的标准方程形式为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，因为 $2a=10$，$2c=8$，所以 $b^2=a^2-c^2=9$，所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$。

5. 小结

（1）椭圆的定义；

（2）椭圆的标准方程和方程的推导过程；

（3）椭圆的焦点坐标。

6. 作业

课本 p.96 的 2,3。

点评：本节课教师设计的条理清楚，重点突出，通过"嫦娥一号"的轨道来引出椭圆的问题，可以培养学生的爱国主义精神，教学能对椭圆的标准方程的问题提出引起学生注意的问题。但教学缺乏学生的积极探索。提出以下改进建议，

1. 可以先由学生熟悉的椭圆的实例引出椭圆的概念，如切萝卜的切面、运动场的跑道以适当的角度切割对顶圆锥等都可以得出椭圆，可以增强研究的必要性的认识；

2. 在教学中，也应该渗透数学的思想方法，首先应该使学生明确直观的椭圆形的物体不是数学研究的对象，数学研究对象的确定必须通过定义；其次应该使学生明确，数学中对一个几何研究对象的定义，应该明确的就是这个几何图形产生的过程，也就是说应该先画出一个椭圆；

3. 画的过程应体现探索，如可以将绳子的长度变化，使学生发现怎样的绳子的长度才能画出椭圆；

4. 在推导椭圆方程的过程中 b^2 的设置，也是一个重要的问题，应该给予重视，实际上，设置 b^2 是为了追求椭圆方程的对称美和简洁美，但却在图形上出现了一个巧合，这说明数学处处存在奇妙的美，出人意料，以培养学生对数学的热爱和学习数学的积极性。

附录四　对数概念的教案

课题：对数的概念

一、教学目的

1. 理解对数的概念，培养学生对立统一，相互联系，相互转化的思想.

（1）了解对数式的由来和含义及与指数式之间的关系.

（2）能根据概念进行指数与对数之间的互化，

（3）清楚对数式中各字母的取值范围.

2. 了解对数两个基本性质及两个特殊对数。

3. 能解决简单的对数计算，培养归纳思维能力和逻辑推理能力，提高数学发现能力。

（点评：这里对知识目标的制定具体而且具有可操作性，但对能力目标的制定却显得不具体，操作性也不强，不容易落实。）

二、教学重点，难点

1. 重点：对数的概念

2. 难点：对数概念的理解.

三、授课类型：新授课

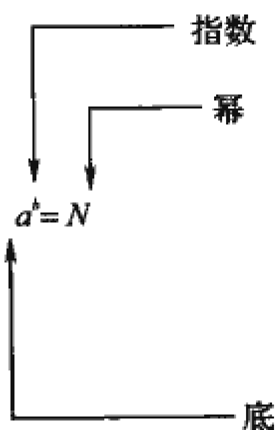
四、课时安排：1 课时

五、教学方法：引导发现法

六、教学用具：投影仪

七、教学过程设计

1. 复习引入



师：上个单元我们学习了指数与指数函数的有关知识，我们看一下这个式子，其中的 a，b，N 个有什么名称？由这个式子我们还可以得到两个式子（1）$N=a^b$，用 a，b 来表示 N；（2）$a=\sqrt[b]{N}$用 b，N 来表示 a。那么我们自然会想能不能由 a，N 来表示 b 呢？怎么表示呢？（给时间学生思考）

师：（提示）在用 b，N 来表示 a 的这个问题中我们引进了一个符号“$\sqrt{\ \ }$”把 b，N 与 a 相互联系起来。那么我们可不可也有一个符号把 b 与 a，N 联系起来呢？

生：用“log”。

（点评：这里需要对对数的引入的意义做一些说明）

师：为什么？

师：实际上，这个雏形符号是由苏格兰数学家纳皮尔提出的，在 16 世纪中旬，纳皮尔在研究天文学的过程中，由于计算的需要，就用了拉丁文“logarithm”这个词来表示 b，意思是“计算或比例”。开普勒把词简化为“Log”，再后来，施托尔茨等人以“$a$log. N”表示 b，此后又觉得把 a 放在前面不好用就把它放在右下方，改为“$\log_a N$”一直到现在我们还在用。由此可见，一种符号的普遍采用是多么的艰难，它是人们在悠久的岁月中，经过不断改良、选择和淘汰的结果，它是数学家们集体智慧的结晶，而不是某一个人凭空臆造出来的，不是从天上掉下来的。

师：在我国我们把这个符号称为“对数”，这是因为纳皮尔在引进了这个符号后还给出了一个数值表，数值是一对一对的，在《数理精蕴》中则称作对数表。此后在我国便都约定俗成，把这个符号称作对数。（引入对数）今天我们就来了解一下对数。

2. 讲授新课

师：（板书）

> 若 $a^b=N(a>0$ 且 $a\neq1)$，则称 b 是以 a 为底 N 的对数，记为 $b=\log_a N$。其中 a 叫做底数，N 叫做真数，式子叫做对数式。

（请同学注意写法和读法．记为$\log_a N$，读作：以 a 为底 N 的对数．）

师：请同学谈谈对对数这个定义的认识．

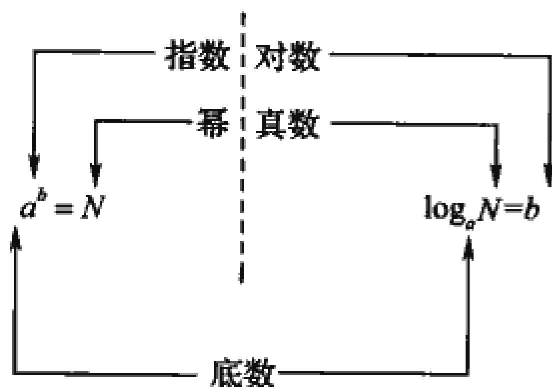
生：对数式实际上就是指数式中的指数 b 的一种新的记法．

生:对数是一种新的运算.是知道底和幂值求指数的运算.

(此刻并不奢望学生能说出什么深刻认识,只是给他们自己一个去思维认识对数这个定义的机会.)

师:说得都非常好.从对数的这个定义我们可以看出对数与指数有着紧密的联系。前面我们了解对数这个符号是纳皮尔由于计算的需要提出的,那个时候还没有指数这个概念,后来瑞士的数学家欧拉发现指数与对数之间有互逆的关系,提出对数源于指数,此后我们就一直沿用到现在.

师:实际上指数与对数只是数量间的同一关系的两种不同形式.(板书)



指数式⇔对数式

师:同学们先思考例题1.

(板书)例一,把下列指数式写成对数形式:p. 76(略)

练习1 把下列指数式写成对数形式:(注意纠正学生的错误读法和写法.)

(口答)

(板书)例二,把下列对数形式写成指数形式:p. 76(略)

练习2 把下列对数形式写成指数形式:(略)(练习的目的在于让学生熟悉对数的定义。)

师:把这个对数式写成指数式$\log_2(-2)=a \Rightarrow 2^a=-2$。这个转化成立吗?

生:不成立。因为在实数范围内,正数的任何次幂都是正数 $a^b=N>0$,所以$\log_2(-2)$也无意义。

师:所以在对数式 $b=\log_a N$ 中 N 必须为正数。(这是学生最易出错的地方,应一开始让学生牢牢记住真数大于零.)

师:(板书)

$a^b>0, a^b=N$,因而 $N>0$, $a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b$ 零和负数没有对数.

师:1的对数$\log_a 1=$? ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

生:根据对数定义 $a^0=1 \Leftrightarrow \log_a 1=0$

师:(板书)

性质1:$\log_a 1=0$($a>0$ 且 $a\neq 1$)

师;底数的对数$\log_a a=$? ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

生:根据对数的定义 $a^1=a \Leftrightarrow \log_a a=1$

师:(板书)

性质 2 : $\log_a a=1$.（$a>0$ 且 $a\neq1$）

师:接下来我们来认识两个在对数发展过程中有着重要意义的对数.

师:我们把以 10 为底的对数称为常用对数。为了简便,N 的常用对数 $\log_{10}N$ 简记为 $\lg N$。例如 $\log_{10}5=\lg5$,$\log_{10}3.5=\lg3.5$ 等。

在自然科学中有个特别的无理数 e = 2.71828...,(e 的发现始于微分,当 n 逐渐接近零时,计算 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 之值,其结果无限接近一定值 2.71828...,这个定值就是 e,最早发现此值的人是瑞士著名数学家欧拉,他以自己姓名的字开头小写 e 来命名此无理数。)

我们把以 e 为底的对数称为自然对数。为了简便,N 的自然对数 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$。例如 $\log_e 10=\ln 10$,$\log_e 3=\ln 3$ 等。

(板书)

常用对数:取底数 $a=10$ 的对数,简记 $\lg N$;
自然对数:取底数 $a=e$ 的对数,记作 $\ln N$,其中 e 是个无理数,即 $e\approx2.718\ 28\cdots$.

练习　计算下列对数:

(1) $\log_5 1$　(2) $\log_5 5$　(3) $\lg10$　(4) $\ln e$

(加深对两个基本性质和常用对数和自然对数)

(生口答.略)

(5) $\log_5 25$　(6) $\log_2\frac{1}{16}$　(7) $\lg 100$　(8) $\lg 0.01$

(培养归纳思维能力和逻辑推理能力,提高数学发现能力)

师:请同学说出结果,并发现规律,大胆猜想.

(5) 教师讲解.因为 $\log_5 25=\log_5 5^2$,则有 $5^N=5^2$ 所以 $\log_5 25=2$.

(其他由学生板演)

生:因为 $\log_2\frac{1}{16}=\log_2 2^{-4}$,则有 $2^N=2^{-4}$ 所以 $\log_2\frac{1}{16}=-4$

生:$\lg 100=2$(过程略)

生:$\lg 0.01=-2$(过程略)

师:从这些结果中,我们能不能发现规律,请同学们大胆猜想一下.

生:我猜想 $\log_a a^n=n$,

师:好,你能证明这个等式吗?

生:证明:令 $\log_a a^n=N$,由对数的定义,$a^n=a^N$,所以 $n=N$,所以 $\log_a a^n=n$.

师:非常好.这就是我们下面要学习的对数恒等式.

师:(板书)

对数恒等式 $\log_a a^n=n$.($a>0,a\neq1,a^n>0$)

注意:当幂的底数和对数的底数相同时,才可以用公式。(用红笔在两处 a 上描写)

师:对数恒等式的作用是化简!

师：请打开书 76 页，做练习 4。

点评：本节课教师作了比较充分的准备，教学过程条理清晰，重点突出，为学生理解和掌握知识创造了有利的条件，教师将数学史知识比较好地运用于教学，对数学文化的渗透具有一定的意义。但整节课教师都将主要精力放在知识教学上，对数学素质的培养却考虑不是很多。其实，这里首先涉及的就是对数的引入的必要性的研究，可以结合数学史对这一问题进行研究，另外这里还涉及了一个数学的基本方法，也就是符号法的作用，对数符号的引入、自然对数的底数的符号的引入都有必要向学生渗透符号思想。另外得出对数恒等式的过程比较复杂。

附录五　两角和与差的余弦教案①

一、教学内容

"两角和与差的余弦"一节，第一课时，共两课时本教案属于第一课时。

二、教学重点

公式 $C_{\alpha+\beta}$的推导。

三、教学难点

用三角函数定义来推导定理这一思想的产生。

四、教学目标

1. 使学生能导出两角和与差的余弦公式，并能直接运用这一公式解决问题；

2. 通过推导思路的形成，让学生对创新、探索的过程有所体验。

五、教学过程

1. 由简单余弦值问题推出课题

(1) 提问：请学生说出 $\cos 30°$，$\cos 45°$，$\cos 75°$，$\cos 15°$的值（$\cos 75°$，$\cos 15°$不能直接说出，除非查表）

(2) 考察角75°，15°的特殊性

(3) 问题：如何用 α,β 的三角函数表示 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 的三角函数？

(4) 书题：两角和的余弦

2. 尝试，寻求推导公式的关键

(1) 尝试 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$ 均不成立

(2) 问题的进一步提出：$\cos(\alpha+\beta)$究竟可以表示成什么样子？

(3) 初步想法：运用三角函数的定义

(4) 回顾：三角函数的定义及其在单位圆中的表示

3. 推导公式

(1) 在直角坐标系中，作单位圆（图见课本，下同）

(2) Ox 轴为始边（交圆 O 与 P_1）作角 $\alpha,\alpha+\beta$，其终边交圆 O 于 P_2,P_3。

(3) 求 $|P_1P_3|=2-\cos(\alpha+\beta)$

(4) 作角 $-\beta$，寻找与 P_1P_3 相等的弦 P_2P_4

(5) 由 $|P_1P_3|=|P_2P_4|$推出公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

① 裴光亚. 说课案例. 中学数学教与学. 2002(11).

(6) 上述公式的简记符号 $C_{\alpha+\beta}$

4. 公式的简单运用、评价、推倒过程的反思

(1) 公式的直接运用,解答引例:求 $\cos 75°$;

(2) 通过求引例 $\cos 15°$的值说明 $C_{\alpha+\beta}$中的 α,β 任意性,并由此推广到公式 $C_{\alpha-\beta}$。

5. 演板

(1) 求 $\cos 105°$;

(2) 求 $\cos \frac{\pi}{12}$;

(3) 设 $\cos \alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,求 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

6. 反思

对公式推导过程(即证明)的概括

六、布置作业

1. 课本练习

2. 如何根据公式的特征记忆 $C_{\alpha+\beta}$, $C_{\alpha-\beta}$这两个公式?

点评:教学过程比较多地运用了学生的探究,注意数学思维能力的培养。教师提出的问题有一定的靠价值,可以引导学生发现并解决问题。但内容相对较少,另外 $-\beta$ 的作出也是学生难以想到的,教师这里应该进行适当地引导。

附录六　巧证两角和公式教学片段(时间 15 分钟)

一、教学目标

(1) 帮助学生从一个新的角度认识二倍角公式并熟练地掌握二倍角公式;

(2) 通过对公式的推导,引导学生对学习过的知识点地探究,培养学生的创新意识,提高学生分析问题、解决问题的能力。

二、教学重点和难点

教学重点:(1) 三角形面积公式的巧用;(2) 从特殊三角形到一般三角形的证明。

教学难点:将抽象的二倍角公式引入到直观、形象的三角形中,并对其加以推证。

三、课型:新授课

四、讲授法、启发引导法。

五、教学过程

1. 课题引入

2. 复习终边定义法对 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的定义。

3. 公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 的推导

教师:课本上关于 $\sin(\alpha+\beta)$的证明是依据 $\cos(\alpha+\beta)$公式得到的,而 $\cos(\alpha+\beta)$公式的证明比较复杂,我们今天采用另一种比较简单的方式来直接证明公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

如图构造$\triangle ABC$,考虑$\angle BAC$为锐角的情况,设 $AB=m$, $AC=n$。AD 垂直 BC 于 D, BE 垂直 AC 于 E, $\angle BAD=\alpha$, $\angle DAC=\beta$。现考虑 $S_{\triangle ABC}$(图 9.4)。

由于
$$BE=m\sin(\alpha+\beta),$$

$$AD = m\cos\alpha = n\cos\beta,$$

$$BD = m\sin\alpha, DC = n\cos\beta.$$

所以 $$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE = \frac{1}{2}(BD + DC)\cdot AD = \frac{1}{2}BD\cdot AC + \frac{1}{2}DC\cdot AD,$$

也即 $$\frac{1}{2}n\cdot m\cdot\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}m\sin\alpha\cdot n\cos\beta + \frac{1}{2}n\sin\beta\cdot m\cos\alpha,$$

也即 $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

如图,对于$\angle BAC$为钝角的情况,也可以做类似的讨论。

(点评:这个证明只是对于三角形内的角,公式$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$成立,并未对任意角的情况进行证明,所以,只能作为公式的引出,而不能作为公式的证明。)

4. $\sin 2\alpha$公式的推证

如图构造等腰三角形$\triangle ABC$,考虑$\angle BAC$为锐角的情况,过A作AD垂直BC于D,过B作BE垂直AC于E,$\angle BAC = 2\alpha$,$AB = AC = 1$,考虑$S_{\triangle ABC}$(图9.5)。

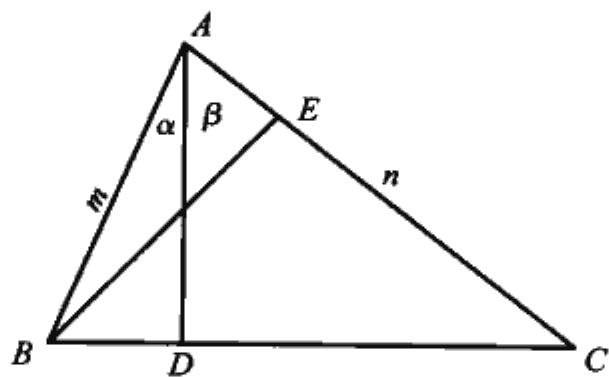


图9.4 利用三角形推导三角关系式

图9.5 利用三角形推导三角和关系式

由于$AD = \cos\alpha$,

$BD = DC = \sin\alpha, BE = \sin 2\alpha$,

有

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD = \frac{1}{2}BD\cdot AD + \frac{1}{2}\cdot DC\cdot AD,$$

即 $$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

也即 $$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

对于$\angle BAC$为钝角的情况也可以类似地证明。

点评:在教学中教师用学生比较容易接受的三角形的角和面积等特点给出了两个公式的证明,思路清晰自然,条理也清楚。但这个教学过程有一个重要的问题要引起注意,就是一般和特殊的问题,教师将一个一般的问题在特殊情况下"证明",还不能够说明公式对任意角都成立,所以,要完成证明,必须对一般角的情况展开证明。

附录七 指数函数的概念教学片段(时间15分钟)

一、教学目标

1. 理解指数函数的概念;

2. 能结合具体实例，抽象出数学模型，提升数学思维能力。

二、教学重点

1. 指数函数的概念；

2. 指数函数图像的变化趋势。

三、教学难点

指数函数模型的运用。

（点评：教学难点的表述不明确，难点突破与否难以检测）

四、教学过程

1. 导入

教师：上课前，先给大家讲一个有趣的故事——“最富有的商人和最穷的地主”

话说村子里有一个最穷的商人和一个最富有的地主，有一天商人找到地主说要和他做一个交易：在整整一个月的时间内，商人每天给地主 10 万元，而地主只要第一天给商人 2 分钱，第二天给商人 4 分钱，……，依此类推，每天给的钱数是前一天的两倍即可，地主没有多想就答应了。一个月后，事情出人意料，最穷的商人变成最富的商人，而最富的地主却变成最穷的地主。什么原因使两个人在短短的一个月中发生这么大的变化？

这是一个关于数字的问题，我们来研究。

商人和地主每天的收入状况

时间	商人	地主
第 1 天	2 分	10 万
第 2 天	4 分	10 万
第 3 天	8 分	10 万
………		
第 30 天	1 073 741 824 分（1 千多万元）	10 万

可以看出，商人在一个月的收入和远远超过地主的收入和。那么每天的收入与天次是怎样的关系呢？

我们发现商人第 x 天的收入 y 可以表示为 2^x，也就是说 $y=f(x)=2^x$，这是一个函数关系。

（教师引导学生）这一函数有什么特点？得出：(1) 都是指数幂的形式；(2) 自变量在指数的位置；(3) 底数是常数。

教师：我们就称这样的函数为指数函数（图 9.6）。

定义（教师板书）：一般的，函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)(x\in\mathbf{R})$ 叫做指数函数。

教师：学习指数函数有以下要注意的问题：

(1) 该函数的定义域是全体实数；

(2) 对底数 a 的取值有要求，即 $a>0,a\neq1$，若 $a<0,a=0$ 则对自变量的取值就会有限制，所以我们做这样的规定。

(3) 该定义是形式定义，对于函数的表达方式，强调 a^x 前的系数只能为 1；指数不能为 x 的任何代数表达式。

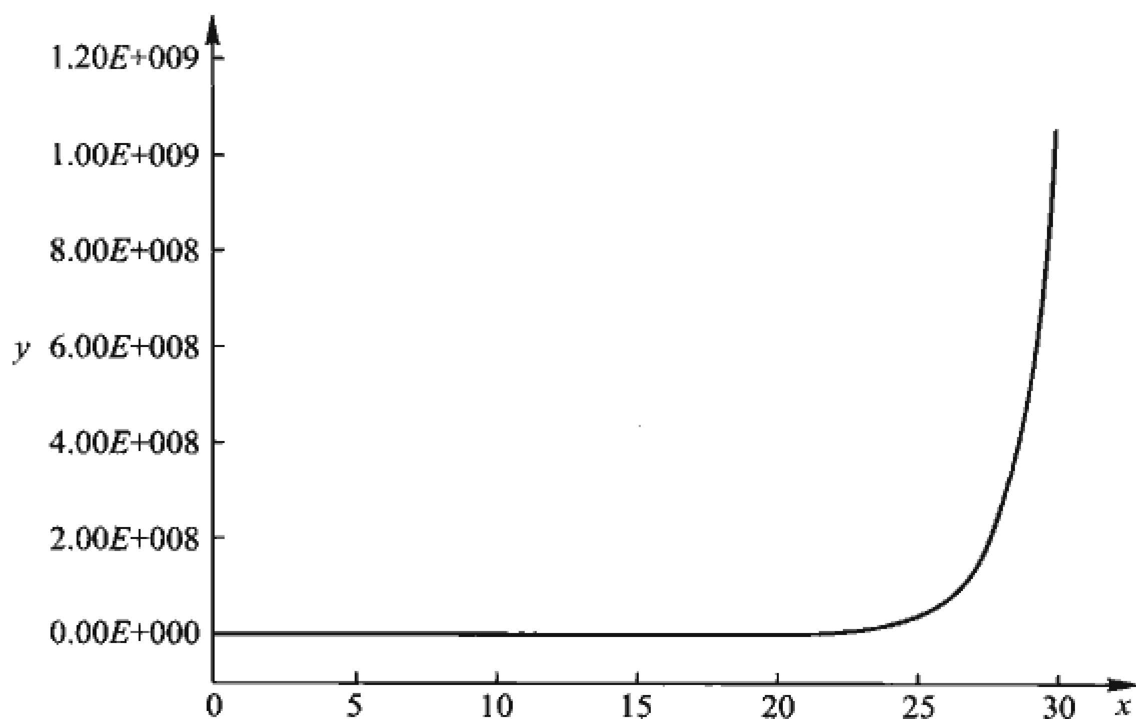


图 9.6　商人与地主的收入关系

2. 例题

下列函数是不是指数函数

(1) $y=-2^x$;(2) $y=(2a-1)^x\left(a>\dfrac{1}{2},a\neq 1\right)$;(3) $y=3^{x+1}$

结果:(1)(3) 不是;(2) 是。

(点评:教师能够通过一个故事引出指数函数的概念,为学生的学习兴趣的提高具有一定的意义。但还有一些问题需要注意。

首先,在整个教学中,应突出体现数学建模的意义和过程。提示学生注意,数学研究问题,不是针对实际问题本身进行研究的,而是必须建立一个数学模型来研究,而对模型的研究结果,还需要在实际问题中得以检验。因此,本例教师应引导学生从函数图像上,观察函数先缓慢变化而后急剧变化的特点,从而理解实际问题中为什么会出现"穷富逆转"的现象;

其次,在无足轻重的问题上没有必要给学生过多的限制,如怎样的函数才是指数函数的问题可以不反复强调,给学生留余地,养成具体问题具体分析的思维习惯。)

附录八　复数导入教学片段(时间 15 分钟)

一、课题:复数的概念(复数的导入)

二、教学目标:

1. 使学生认识并接受实数外的另一种数——虚数。

2. 使学生体会虚数产生的过程,理解数学研究问题的方法。

三、教学重点:

1. 虚数概念的引入;

2. 虚数的实、虚部构造及运算法则;

3. 学会数学从发现问题到解决问题的过程。

四、教学难点:使学生接受虚数并能进行运算。

(点评:使学生认识二元数也是教学难点。)

教学过程:

1. 介绍本部分内容的重要性

这是高中数学的重要内容之一,也是高考的重要内容。

2. 虚数的引入

(1) 提出问题

同学们先思考一个问题:已知 α 是 $x^2+x+1=0$ 的根,求 $\alpha^{14}+\frac{1}{\alpha^{14}}$的值。

(学生思考几分钟)

教师:同学们是怎么想的?

学生1:可以先求出方程的根,但是这个方程没有根。

教师:(纠正学生说法)这个方程没有实数根。

教师:我们可不可以绕开求方程的根。从另外的角度来思考。首先,α 是 $x^2+x+1=0$ 的根,那么,$\alpha^2+\alpha+1=0$。由于等于零的数乘以任何数还是零,因此$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$,也即 $\alpha^3-1=0$,从而 $\alpha^3=1$。

现在分析 $\alpha^{14}+\frac{1}{\alpha^{14}}$,

由于
$$\alpha^{14}=\alpha^{12+2}=\alpha^{12}\alpha^2=\alpha^2,$$

所以
$$\alpha^{14}+\frac{1}{\alpha^{14}}=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+\frac{\alpha}{\alpha^3}=\alpha^2+\alpha=-1.$$

(2) 产生疑问

上述过程显然每一步都有依据,因而结果是可靠的,但是为什么两个偶数幂的和是一个负数呢?

(3) 能使偶数次幂的和为负数的数肯定不是实数,这就是我们今天要学习的数——虚数。

(以下是教师给出定义并进行运算的教学)

点评:本教学过程通过一个问题使学生产生“惑”,从而引出——虚数的概念,思路是有一定创造性的。但还有一些问题需要注意。

首先,教师在得出“为什么两个偶数幂的和是一个负数呢?”后,应该将问题进一步引申。教师可以归纳上述结果得出结论:可以肯定方程 $x^2+x+1=0$ 是存在的,因为根的运算结果是一个实数;那么,根的形式会是怎样的呢?我们尝试用求根公式来求出其“根”,$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$,也就是根是具有 $a+b\sqrt{-1}$的数,其中 $a,b\in\{实数\}$。这样可以使学生认识复数的本质。

其次,应该使学生体会这种数引入的必要性,教师可以引导学生认识。$x^2+x+1=0$ 是一个简单的,而且是常见的方程,为了保证这种方程根的存在,必须使负数能够开方,或者说,使负数开平方有意义,换句话说,也就是要将数系进行扩充。

再次,应该使学生对这种数(虚数)的特点进行认识,特别是要使学生认识到这种数已经

不再能够在数轴上表示出来了，而应该在坐标平面（也就是二维空间表示出来），为用坐标或向量表示复数奠定基础；另外，这种数运算的结果可能还是实数也是其特点之一。

最后，应该使学生明确，数学研究问题时，当原来的数系不能包含某种运算结果时，总是通过扩充数系来解决问题。

附录九　听课记录及访谈

一、教学内容

指数函数、对数函数的复习课

二、教学地点

某市某重点高中一年级

教学过程

1. 复习提问

教师：指数函数、对数函数的特性由什么来决定？

学生 1. 单调、反函数。

教师：反复重复问题多遍。

学生 2. 由底来决定？（点评：总算答对了。）

教师：怎样确定？

学生 3. 分 $0<a<1$，$a>0$ 两种情况。

教师：能否根据图像来确定其性质，如定义域怎么看？

学生 4.（没能回答上教师的问题）

学生 5. 函数图像经过第一和第二象限没有间断（则定义域为全体实数）。

教师：值域怎么看？

学生 6. 看 y 轴的情况。

教师总结：学习方法存在问题，大家头脑要清晰。

2. 指数对数习题课（板书课题）

例 1　已知函数 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围。

（学生思考大概 3 分钟后，教师提问）

教师：这个函数是对数函数吗？不是，是复合函数。

学生 6：应讨论 a 的取值范围。

（教师写，学生说）

解　因为 $a>0$ 且 $a\neq 1$（教师打断，是否一定要按部就班讨论）

因为是减函数，所以内函数与外函数（的增减性）相反，因为 $2-ax$ 为减函数，所以 $y=\log_a u$ 为增函数，所以 $a>1$（教师提示还有什么要求？）。

因为 $2-ax>0$，$x\in[0,1]$ 因为恒成立，所以 $x<\dfrac{a}{2}$（教师打断：无需讨论下去，只要用函数观点讨论）

在 $x\in[0,1]$，$u=2-ax$ 的最小值为 $2-a$，所以只要 $2-a>0$，即 $a<2$，从而 $1<a<2$。

例 2　函数 $y=\log_{a^2-1}(2x+1)$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上 $y>0$，求实数 a 的取值范围。

（教师作出指数函数的基本图像，问：怎样将基本性质与本问题联系呢?）

（思考3.分钟，教师点一位同学，回答不了，点一位能回答的）

（学生说，教师写）

解 设 $u=2x+1$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 内为增函数，所以 $0<a^2-1<1$，从而求出 a 的取值范围。

例3 设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+a\cdot4^x}{3}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$，如果 $x\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)$ 有意义，求 a 的取值范围。

（教师提问：求取值范围的基本思路是什么?）

（学生：了解结构）

（教师提问：那么"有意义"的具体含义是什么? 能否重新表述?）

（学生讲，教师写）

解 $x\in(-\infty,1]$，$f(x)$ 有意义，即 $\dfrac{1+2^x+a\cdot4^x}{3}>0$，从而 $a>\dfrac{1+2^x}{4^x}=\dfrac{1}{4^x}+\dfrac{1}{2^x}$

设 $t=2^x$，从而 $1+t+at^2>0$（下课铃响）所以……（后面留给学生自己完成。教师补充，若题中 $x\in(-\infty,1]$ 改为 $x\in(-\infty,1)$，那结果又怎样?

三、课后访谈：

问1. 选题可能有一定的难度，未听懂的学生怎么办?

回答：这些题目不算难，是普通题，听不懂的学生没有办法，只有"拖着"。这主要问题是，学生应该按程度不同进行分班，这样一来就好了。

问2. 例题如果不用复合函数能怎样解?

好像只有用复合函数的方法更好一些。

问3. 复合函数在高中不作要求怎么办?

我们都要补充这部分内容。

问4. 这里涉及一些思想方法，如函数方法、重新表述问题的方法? 需要给学生介绍这些方法吗?

一般结合题目来讲就可以了，没有必要单独介绍思想方法。

点评：该教师具有娴熟的教学基本技能，对高中的问题研究很深刻，也能够在教学中引发学生积极主动的思维。但是，教师在教学中，将目标锁住少部分成绩比较好的学生，而从教学来看许多学生是难以跟上教师的教学进度的。另外，教师在教学中，比较注意解题技巧的教学，而对于思想方法的教学就注意不够了。

10

第10章 数学教育评价

数学教育评价在数学教育中具有十分重要的意义,对数学教学起着一个导向的作用,或者说决定了教学的主要方向,如目前由于只有高考这一单一的评价方式,在很大程度上就导致了教学的应试教育现象。所以,运用好数学评价这一手段,对促进数学教育的健康发展是有益的,目前应该发挥好教学评价的导向作用,使评价真正促进教学朝素质教育的方向发展。

新课程开设以来,其评价一直处于相对滞后的状态,影响了新课程整体育人的功能,没有评价标准,课堂教学就失去了评价参照系。很多教师将自己的评价工作局限在对学生的测评上。他们误认为课堂教学、教师、学校组织等方面的评价应由教育行政管理人员来进行。实际上,教师不仅需要通过评价学生学业来了解教学是否取得了预期的结果,还需要查明自己的教学是否优于其他教学系统或是否存在有待完善之处,教师需要重视对教学过程的评价。

数学教育评价从整体上可以分为对教师课堂教学的评价和对学生学习结果的评价,一般的说,教育评价的方式有定性评价、定量评价、定量与定性相结合的评价等,本章我们重点讨论用评价方法对前述两个方面的评价。

10.1 对教师课堂教学的评价

10.1.1 定性评价

所谓定性评价,是对数学教育评价的内容,通过观察法、调查法等收集的数学教育的信息,筛选出集中趋势的判断,舍弃非本质的离散的现象,对事物本质进行决策性断定。

使用定性型评价最重要的一点就是要消除主观因素的干扰,为此,可以采用以下几点做法。

1. 组织专家评价组

为了尽量消除主观因素对评价的影响,专家组可以从学校外聘请,专家的选择也可以考虑各方面因素的协调搭配。

2. 确定评价标准

评价标准应具备以下特点。

(1) 时代性。也就是说评价必须反映时代对数学教育的要求和社会发展对数学教育的要求，对一些具有新的创新的教学应给予足够的重视；

(2) 功能性。要充分发挥评价对数学教育促进作用和导向作用；

(3) 适应性。要考虑评价对象的各种情况，使所制定的评价标准适合于评价对象，标准过高和过低都不符合适应性的要求；

(4) 预见性。必须掌握未来的发展方向，应将评价的短期效应和长期效应结合起来。

3. 依据评价标准收集信息资料

如对数学课评价的标准，可以从教学目的、教学内容、教学方法、教学手段、教学效果等五个方面制定细则，那么，在课堂上就要从上面的五个要求去有目的的收集资料。

4. 集体研究评价项目达标程度

为了保证评价的客观公正和评价结果对教学的积极作用，应该采用对信息进行集体讨论的方式确定评价对象各个项目的达标程度。

5. 定性描述

用语言对评价结果进行描述，在描述时应注意不要带有主观意向，应该尽可能做到客观公正。

10.1.2 对教师教学的评价的原则

对教师教学的评价主要是对课堂教学的评价，也就是通常说的评课。

评课，具有十分普遍和重要的意义。比如，对教师来讲，它是自身专业成长和发展的重要途径；对学校领导来讲，它是评价教师的有效手段；对研究者来讲，它又是收集事实资料的主要方法。同时我们又看到，上述各种评价的目的是不尽相同的，有的是为了"甄别"和"选拔"，有的是为了"诊断"和"激励"，还有的是为了"改进"和"发展"等。由于评课目的不同，评课的侧重点、评价的指标体系乃至评价的方法随之也有所不同。尽管如此，无论何种目的的评课，还是要遵循一定的基本原则和基本思想。

评课原则

(1) 目的与手段相一致原则

对每一堂课，我们首先要考察教师是否预设了合适的、明确的、具体的教学目标；与此同时，在评课时，我们还要关注"教师是否重视了'生成性'目标"。课堂是具体的、多变的、情景性的，学生在这一环境中可能会由于受到某一信息的"刺激"，产生一些教师事先没有、也不可能预设的结果，比如它可以是教师在讲解例题时学生提出的一种教师没有见过的新解法，也可以是学生在解题中所产生的一种新的体验，等等；在课堂教学中所产生的这些"副产品"(后现代主义之

为“生成性目标”），它实际上是一种“功能性目标”，对学生的发展有着直接的作用甚至具有重大的意义，比如它可能会增强学生学习的兴趣，可能会提高学生学习的自信心，甚至还可能会改变一个学生对学科的态度。所以我们对课堂教学目标的考察，不仅要关注预设目标，也要重视一些非预设目标，这是一个方面；另一个方面，设定目标是为了实现这一目标，而对于目标的实现，手段至关重要。在课堂上我们的教师会运用各种各样的教学“手段”，也要采取各种各样的、丰富多彩的教学行为。评价一堂课就要观察教师的“手段”、“行为”是否是指向目标、为了实现目标服务的？否则纯粹意义上的“手段”和“行为”是没有任何价值的。因此，我们对课堂上教师的言语、行为、教态、表情以及各种手段的运用，乃至一些师生互动（如提问、小组讨论等）等方面的考察，既要关注它们本身的性质和特点，更需要关注它们对目标达成的有效性和功能价值。也就是说是否符合目的与手段相一致原则。

（2）观念与行为相协调原则

从教师行为所依托的依据和基础来思考，教学需要遵循“观念与行为相协调原则”。教师对儿童发展、教育教学等相关问题具有自己的认识和看法，这些基本的“认识和看法”就构成了教师的教育观念。在教育实践中，教师的教育观念与教育行为的关系比较复杂，虽然有人认为教师的教育观念与教育行为之间并不存在显著相关，教育观念在教师作出判断、决策和教育行为中所起的作用是微弱的，教师在更多时候是依据个人的经验、直觉甚至冲动等来作出相应的教育行为。显然这种观点不是一点道理都没有，因为教师在进行教育行为的决策时，要受到许多的因素（如教师个人的主观因素，学生特征、课堂情景等客观因素的影响），但是我们认为教育观念对教育行为要起主要作用，甚至起决定性的作用；教师在教育实际中常常是自觉或不自觉地运用已有的、自己的对教育的认识和看法。这也就是说，教育观念与教育行为是一致的，观念是行为的内在依据，行为是观念、认识的外部表现。

与此相关联的，还需要特别提到教育理论与实践这一问题。教师应该是把握并自觉运用教育理论的人，一切有效的教育教学实践需要有有效的理论作支撑、作指导，这里强调的教育理论对实践的指导，可能更多的是表现为有效性问题，这种有效的教育理论被英国教育家丹尼斯劳描述为：“它的关于教育目的的假定是在道德上可以接受的，它的关于儿童的假定是正确的和能核实的，它的关于知识的假定在哲学上是值得尊重的，以及它的关于方法的有效性是证实了的。”由此我们认为在评课中要关注教师的教育观念与教育行为的一致性，要关注教师设计教学的理论依据以及教师运用教育理论的意识和水平 。

（3）效果与效率相统一原则

从教师的行为所产生的结果方面，我们应提出“效果与效率相统一”这一原则。这里的效果与效率并不是同一个概念，通常教师比较重视教学效率，在教学设计和实施中，把追求“高效”作为至上的标准，比如：在课堂上尽可能使学生掌握更多的知识，以最快的速度做尽可能多的训练与练习，大批量的、高频率的提问等。然而这些行为的实际结果有时是低效甚至是无效的。

如在数学课堂提问中，教师常常是为了提问而提问，这就势必造成提问时目的不明确，且强调知识的覆盖面，记忆水平的问题居多，从而忽视学生的思维过程，忽视学生的个体差异，不给学生留有思考的余地，追求同一的标准答案等，显然这些提问不一定是高效的。

对教育行为，尤其是教师的行为，更加要强调的应该是它的有效性而不完全是为了“高效率”，比如，在一些“研究性”、“发现性”课堂上，学生一堂课下来表面上很可能没有学到什么知识和技能，甚至预设的教学任务都没有完成，显然如果按照传统的观点，这堂课是很糟糕的，但是实际上这堂课可能对学生的发展具有重要意义，因而是有效的；还比如：教师的提问应该对学生发展和学生主体的建构以及课堂气氛的形成是有效的；教师的讲授应该对学生理解和掌握知识是有效的；教师运用多媒体等现代化教学手段应该对学生理解知识的发生发展过程是有效的；等等。所以一切教育行为只有在对学生的发展和课堂生活的建构有效的基础上追求高效，它才有价值。

（4）量的方法与质的方法相结合原则

从研究教师的观念、行为以及结果的方法角度我们应提出“量的方法与质的方法相结合”这一原则。过去我们评课比较常用的方法是事先制订一个详细的“评价标准”，然后由评课人通过听课之后分别给被评价教师“打分”，最后对每人所评分数进行数学处理，处理的方法比较简单的就是加权平均，复杂一点的就是模糊综合评价模型，这就是所谓的“定量评价”。这种量化的方法，说它“客观”，主要是因为处理数据的方法比较科学。其实，它并非“客观”，因为“评价标准”和“打分”本身还是主观的，同时它的结果的说明和解释通常也比较简单。所以我们主张还要重视质的研究，要加强对教师的观念、行为的深度分析、理解和解释性研究。这种质的方法，强调的是通过研究者与教师之间的互动，并使研究者获得对教师所进行的教学活动的体验。在收集资料的方法上，除了听课进行现场观察和技术分析外，还需要课前、课后的访谈与研讨、对教案或其他实物作品以及学生的作业的分析。对资料的分析与整理以及理论建构，主要是采用归纳的方法，最后追求的是对教师行为及其意义的一种合理解释。

10.1.3 评课提纲

目前对教师的评价体系正在探索之中，这里介绍两种课堂教学的评价方案。这两种方案有共同之处，也有不同之处。

第一种方案是依据活动理论和实践哲学来分析，认为教学活动中存在有三种亚活动，即教师的教、学生的学以及教师与学生之间的交往活动。教师与学生分别是前两种活动的主体，而在后一种活动中教师与学生这两个都是主体，即双主体，因而认为对教师的评价也应该从这三个方面进行。

1. 教师维度

教师在教的活动中，其主要任务是对教育对象、教学过程、教学目标的认识，对教学内容的把握和呈现，对课堂有序运行的建构、组织和调控，因此对教师的教的评价主要包括：

(1) 教师是否有明晰的教育观念

在前面我们重点强调了教师的教育行为与他的教育观念之间的相互一致关系，在实施评价时，我们不仅可以通过访谈了解到教师的教育观念情况，从教师的教学设计和课堂实践中也能反映出来教师的观念，比如课堂整体设计、课堂提问、呈现问题的方式、对学生学习效果的评价、师生关系等都可以反映教师的观念。具体地说，对教师的教育观念的考察，我们可以从以下几个方面进行。

第一是其学生观，也就是对学生的理解和认识，如是将学生看成合作伙伴，还是单纯将学生看成接受知识的未成年人；

第二是其学习观，也就是教师对学习的认识，如是将学习看成是知识的探究过程，还是将学习看成是知识的传授过程；

第三是其教学观，也就是对教学的认识，如是将教学看成是单向的知识传递过程，还是将教学看成是教师与学生的合作研究的过程；

第四是其课程观，也就是对课程的认识，如是将课程看成是由专家制定、教师完成和学生接受的知识，还是将课程看成是由专家、教师、学生共同创造的知识；

第五是其评价观，也就是对教与学的结果和过程的看法，如是将评价看成是一种对教育学具有促进作用的活动，还是将评价看成是对教与学的结果的最终判定。

(2) 教学设计是否运用了有效的教育理论

关于教育理论与教师的教学实践的关系，我们在前面中也重点作了解释，同样地我们对教师的设计和实践过程中所蕴涵的教育理论也是可以进行评价的，比如在课堂上可以分析出，学生的学习是机械学习还是有意义学习，是奥苏贝尔

的有意义同化学习理论还是人本主义的有意义学习理论。对教师的教育理论的运用情况可以通过访谈等方式从以下几个方面考察。

第一是教师对教学理论的掌握情况；

第二是教师对学习理论的掌握情况；

第三是教师对课程理论的掌握情况。

(3) 教师的行为是否合目的性

对教师行为的目的性考察，过去存在一个很大的误区，那就是只指向教学目标(通常指学生的发展目标)，其实教师的教学行为不能仅指向教学目标的，它还应该指向问题情景的生成，指向学生主体的建构，指向具有生命活力的课堂生活的建构与生成，所以对教师教育行为考察的重点应该是以下几个方面。

第一是教师的教学行为是否有利于学生主体的建构；

第二是教师的教学行为是否有利于课堂活动的生成；

第三是教师的教学行为是否有利于教学目标的达成。

(4) 课堂管理是否得当

情景化、多变性的课堂，教师与学生之间的多元双向互动，问题和目标的不断生成，都需要科学的组织和管理，尤其是课堂时间的合理安排和有效利用，教师的语言艺术、组织艺术、调控艺术、应变能力、教育智慧等在这里需要得以充分的展示，所以对教师的课堂管理情况可以从以下几个方面来重点考察。

第一是时间安排是否合理；

第二是时间是否得到充分利用；

第三是课堂问题行为是否得到有效调控。

2. 学生维度

由于教师教学的对象是学生，学生在课堂教学中的学习活动，体现了教师的教学状况，所以对教师教学的评价也应从学生纬度来考虑。对学生和学习的评价主要包括以下几个方面。

(1) 学生是否获得了应有的发展

这里对教学目标的达成，强调的是发展性，比如对于知识不仅要求它本身有发展性(如数学思想方法等程序性知识就是具有发展性的知识)，而且还要求知识的学习过程也具有发展性。同时在重视发展的全面性的基础上，更加强调发展的充分性和自由性，要求学生在原有的认知、各种倾向性、各种品质的基础上，根据自己的潜能和个性特点各自获得最大限度的发展，所以评价时重点考查学生以下几个方面。

第一是发展的全面性；

第二是发展的充分性；

第三是发展的自由性。

(2)学生是否是真正的主体

学生能获得应有的、充分的发展,关键在于学生不是被动学习、强迫学习、机械学习,而是自己在主动学习,学习有兴趣并由内部诱因引发,主动联结已有的知识,积极思考,深入探究,手脑并用,情绪兴奋,克服困难,所以评价时重点要考查学生以下几个方面。

第一是学生是否积极参与了教学活动;

第二是学生的学习活动是否自主活动;

第三是学生是否全身心投入学习活动。

(3)学生的活动是否处于自我意识水平

学生的学习不仅要求是自觉主动学习,更加重要的是要求学生能够意识到自己的学习,把自己的学习过程作为认识的对象,实行自我监控,并及时做出评价和调整,从而学会学习。比如学生在解题过程中,解题方法和策略的选择和运用,要在自我意识水平上进行,解题之后还要有回顾和反思,所以重点要考察从以下几个方面来考察学生的学习活动是否处于自我意识状态。

第一是在学习过程中,学生是否能进行自我调控;

第二是学生对自己的学习过程能否进行自我评价。

3. 教师与学生互动维度

在数学教学活动中,不仅存在有教师的教和学生的学这两种主客体间的对象性活动,还存在一种人与外部的关系不是对象性关系,而是一种意义关系,即存在一种意义活动。在这种意义活动中,教师与学生之间处于一种人格平等的“主—主”关系或“我—你”关系,教学也就成为教师与学生间的平等对话,成为教师与学生间的相互作用和影响,所以从师生互动角度的评价主要包括以下几个方面。

第一是师生之间是否有互动。在教师与学生之间进行的授—受过程实际上就是一种互动,除此而外,师生、生师之间的提问与对话,生生间的合作学习、师生间的研讨、师生间的评价等都应是互动的;对于师生或生生之间的双向互动,需要强调的它应是一个优势互补、资源共享、相互讨论、共同提高的过程,而不是一个虚假的表面形式,所以我们注重考察课堂互动的多元性、双向性、流畅性、实质性。

第二是师生关系是否恰当。师生关系在我国一直比较“紧张”,学生害怕见到教师、只有学生尊重教师而教师可以不尊重学生、教师总是“高高在上”、总是“权威”,在课堂上师生之间很生硬、很僵化、不协调,这些现象依然还在部分学校存在,极大地影响着学生主体性的生成和张扬,制约着学生个性的健康发展,压抑着学生创造力的成长和发挥,所以要着重考察师生关系的平等性、民主性、

亲和性。

第三是对教学过程的监控是否有效。教师作为课堂的组织者和指导者，要及时、全面地了解学生的学习和活动以及各种变化情况，同时学生也要知道教师的一些想法和相关信息，因此师生之间要不断地有反馈、有信息交流，师生共同维持课堂有序的展开和持续，所以要考察反馈是否及时、评价是否恰当、调整是否合理。

第四是课堂气氛是否具有生命意义。课堂作为师生交往、交流、对话乃至生活的场所，要关注学生、教师的生命的延续和生长发展，课堂要对学生具有吸引力，是学生向往的地方，学生在课堂上能够得到充分的展示和自由的发挥，能够享受到成功的喜悦、体验到生命的活力和人生的价值，所以要着重考察课堂气氛的和谐性、愉悦性、积极性、生成性。

第二种方案是从三个维度构建的课堂教学评价模型：即维度一：X 教学计划方案评价；维度二：Y 教学指导过程评价；维度三：Z 教学指导效果评价[①]。

1. 维度一：X 教学计划方案的评价

教学计划方案的评价是对课堂教学指导方案和教学内容的设计，在多大程度上与教育基本理念和教学目标和要求相一致来进行评价。它包括以下内容。

(1) X_1 教学内容设计的科学性

教学方案设计和教学内容的选定是否依据了科学的原理原则。这里既包括教学内容本身是否具有一定科学性、知识性；同时教学过程的逻辑顺序是否与学生的身体发展和心理发展顺序相一致。

(2) X_2 教学内容设计的教育性

教学内容的选定是否具有一定的教育性和思想性。这里既包括教学内容是否有利于培养学生思想品德素养，同时教学中是否能陶冶学生的情操、愉悦学生的身心、拓展学生的知识、发展学生个性。

(3) X_3 教学内容设计的合理性

教学方案设计和教学内容的选定是否遵循了合理性原则。这里既包括教学计划所提出的各项指导目标是否与新课程教育目标相符合，内容的选定与教学计划是否密切联系形成有机的整体；同时内容的选定与教学计划是否考虑到每一个学生的需要。

(4) X_4 教学内容设计的实践性

教学方案设计和教学内容的选定是否遵循了实践性原则。这里既包括教学内容是否有一定的实践基础，同时教学计划中是否考虑到给每个学生以自主活动和动手操作机会。

---

① http://www.ls910.com

(5) X_5 教学内容设计的趣味性

教学方案设计和教学内容的选定是否具有一定趣味性，这里既包括教学内容安排上具有科学性、教育性、知识性的同时还要具有一定趣味性，能最大限度吸引学生参与活动，培养学生学习兴趣。

(6) X_6 教学计划实施的可行性

教学方案设计和教学内容的选定是否遵循了可行性原则。这里既包括教学内容是否在国家统一要求基础上考虑了地方、学校、学生的实际情况；同时教学中是否为学生的自主活动准备了必要的材料和活动场地保证教学按计划开展。

(7) X_7 教学内容设计的一致性和连贯性

教学内容的设计应贯彻统一原则。不管其按照“阶梯式”还是“螺旋式”都应遵循从易到难、从简到繁、从形象思维到逻辑思维的过程，注意情节的过渡和知识体系的统一。

(8) X_8 教学内容设计的现实性

教学内容的设计应具有时代的特点，将科学研究的最新成果展现给学生，让学生了解本学科的最新发展状况。

2. 维度二 :Y 教学指导过程的评价

教学指导过程评价主要考察教师的指导和教学的方法是否适当，是否有利于教学目标的实现。教学指导过程的特征评价应考察以下五个方面。

(1) Y_1 教学过程的自主性

教学指导过程是否体现了自主性特征。这里不仅要求整个教学的指导围绕着发展学生个性，培养自主能力这一重要的教学目标；同时在教学过程中既考虑学生的兴趣需要，又注意到学生的个别差异，鼓励学生自主活动、操作、体验，学生积极参与活动的兴趣浓厚。

(2) Y_2 教学过程的实践性

教学指导过程是否体现了实践性特征。这里不仅要求整个教学的指导重视学生实践能力的培养，能促进体脑合一，知行统一，教师在教学过程中起示范指导作用而不是越俎代庖；同时在教学过程中为学生的实际操作活动提供充足时间，学生参与实践活动态度认真，积极主动。

(3) Y_3 教学过程的开放性

教学指导过程是否体现了开放性特征。这里不仅要求活动时间充分、活动空间广阔，学生之间、师生之间交往广泛、融洽。同时在教学过程中对活动要求有弹性，尊重个别差异的存在，能根据学生的活动表现及需要适时调整教学计划及进程，对学生限制、约束、控制较少，活动气氛民主活跃。

(4) Y_4 教学过程的整体性

教学指导过程是否体现了整体性特征。这里不仅要求整个教学指导方法与教学内容和谐统一,在教学过程中注重学生个体差异与发展的同时关注整体效果,使全体学生在认知、技能、情感多领域获得收获。

(5) Y_5 教学过程的创造性

教学指导过程是否体现了创造性特征。这里不仅要求教学内容具有创新,指导方法有利于培养学生创造能力。同时在教学过程中注意培养学生的求异思维,鼓励学生表现自己的独到见解和独特的思维方式,乐于创新,敢于质疑,有创造性教学成果。

(6) Y_6 教学过程的教育性

教学指导过程是否体现了教育性特征。这里不仅要求教学过程生动活泼、求实、求真;同时整个教学过程能体现出团结友爱,和谐文明的团队精神和合作意识。让学生学会学习、学会交往、学会生活、学会生存。

3. 维度三:Z 教学指导效果评价

最终能直接证明课堂教学的价值是教学活动开展后所产生的效果,包括一系列价值事实,其中有的是教学计划设计的预期效果,有的是教学实施过程中产生的非预期效果。教学指导效果既有教学开展后对于学生个体的思想道德、科学文化、身体心理、劳动技能的发展所产生的影响,也有教学开展后对于学生团体、班级的进步所产生的作用。主要包括以下几个方面。

(1) Z_1 集体进步效果

集体进步效果主要表现在直接效果和间接效果上,直接效果指教学活动开展后对于学生团体、班级的进步是否产生一定的作用,是否达到教学计划设计的整体预期效果,是否产生的非预期效果。间接效果指教学活动开展后是否有利于学生整体精神面貌的改观,是否有利于学生团体凝聚力的加强。

(2) Z_2 学生个体发展效果

学生个体发展效果主要表现在,既要有利于学生拓宽知识面,又能让学生在教学活动中受到思想道德教育。既要培养学生技能,又要有利于学生身心健康发展。既要注重教学活动的直接效果,学生乐于"发表"和"表现"、敢于"标新立异"、有创造成果,又要关注间接效果,所开展的教学活动有利于学生个性发展。

(3) Z_3 学生发展的外显性效果

外显性效果是指学生通过教学活动所产生的效果显而易见,有明确的指标参照系,效果直接,便于量比。外显性效果多用于课程学习的知识性评价,借助一定的手段和方法,易于操作,可测性强。

课堂观察表

序号	项目	分值	具体内容	各等级分值			总分
				1	2	3	
1	教学目的	28	教学目的明确，并能围绕教学目的开展教学	8	6	5	
			教学目的全面，并重点突出	6	4	3	
			教学目的具有弹性，具有层次性	6	4	3	
			教学目的切实可行，符合学生的实际	8	6	5	
2	教学过程与方法	30	整体设计合理，重点突出，抓住关键，突破难点	8	7	6	
			教学环节紧凑，节奏适度，反映及时，应变能力强	7	6	5	
			教学形式、方法、手段的选择和使用符合教学内容和学生特点	7	6	5	
			启发思维，重视学法，培养能力	8	7	6	
3	教师基本素养	18	语言清晰、流畅、精炼、准确	6	5	4	
			教态亲切自然，师生关系平等和睦，配合默契	6	5	4	
			演示操作熟练规范，板书、图示设计合理，字迹工整、规范、美观	6	5	4	
4	教学效果	16	完成教学任务，双基得以落实，能力得以提高，情操得以陶冶	6	5	4	
			学生能围绕教师的安排开展活动，注意力集中	6	5	4	
			学生在教师的启发下，能有所创造（如有新颖的解题方式，或对某一证明提出独到见解）	4	3	2	
5	教学特色	8	导入课题新颖，能吸引学生的注意力	3	2	1	
			教学形式新颖	3	2	1	
			处理课堂偶发事件方式独特并取得意外效果	2	2	0	

(4) Z_4 学生成长的内隐性效果

内隐性效果是相对于外显性效果而言，指教育、教学活动所产生的效果不易发现，有隐蔽性特征。其表现为：周期长，不外露，着重内心的演练与修养，可测性不强等。学生日常行为规范的养成优良个性品质的塑造，坚强意志的培养等无一不渗透出内隐性特点。因此加强教师师德建设、重视校园文化，崇尚人文精神等对学生内隐性效果的实现起到潜移默化的作风。

上面提供一个课堂观察表，供听课时参考。

10.2 对学生学习状况的评价

基础教育课程改革主张改变课程评价过分强调甄别与选拔的功能，发挥评价促进学生发展、教师提高和改进教学实践的功能。对学生的评价也由原来只注重结果的评价方式发展为既注意结果，又注意过程的评价方式。

10.2.1 对学习的评价

对学习的评价取决于人们对知识和学习的看法。一般认为，历史上教育心理学围绕评价出现了三种理论思潮，分别是行为主义、认知主义和情境主义。这三种思潮对知识与学习的看法不同，因而导致对评价的看法也不同。

行为主义认为，知识就是信息和技能的积累，该学派强调学生的学习结果是外显的、可观察的，忽视意识和内部心理过程的存在。因此，行为主义主张测验外显行为来证明学生已具有的信息和技能数量，学生在测验中的成绩就反映了他们的学习结果。学习必然引起行为的变化，因此，这种测量的方法具有一定的价值。但是学习也将引起行为潜能的变化，而这就不容易通过测验外显行为来达到评价的目的。建立在行为主义理论基础上的客观测验具有编写容易、测量客观、评分迅速等优点，但客观测验不能测量出学生解决复杂问题的步骤、与他人合作的表现等方面的情况。

认知主义评估个体的认知结构和这些结构的发展与形成。20 世纪 80 年代，适合于复杂任务测试的论文型测试、课堂研讨等表现性评估得到发展。表现性评估用档案袋记录学生在解决复杂问题过程中的加工过程，这种评估反映了认知主义测量观对内部心理过程和结构的重视。但表现评估主观性强、耗时长、类推难等缺点在很大程度上影响了它的使用。

情境主义将知识看成参与社会实践的能力，因此测评重视评价任务的情境和学生参与活动的质量和能力。情境主义认为，知识是具有情境性的，若测试情境发生变化，则测试出的学习结果也不同。情境主义测评个体的探究实践和社会活动的参与性，认为应根据个体在有意义的探究任务情境下的活动进行评价。

同时该测评观要求改变以往教师是评价主体,学生是评价客体的观点,要求学生也参与评价标准的制定和判断。

教育心理学的三种主要理论流派对知识、学习的理解不同,决定了它们在测量和评价的对象、内容、方法等方面的差异。教师应针对课程目标,从学生的实际出发,将各测评方法灵活运用于教学活动之中。

现代社会对人的发展的要求引起评价体系的深刻变化,中学数学课程应建立合理、科学的评价体系,包括评价理念、评价内容、评价形式和评价体制等方面。评价既要关注学生数学学习的结果,也要关注他们数学学习的过程;既要关注学生数学学习的水平,也要关注他们在数学活动中所表现出来的情感态度的变化。在数学教育中,评价应建立多元化的目标,关注学生个性与潜能的发展。例如,过程性评价应关注对学生理解数学概念、数学思想等过程的评价,关注对学生数学地提出、分析、解决问题等过程的评价,以及在过程中表现出来的与人合作的态度、表达与交流的意识和探索的精神。对于数学探究、数学建模等学习活动,要建立相应的过程评价内容和方法。

10.2.2 定量评价

所谓定量评价,是指对数学教育被评价的内容,通过教育测量、统计等方法与手段,收集数据材料,进行定量分析、处理,找到集中趋势的量化指标和离散度,给出综合性定量描述与判断。

这里提供几种常用的定量分析方法。

1. 集中量数

描述集中趋势的量有平均数、中位数、众数等。

(1) 平均数

平均数一般有算术平均数和加权平均数,重点介绍加权平均数。

班　　级	班级人数	每班平均分
1	52	88.6
2	58	82.5
3	46	70.8
4	56	90.7
5	42	61.2

问年级平均分是多少?

如用简单平均数计算则结果为78.76;

用加权平均数计算

$$\frac{52\times88.6+58\times82.5+46\times70.8+56\times90.7+42\times61.2}{52+58+46+56+42}\approx79.92.$$

可见用算术平均数会产生负偏差:78.76 - 79.92 = -1.16,造成负偏差的原因是忽视了权数。

又如评价一个学生仅仅用一次考试的成绩是不准确的,因此我们一般也用加权平均数来给出其成绩,如平时成绩 10%,高一考试成绩 20%,高二考试成 15%,高三上学期考试成绩 10%,高三毕业考试成绩 45%,如某学生成绩如下:

被评	平时	高一	高二	高三上	高三毕业
某学生	98	92	84	80	75

该学生的平均成绩为

$$\bar{x}=\frac{10\%\times 98+20\%\times 92+15\%\times 84+10\%\times 80+45\%\times 75}{10\%+20\%+15\%+10\%+45\%}=82.55.$$

(2) 中位数

在一组有序的数据中,居于中间的位置的那个数值叫做中位数,用符号 *Mnd* 表示。求一组数的中位数时,必须把这组数据从小到大依此排列起来,然后找出中点位置所对应的数值。若数据个数是奇数,则$\frac{n+1}{2}$位置所对应的那个数就是这组数的中位数;若数据个数是偶数,则居于中间位置所对应的两个数的算术平均数就是这偶数个数据的中位数。

如果已知一组分组统计的数据,怎样求它的中位数?可以使用观察法和计算法。

例如,统计 80 名学生数学毕业考试分段成绩的中位数,观察下表:

分　组	组中值	次数	向上累计次数
90—94	92	1	80
85—89	87	2	79
80—84	82	5	77
75—79	77	18	72
70—74	72	22	54
65—69	67	14	32
60—64	62	12	18
55—59	57	5	6
50—54	52	1	1
合计		80	

用观察法可知，中间组是 70—74，这组的中值数是 72，于是，估计这次考试的数学成绩的中位数是 72 分。

用计算法如下。

我们用 L_b 表示中位数所在的组的精确下限，用 F_b 表示中位数所在的组的下一组的向上累积次数，用 f 表示中位数对应的次数，i 表示组距，N 表示数据数，那么，有中位数计算公式：

$$Mnd = L_b + \left(\frac{N}{2} - F_b\right) \cdot \frac{i}{f}.$$

按这个公式分步计算上页表分数的中位数：

首先，确定中位数在第$\frac{N}{2}$对应的位置的数据组，即第$\frac{80}{2}=40$ 次，再由累积次数可知，第 40 次包含在向上累积次数是 70—74 的组，这样就选定了中位数所在的组。

其次，确定中位数在这个组的具体位置。

由于中位数所在组的下一组向上累积次数是 32，所以 $F_b=32$，计算$\frac{N}{2}-F_b=40-32=8$，说明中位数在该组中的第 8 次位置上。

第三，计算中位数

为了方便，不妨设中位数所在组的数据是均匀分布的，它所对应的最高次数 $f=22$，组距 $i=54-50+1=5$，公式中$\frac{i}{f}=\frac{5}{22}$表明中位数所在组每一次所对应的组距的大小，而中位数在 第$\frac{N}{2}-F_b$ 位置上，取 $L_b=69.5$，因此

$$\begin{aligned} Mnd &= L_b + \left(\frac{N}{2} - F_b\right) \cdot \frac{i}{f} \\ &= 69.5 + (40-32) \cdot \frac{5}{22} \approx 71.32. \end{aligned}$$

这个数比观察法估计的 72 更精确。

(3) 众数

众数也是表示集中趋势的数据，它指在一组数据中出现次数最多的那个数，用符号 M_0 表示。

在一组数据中，出现次数最多的数据可能不止一个，若几个数据出现次数一样且最多，则都称为众数。

在一组数据中若无重复出现的数据，则这组数据无众数，无众数的一组数据称为散数据，显然数据没有集中趋势。

对分组数据如果用观察法，不能直接观察得到众数，那么我们可以使用近似

计算的方法求众数的近似值。这里介绍皮尔逊(Pearson K)的经验法。

统计学家皮尔逊凭借他自己多年来研究的经验,得出了皮尔逊经验公式:

$$M_0 = 3Mnd - 2\bar{x}（其中 \bar{x} 为平均数）$$

2. 差异量数

在信息收集的统计数据中,除了表现出数据的集中趋势,还有离中趋势,这是数据分散程度的表现。一般的说.描述数据的离散程度的量数叫差异量数.

差异量数与集中量数一样,用来量化评价被考察的事物与对象。

例如,A,B 两个班级数学考试成绩,A 班的平均分为 82 分,B 班的平均分也为 82 分,用表示集中趋势的量无法区分这两个班的考试情况。实际上 A 班的最高分为 98 分,最低分数为 68 分,B 班最高分数为 99 分,最低分数为 54 分,显然两个班的离散程度不同,学习的稳定程度也不一样。这就说明,仅用集中量数描述一组数据,还不能全面评价一个事物。有了差异量数,从另一方面反映数据的情况,就可以弥补集中量数的不足。

这里介绍几个差异量数的计算方法.

(1) 方差和标准差

方差和标准差是重要而又是常用的差异量数。一般的说,一组观测值各数据与该数据平均数之差的平方的平均数叫方差,用 σ^2 表示。

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}.$$

方差由于有平方,使用时有时不方便,因此更常用标准差的概念.一组数据的标准差为其方差的算术平方根,用 σ 表示。

一般情况下,标准差用具有统计功能的计算器来计算.

(2) 标准分数

在不同的考试中,由于考试的内容不同,题目的难度不同,使得学生获得的分数无法进行比较,这种现象叫不可比较。要评价学生在不同时期的学习情况,使各次考试由不可比较,变得可比较,这就需要将百分制分数化成标准分数,简称标准分。

标准分是一种以标准差为单位的量数,因此将标准分归结为差异量数。

标准分定义为某次考试的原始分与参加考试全体的平均分之差除以这次考试的标准差所得的商。

$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} + \lambda$,λ 为常数,它作为修正值在运算中调整数值。

如一个考生的原始分数是 57 分,他所在的班级的平均分是 76 分,标准差是 2.84,如果没有 λ 值作调整,那么这个学生的标准分就出现负值.即

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{57 - 76}{2.84} = -6.69.$$

在这种情况下 λ 就起到转负为正的作用.取 $\lambda=60$,则标准分为53.31分。

λ 值还可以用在调整不同学科考试不同时期的比较上。例如,第二学期考试的题目比第一学期的题目难,那么,在第二学期考试分数换算成标准分时,λ 取值就应高于第一学期换算标准分数的 λ 值,这样才能表现学生学习成绩上升或下降的状态。

标准分在教学评价中具有较广泛的应用价值。标准分可以比较合理地比较学生的成绩。

例如,某学生两次数学考试成绩是,期中考试80分,全班平均分82分,全班标准差6.2,期末考试78分,全班平均分75分,标准差6.5分.问这个学生的数学成绩是提高了还是降低了.

期中考试 $$Z=\frac{80-82}{6.2}\approx-0.32,$$

取 $\lambda=50, Z=50-0.32=49.68$,

期末考试 $$Z=\frac{78-75}{6.5}\approx0.46,$$

取 $\lambda=50, Z=50+0.46=50.46$,

可见该学生期末比期中进步了.

(3) 变异系数(又称变差系数)

变异系数是一个单位的相对差异量,它常用来比较单位不一样的两组数据或平均数相差较大的两组数据的离散程度。

变异系数是指一组数据的标准差与这组数据平均值的比的100倍,用公式表示为:

$\mathrm{CV}=\frac{\sigma}{\bar{x}}\cdot100$(其中CV表示变异系数)。

一组数据变异系数越大,它的离散程度就越大,反之,一组数据的变异系数越小,其离散程度就越小。

变异系数无限制单位,因此它可以用来比较评价单位不同的数据之间的差异。

如一个班级数学考试成绩平均分为90分,标准差为8.5,外语考试非平均分为78分,标准分为7.2,问哪一科成绩较好。

数学考试的变异系数是:

$$\mathrm{CV}=\frac{8.5}{90}\times100=9.4,$$

外语考试的变异系数是:

$$\mathrm{CV}=\frac{7.2}{78}\times100=9.2.$$

通过计算可知,数学考试的变异系数比外语考试的变异系数大,这表明数学成绩不如外语成绩整齐和稳定,或者说数学的平均分的代表性比外语差.

本章思考题

1. 如何对学生的数学学习进行评价?应注意哪些问题?
2. 数学课堂教学进行评价的要素是什么?在数学课堂教学评价中应注意哪些问题?
3. 数学教学评价对数学教学具有指导的作用,谈谈如何充分发挥这一作用。
4. 对教学评价的方法提出建议。

第 11 章 数学与文化

11

随着数学的发展和社会对数学的需求，数学素养已经成为人的基本要求。数学不仅是提高思维能力的有力手段，是理性思维的基本形式，是一种深刻而丰富的文化，更重要的是，数学内容、思想、方法乃至数学语言、符号已广泛渗入自然科学和社会科学的各个领域，当代计算机的发展又给数学的应用提供了一种现实的可能。数学已经成为对社会发展有重要影响的文化力量。

其实，数学是现代文化极其重要的因素，而且是形成现代文化的主要力量。数学在很大程度上影响了人类文化的发展，从而影响社会的进步和发展，虽然这种观点在许多人看来是难以置信的，或者充其量是一种夸张的说法，然而这却是事实。为了说明这一点，本章对数学与文化的关系进行讨论。

11.1 数学与文化概述

11.1.1 关于数学文化的几个问题的思考

随着人们对数学文化特点认识的不断深入，以及 21 世纪基础教育和社会发展对人文性的呼唤，使新一轮基础教育改革将数学文化作为一个重要内容加入数学教育，对数学文化的研究也就随之而成为研究者探讨的重点问题。为了对数学文化有一个全面地认识，一些基本的问题需要引起注意，这些基本问题是数学文化研究的基础和出发点，对这些问题的认识不清，将会使数学文化的研究难以深入，更难理解数学文化的教育价值。

1. 数学文化的内涵

文化是与自然相对的一个概念，也就是说不属于自然的对象便属于文化的范畴。从广义的数学文化来说，所有与数学有关的对象都可以看成是数学文化，但这种解释就使问题过于宽泛而抓不住重点，特别是使“将数学文化贯穿于数学教育的始终”就像什么都没说一样难以实施。它会使人们在解释“数学文化是什么?”这一问题的时候，往往将问题转化为“数学是不是文化?”来回答。其实很明显，这是两个完全不同的问题。

“数学文化”首先是一种文化。因而，要回答“数学文化是什么?”，首先必须

回答“文化是什么?”。对文化的解释有许多种,按现代汉语词典的解释,文化“是人类在社会发展过程中所创造的物质财富和精神财富的总和,特指精神财富。”按照郑毓信先生在《数学文化学》中的解释,文化是指由某种因素联系起来的各个群体所特有的行为、观念和态度等,也即是指各个群体所特有的“生活(行为)方式”。[①] 荷兰哲学家冯·皮尔森(van Peursen C A)将文化定义为“人对周围力量施加影响的方式。”[②]因而他认为,对个体来说,文化不仅像自然界一样构成了一种生存环境,而且是人的生存方式。也就是说,文化虽然是人的创造物,但又反过来塑造人,因而人的行为便反映了文化对其的影响。说得更深入一些,人的本质就代表着文化的本质。依据一些相关研究,通常认为文化包括三个层面:物质层面、制度层面、精神层面。狭义文化则主要指精神层面的文化。文化对人的塑造也就主要是指对人的精神的塑造,也就是使人形成一定的态度、价值观、思维方式等,从而指导人的行为。正如文化学家怀特的一个命题“人类精神活动的变量是被称之为文化的超有机体传统的函数。”[③]因而,我们可以将文化概括为意识形态领域的精神、思想、观念等。

M·克莱因在《西方文化中的数学》前言中指出,“在西方文明中,数学一直是一种主要的文化力量。”这里的“文化力量”是“作为理性精神的化身,数学已经渗透到以前由权威、习惯、风俗所统治的领域,而且取代它们成为思想和行动的指南。”[④]结合上述对文化的理解和M·克莱因对数学文化的论述,我们可以得出这样的结论:数学文化是一种理性精神,这种精神来源于理性的思维方式和观念形成的力量。

这里又有一个新的问题,也就是“什么是理性精神?”理性有两个方面的意义,一是指属于判断、推理等活动的理性认识,二是指从理智上控制行为的能力。[⑤] 结合精神来理解,我们可以更注意第二层解释,也就是说,数学文化是一种使人,乃至使整个社会减少盲目和迷信,增强理智和文明的精神力量。正是从这个意义上说,M·克莱因认为数学(文化)是社会发展的“无价之宝”。[⑥] 因而,我们可以将数学精神和数学思想理解为数学文化的重要组成部分。

“所谓数学精神,指的是人们在数学活动中形成的价值观念和行为规范。数学精神的内涵十分丰富,主要有数学理性精神、数学求真精神、数学创新精神、

---

① 郑毓信,王宪昌,蔡仲.数学文化学[M].成都:四川教育出版社.2004,3(44).

② 叶澜.“新基础教育”论[M].北京:教育科学出版社,2006.9(373).

③ 曹明海,陈秀春.语文教育文化学[M].济南:山东教育出版社,2005(82).

④ M·克莱因著.西方文化中的数学[M].张祖贵译.上海:复旦大学出版社,2004.4(vi).

⑤ 中国社会科学院语言研究所词典编辑室[M].现代汉语词典.北京:商务印书馆,1981.

⑥ M·克莱因著.西方文化中的数学[M].张祖贵译.上海:复旦大学出版社,2004.4(viii).

数学合作与独立思考精神等。”[①]而“数学中的智巧、大胆的想象和猜测、丰富的直觉、奇特的构思,与缜密的论证和推理一起构成了数学的思想特质。”[②]数学精神和数学思想来源于数学知识的创造过程,无论是东方还是西方的数学发展历史,仔细体会都会发现,实际上数学的发展过程都体现了一种对真理的探索精神。数学一旦上升为一种精神,便更多地成为人的思维和行为的依赖因素。

由上述讨论,从文化的狭义的解释中我们可以将数学文化概括为是数学由物质形态转化为精神形态的产物,是数学发展的高级阶段,这一阶段的数学主要是一种精神,这种精神体现在人们行为上便是对理性的探索和对待事物的科学态度。

2. 数学文化与数学的关系

我们结合上述第一个问题,将数学文化特指意识形态中的数学的方法、思想、精神、观念等,而不包括数学知识。这样我们就可以认为数学主要由数学知识与数学文化构成,数学知识主要是指数学中的公式、公理、法则等,它们以能够看得见的物质形式表现数学,数学文化以隐性的方式反映数学。

从图 11.1 我们可以看出数学文化受数学及文化的共同影响,而这两者又都具有复杂性的特点,因而数学文化也就具有错综复杂的特点。我国著名科学家钱学森主张把极其复杂的研究对象称为“系统”。[③] 系统是由相互依存和相互作用的若干要素组成的、具有确定功能和层次结构的有机整体。文化就形成一个系统。从数学文化在文化系统的层次来看,文化处于最高层次,而数学处于次高层次,数学知识与数学文化是数学的两个主要方面。

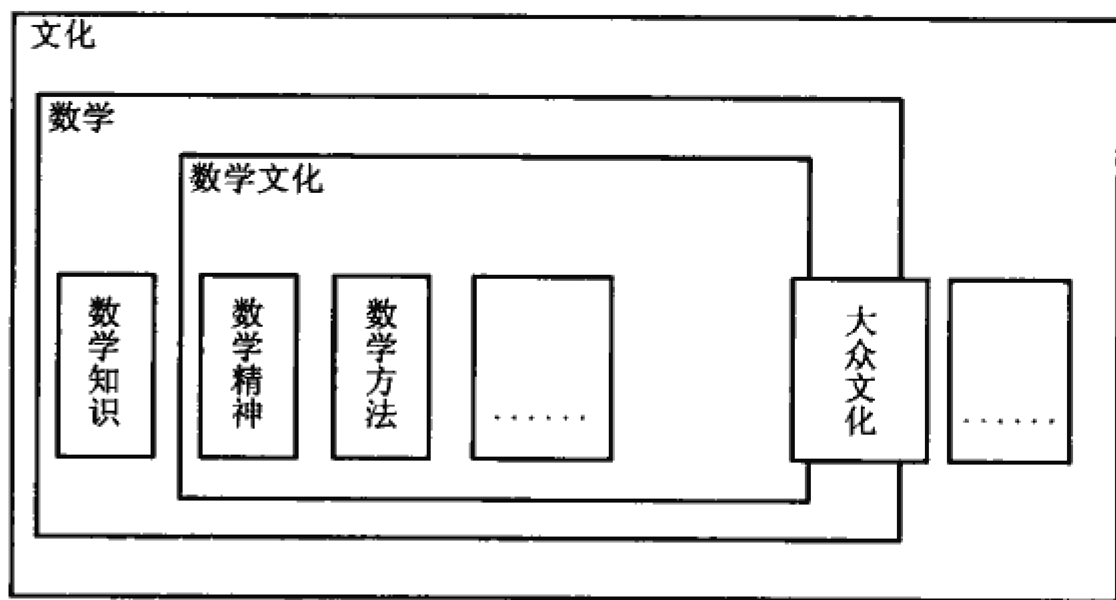


图 11.1 文化、数学及数学文化三者的关系

① 侯维民.“数学精神”与数学教育.数学教育学报,2004.3.

② 黄秦安.数学的人文精神及其数学教育价值.数学教育学报,2006.4.

③ 官鸣.自然辩证法概论.厦门:厦门大学出版社,1998.8(23).

数学文化与数学的关系是部分与整体之间的关系，是水与源、木与本的关系，数学文化的发展离不开数学的发展。但数学文化又具有子系统的特点，因而一旦形成，便有自己的存在和发展规律。如数学往往给人一种物质的现象（这主要是人们将数学仅看成数学知识），而数学文化却完全是一种非物质的现象。这也就意味着数学的发展并不能自然带动数学文化的普及。同样在一定的时期，数学研究者对数学的创造有时也不依赖数学文化的普及。因而数学文化与数学既具有联系，又具有相互独立性。理解这一点，也就可以解释在数学突飞猛进发展的当代，却普遍存在社会文化中数学文化的缺失现象。然而依据辩证法中层次结构因果关系理论，数学文化作为原因可以在数学中产生结果，因而数学文化的缺失现象终将阻碍数学的发展，数学离开了数学文化的支撑，其研究就缺乏了源泉，这必将导致数学研究的枯竭，中国数学发展的历史已经表明了这一点。也就是说，没有数学文化的支撑，数学将由于缺乏驱动力而终将陷入困境。

数学的两个主要方面数学知识与数学文化处于系统的同一层次，具有相互独立又相互渗透的特点。从思维的辩证关系的角度我们可以认为，对数学知识的认识是知性思维，而对数学文化的认识是理性思维。① 数学知识主要产生于数学研究之中，数学文化却来源于人们对数学的理解和应用的过程中。因而，对数学文化的认识需要在对数学知识的认识的基础上，产生思维的飞跃。数学知识与数学文化虽然都属于数学这一整体系统中，但却由于各自又构成子系统而具有不同的属性，这就使数学知识在一定的发展时期可以不依赖于外部环境，只依赖自身的内部因素，表现出相对封闭性的特点。而数学文化由于直接作用于人的思维，与人的行为相联系，因而始终具有开放性，也就是说数学文化的发展始终依赖外部环境状况。

数学知识的客观性一面和数学文化的人文性的一面共同构成数学，根据系统的协调适应原则，只有数学知识和数学文化的协调发展才能促进数学的更好发展，也才能发挥好数学的整体功能。对任何一方面的忽视或夸大，都将导致对数学认识的片面性。但由于数学知识具有的物质性，使得人们比较容易认识，因而人们只将数学知识作为数学而忽视数学文化也就可以理解了。但可以理解并不意味着是合理的。

3. 数学文化的产生

在哲学史上，一直存在着物质与精神谁是第一性的问题之争。由上所述我们知道，数学也存在着其物质形态和精神形态。数学的物质形式是数学的知识形态，而数学的精神形式是数学的文化形态。用唯物主义的哲学观解释两者之间的联系，我们认为数学的物质形式是第一性的，而其精神形式是第二性的，也

---

① 李廉. 辩证逻辑. 合肥：安徽人民出版社，1982.7(1).

就是说，数学的精神形式来源于数学的物质形式，即数学文化产生于对数学知识的创造、理解和应用。

辩证唯物主义认为，物质和精神是相互依存的，对于数学的精神形式数学文化，一旦形成，便会作用于数学的物质形式，从而产生新的物质形式。如果将其割裂，则物质、精神都将不复存在。也就是说数学的物质形式和精神形式如果分离，则数学精神不存在了，数学的物质形式也就不再是数学了。

从影响的范围和时间来说，数学的精神形式对人的影响不仅是长远的，而且是广泛的。而数学的物质形式也就是数学知识对人的影响却是短期的和有限的。因此，我们可以认为，我们只有借助于数学的物质形式传递数学的精神形式，达到影响人的思维、行为等方面的目的，也就是形成一种新的物质形式，才能充分发挥数学的作用。也就是说数学文化是由数学的物质形式⇒精神形式⇒物质形式的转化过程的产物。

4. 数学文化与大众文化的关系

文化系统包括许多子系统，我们这里主要涉及一个子系统，即大众文化。这里大众文化在一定意义上是指社会环境。数学文化从文化的角度与大众文化这一子系统处于同一层次，因而两者之间也构成互相独立和互相渗透的关系。

目前数学空前发展，但数学文化在大众文化中却出现了“受大众冷落”的现象。[①] 一方面 20 世纪被称为数学发展史上的黄金时代，“不仅是在这一百年，现代数学发展的广度与深度都是空前的，这一百年的数学成就，远远超过了以前两千五百年中的全部建树，有 9/10 的数学都是在 20 世纪产生的，而且数学的应用的广泛性也是空前的。”[②]随着社会和数学本身的发展，数学已经成为整个科学技术的基础，并向人类所有知识领域渗透，正如华罗庚教授所说，宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁等各个方面，无处不有数学的重要贡献。现代科学技术的发展，使数学在科学技术领域中的应用范围得到进一步扩大，从而科学形成了数学化的趋势。另一方面在数学应用日益广泛的同时，人们无论如何都很难发现大众对数学的热心，看到的只是数学被大众冷落的现象。在大众文化中一个三流的影视明星会受到追捧，一流的数学家的工作却不能获得足够的关注。

在看到数学被日益遗忘的同时，我们却又发现由于社会竞争已经进入白热化，因而各种考试林立，而且考必言数学，似乎数学又是大众，特别是参考人员追捧的对象。另外，目前在有些研究中，无论是自然科学还是社会科学的研究，研究者为了使自己的研究更具有科学性，便生硬地使用数学方法。于是，翻开各种

① 黄泰安. 关于数学文化的若干重要相关研究领域. 数学教育学报，2007.2.

② 匡继昌. 现代数学的哲学思考. 数学教育学报，2005.2.

杂志,总能看到一些不知道要说明什么问题的表格或图像等。这种将数学视为敲门砖和装饰物的现象,使数学文化呈现出假繁荣现象。

上述数学文化的假繁荣和真冷落的现象,不仅使人们对数学文化在大众文化的处境的认识像雾里看花,而且也说明了数学文化与大众文化的关系的极其复杂的特点。数学文化与大众文化处于文化系统的同一层次,因而相互依赖的关系便不很突出,而突出的确是其相互的独立性,所以,人们所看到的似乎是大众文化可以脱离数学文化。其实,大众文化对数学文化的漠视,是中国文化的一个特点。正如郑毓信先生所说"中国的文化历来缺少对数学的哲学思考。"[①]这在一定程度上引起了中国大众文化中的主观性和盲目性的成分较多的结果。

5. 数学文化的特点

作为文化的数学应属于意识领域。意识是一种个体自觉到的心理过程,著名心理学家潘菽对"意识"的定义是:意识就是认识。具体地说,一个人在某一时刻的意识就是这个人在那个时刻在生活实践中对某些客观事物的感觉、知觉、回想和思维等有分别的全部认识活动。[②] 因而数学作为意识,就应该具有意识的作用。也就是在人的生活实践中,人们应该主动地运用数学的思想、方法等进行认识活动,这就是我们所理解的大众应该被"数学化"。然而,在现实中,人们几乎难以认识到数学对自己的作用,人们也似乎并不打算将自己"数学化"。如人们在运用计算机时,并不想了解数学对计算机的作用,尽管人们似乎也知道计算机技术从根本上说是数学技术,也觉得数学对于各门学科都很重要,但却认为只有部分数学精英才需要关注数学。在大众的眼里,数学并未成为影响自己思维和行为方式的意识形态,还只是通过科学提供给大众的一种物质形态。为什么本应该是意识形态的对象却给人以物质形态的印象呢?这与数学文化的特点有关。

人类其他文化是在某一时期的社会价值观的体现,它以看不见但可以确实感觉到的方式影响人们的思想和行为。数学文化虽然是人类文化的一部分,然而数学文化却具有自身的特点,具有更抽象的特点,这种抽象性是数学抽象性的表现形式,数学文化是通过影响人的思维方式而影响人的思想和行为的,具有间接性的特点,这一特点使人很难感觉到它的存在。

从目前数学文化的状况来看,数学文化的影响至少分为两个层次,一个是由数学研究者所在的层次,另一个是大众的层次。在对待数学的理解、认识、运用方面,这两个层次有根本的区别。由于沟通的欠缺,使这两个层次产生了巨大的裂痕。数学家们确信自己所从事的是一种有意义的活动,更普遍地感受到了数

① 郑毓信,王宪昌,蔡仲. 数学文化学[M]. 成都:四川教育出版社. 2004,3(264).

② 汪国华. 数学应用意识的再认识及研究的方向. 数学教育学报,2006.1.

学的美。[1] 也就是说数学家们能够感受到数学文化给其带来的精神力量，而大众却几乎完全是相反的状况。这一现象也是由于数学文化的抽象存在方式所形成的差异。

数学文化与其他社会文化相比还有潜在性和影响的广泛性的特点。

首先，数学文化对人的冲击和影响具有潜在性。法国哲学家傅立叶认为，客观世界是一个处在不断运动状态的物质世界。它由三种从来就有的"不能创造的和不可破坏的原则构成的。"这就是(1) 上帝的或精神的原则；(2) 物质的原则；(3) 公正的原则或数学的原则。[2] 显然傅立叶将数学从精神和物质中分离出来，并与精神和物质并列。虽然傅立叶的观点具有片面性，但却说明数学文化不仅不具有物质的可感受性特点，而且也与其他文化形式对人的精神影响的方式不同，也就是说数学作为文化，它不能像其他文化那样直接对人的行为发生作用，而是通过潜在的影响人的思维从而影响人的行为。

其次，数学文化对人的影响具有广泛性。这一方面是由数学应用的广泛性决定的，另一方面也是由于数学文化由于是影响人的思维，因而也就在更大程度上和更广的范围内影响人的行为。

6. 数学文化与社会文化关系的多样性

数学文化产生于数学，具体地说数学文化产生于数学的创造和用数学解释自然和社会的过程。数学发展史对数学文化有决定性的影响，数学史不应仅包括数学知识的产生和发展的历史，而且由于数学知识是由人所创造的，人又产生于一定的社会文化环境之中，数学史也就包含数学文化的发展史。

古希腊哲学家柏拉图认为数学是通向理念世界的途径，是"把灵魂拖着离开变化世界进入实在世界的学问。"[3]古希腊毕达哥拉斯学派认为"数是神圣的，数学是对神的一种研究。"[4]，并且认为数乃万物的本原。由此可见，古希腊时期，人们将数学看成是至高无上的，这便形成一种文化现象，既理性充满了社会文化的各个方面。如"希腊人将美看成是秩序、一致、完善和明晰，"并"在每一种情感经验中都寻找理性的因素。"[5]正是由于古希腊人对理性的重视，使数学无论在物质方面，还是在精神方面都结出了丰硕成果。欧几里得几何的创立具有物质和精神的双重意义。在物质上为数学研究乃至科学研究树立了一块永恒的丰碑，成为典范。在精神上显示了数学理性精神的无穷力量。古希腊由于数学文化成为主流文化，数学的理性思想几乎弥漫了每一个角落，而理性代表了文

---

① 郑毓信，王宪昌，蔡仲. 数学文化学[M]. 成都：四川教育出版社. 2004，3(71).
② 朱德生，李真. 简明欧洲哲学史. 北京：人民出版社，1979. 1(285).
③ 林夏水. 数学哲学. 北京：商务印书馆，2003. 7(42).
④ 郑强等. 论课程形态的数学文化及其教育价值的实现[J]. 北京：数学教育学报，2005. 1.
⑤ M·克莱因著. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵译. 上海：复旦大学出版社，2004. 4(27).

明，因而，古希腊也就必然成为现代文明的摇篮，所以才有今天的“言必称希腊”。

中国古代由于筹算的运用，使数学研究具有十分有利的工具。产生了能与现代数学中矩阵法相媲美的解方程组的方法，就是筹算运用的典范；中国古代由于求球的体积和圆的面积等问题的需要，刘徽走到了极限理论的边缘；通过对杨辉三角形的研究，中国数学也已经接近了高阶等差数列的理论。这样的例子在中国古代数学中还有许多，但由于数学的“单干”式的研究方式，和整个社会文化对数学的忽视所造成的数学研究后继无人，终使所有的研究都未形成完整的理论。我们在大呼可惜之时，却发现数学文化对数学研究的重要意义。其实，在中国古代文化中，几乎没有数学的位置，这与古希腊形成鲜明的对比。

我们也能从中西方数学文化与社会发展状况的比较中体会两者之间的关系的多样性。在中国，数学文化与社会发展呈现不协调性。如中国封建社会的鼎盛时期唐朝，是数学发展几乎停顿的时期；战国和宋元时期，是战乱频仍时期，却是数学发展的辉煌时期。西方的情况有所不同。古希腊的社会经济发展较其他时期，如后期的罗马时期并不算繁荣时期，但却是数学以及理性文化的鼎盛时期。中世纪的社会发展与数学发展都处于“黑暗”时期。中世纪以后，既是数学的快速发展时期，也是社会科学技术的快速发展时期。在西方文明中数学的作用不仅是对技术、知识和人类生活产生影响，而且对社会文化也有很大影响。著名数学史家M·克莱因认为，数学决定了大部分哲学思想，对于数学与文化发展的关系，M·克莱因的基本观点是：两者休戚相关。“一个时代的特征在很大程度上与该时代的数学密切相关。”①但在中国的文明中，数学却始终没有成为主要的文化力量。

上述现象我们可以看出，数学文化产生于人们对数学的理解。数学文化与社会发展状况之间的关系并不是简单的线性关系，换句话说，不同的社会发展状况可以产生不同的数学形式和发展方式，但类似的文化却不一定能产生出类似的数学形式和发展方式，而且我们不能指望社会的发展会自然带动数学文化的繁荣。数学文化的发展尽管依赖数学的发展，但其关系也是极其复杂的，总体上说数学成就的取得依赖数学文化的支持，数学文化的繁荣也依赖数学的发展，但相对于不同的人和不同的历史时期，却又表现出相互独立的一面。由于数学文化在不同的历史时期，都具有影响着数学研究者的思维，因而影响数学发展的特点，所以数学文化与数学历史是相互影响的关系。

7. 数学文化的价值

价值就是事物对人的积极作用。齐民友先生说过“历史已经证明，而且将

① M·克莱因著，西方文化中的数学[M].张祖贵译.上海：复旦大学出版社，2004.4(xxvii).

继续证明:一个没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的,一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。"①这说明了数学文化的重要作用,具体地说,数学文化的价值体现在以下几个方面。

(1) 培养人的理性精神

马克思、恩格斯认为"全部哲学,特别是近代哲学的重大的基本问题,是思维和存在的关系的问题。"②数学这一以研究思维对象为特点的学科,直接影响人的哲学观。具体地说,数学在文化方面主要体现的理性精神对人的思维产生影响。这种影响的具体表现是对周围事物的认识、理解、思考、表述、解释上都具有理性的特点,也就是使人能够对事物进行客观地、深入地分析,从而作出准确判断,并指导人的行为。而这一精神的缺乏,便可使人对事物的判断主观、随意,因而我们可以认为,没有数学内涵的文化容易使人陷入盲从和混乱。

中国现代社会已经进入一个快速发展的信息时代,而且正在经历一场艰巨、复杂、痛苦却又是伟大的变革,人的生命的活力以前所未有的强度和广度释放出来。从人类文化的角度来看,由于多种文化的涌入,出现了文化的混乱局面,使人们也同时进入了一个浮躁的社会。快速发展给人带来的心理压力,使人将自己置身于一个缺乏理性的、焦虑的心理环境之中。我们知道理性使人清醒,理性也意味着人类文明的进步,理性精神是推动社会发展的重要因素。数学文化代表了人类文化的理性因素,因而,调整人的精神状况,从而促进社会文明的健康发展的重要途径之一是在人类文化中提升数学文化的分量。数学文化在社会整体文化中的份量的提升,可以增强社会文化中的理性成分,为人类文明的发展提供有效可行的途径。对数学文化的漠视将导致社会文化中理性的缺失,而长此以往,将导致文明的倒退。

(2) 影响人的思维方式

思维方式是一种具有稳定性、普遍性、深层次性的思维模式或思维路线,任何个体的思维方式都与社会文化形态相联系,也就是说,社会文化的特点,在很大程度上决定了人的思维方式,从而决定人的行为方式,最后决定了社会的文明状况。伽利略把数学称为读懂"自然之书"所必须认识的文字。③ 笛卡儿认为只有像数学那样由明白无误的公理推导出来的知识才是可靠的。④ 虽然他们的认识有一定的局限性,但却说明了数学的重要性,从而也说明了数学文化的重要性。

---

① 郑强等.论课程形态的数学文化及其教育价值的实现[J].数学教育学报,2005.1

② 朱德生,李真.简明欧洲哲学史.北京:人民出版社,1979.1(285).

③ 朱德生,李真.简明欧洲哲学史.北京:人民出版社,1979.1(352).

④ 朱德生,李真.简明欧洲哲学史.北京:人民出版社,1979.1(95).

数学的语言是符号语言。日常语言是习俗的产物，而数学语言是谨慎地有意地而且经常是精心设计的，因而数学语言是数学文化的重要组成部分。凭借数学语言的简洁性特点，我们可以提高思维的效率。我们来看这样一个例子，这个例子可以部分说明数学符号的作用[①]："当一个 12 世纪的青年坠入情网时，他不会后退三步，看着他心爱的姑娘的眼睛，对她说她是世界上最漂亮的姑娘。他说他要冷静一下，仔细考虑这件事。如果他在外面碰上一个人，并且打破了他的脑袋——我指另外一个人的脑袋——于是就证明了他——前面那个小伙子——的姑娘是个漂亮姑娘。如果是另外一个小伙子打破了他的脑袋——你知道不是他自己的，而是另外那个人的——对第二个小伙子来说的另外一个，而不是对前面那个小伙子——那么，如果他打破了他的头，那么他的姑娘——不是另外一个小伙子，而是那个小伙子，他……"，这段复杂的叙述如果用数学符号语言表述，则可以简捷、明确地表述为"如果 A 打破了 B 的头，那么 A 的姑娘是一个漂亮的姑娘，如果 B 打破了 A 的头，那么 A 的姑娘就不是一个漂亮的姑娘，B 的姑娘是一个漂亮的姑娘。"

对数学的有效运用，是一门科学成熟的标志。现代科学的数学化趋势正好表明现代科学中的各门学科越来越走向成熟和完善。我们可以类比地认为，在人类整体文化中数学文化的因素状况，是人类文化走向成熟和完善的标志，如果这一结论是正确的，那么，强调数学文化对人类文明的作用就是必然的了。

对数学文化的强调，是引导人们全面地认识数学、认识数学的价值的重要途径。目前人们对数学的科学价值的认识已经达成共识，普遍认识到数学是一切科学的基础，但对数学的其他价值却不以为然。这是认识中的一大损失，其结果就是人们忽视数学的精神作用，也就难以自觉体验数学的文化内涵。

8. 数学教育中强调数学文化的意义

数学主要是文化，而文化的特点就是被继承和发扬，而继承和发扬数学文化则依赖人们对其认同和理解。教育对文化有着传递、保存、延续和发展的作用，也就是说，教育是文化的生命载体，数学文化要繁荣，必须依赖教育的作用。另一方面，文化价值取向决定着教育，当数学由数学知识所代替时，这种价值取向便使数学教育完全成为知识的传授过程，而当数学由数学文化，即数学的精神、知识、思想、方法等共同决定时，这种价值取向将使数学教育的内涵更为丰富。

教育是文化的存在方式，而文化是教育的血肉和灵魂，从这个意义上说，离开文化的数学教育是没有血肉和灵魂的躯壳。因而教育的根本就在于文化的传递，这种传递的结果就是对人的精神的影响。在数学的发展过程中，一代又一代的数学人，将自己的精神、意识、思想、方法等凝结为数学的知识，因而如果数学

---

① Paul Ernest 著. 数学教育哲学，齐建华，等译. 上海：上海教育出版社，1998.

教育不能将蕴涵在公式、公理、定理、符号、习题中的情感、态度、智慧、精神挖掘出来,那么就可以认为这种教育便成为“买椟还珠”式的教育了。数学中的知识是数学文化的载体,学生只有通过知识感受到数学的文化,才是数学教育所应该达到的境界。

马克思在《政治经济学批判导言》中指出,人的认识过程是从感性到知性再到理性的,因而要形成理性认识,必须依赖于感性的体验到知性的理解,而且体验的内容、理解的深度就决定了理性认识的状态,也就决定了数学的文化状态。因而,感受数学文化的决定因素是人对数学的感性和知性认识,而这又取决于数学教育的状况。

数学文化中的理性成分已经成为社会文明的重要标志,传播数学文化,从而促进人类文明的进步主要依靠的就是教育,所以在数学教育中必须强调数学文化的因素。

恩格斯曾经指出:“社会一旦有技术上的需要,则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。”①依据恩格斯的思想,推动数学文化的最有力的力量是社会的需要,而社会的需要是建立在对数学的认识和理解的基础上的。因而,要使数学文化得到健康的发展,对数学的全面正确地认识、理解和运用是基础,但这也主要依赖教育。因而我们可以得出这样一个结论,也就是在数学教育中怎样强调数学的文化性都不过分。

11.1.2 数学的特点

有了上述对数学文化的认识后,我们就可以讨论与数学文化相关的问题了,首先要讨论的就是“数学是什么”的问题,这是每一位数学教师都必须回答的问题,对此问题如果没有清醒的认识,就不可能产生真正意义上的数学教学。因为,离开了对数学本身的思考,教学就只能停留在一种非理性的状态,换句话说,也就是跟着别人走,盲目教学的结果就是低效率的教学,学生的学习也就不可能积极主动。

然而,对于“数学是什么?”的问题,却并没有一个标准答案,而是要靠个人对数学的体验和领悟。这里介绍几种有代表性的观点。

1. 数学是对美的追求

实用的、科学的、美学的和哲学的因素,共同促进了数学的形成。数学是一种探究的方法,但数学更多的是一种创造性活动。进行数学创造的最主要的驱动力是对美的追求。也就是说,数学研究就是对美的一种追求,这种美是一种理性的完美无缺,如数学要研究一个对象,就必须先给研究对象一个完美的定义,

---

① 宫鸣.自然辩证法概论.厦门:厦门大学出版社,1998.8(263).

然后再对其性质追求完美的表达，对性质的证明追求无懈可击。

数学可以称得上是最追求完美的学科，数学研究三角形，就必需问“三角形是什么?”；数学研究“集合”就要问“集合是什么?”；数学运用微积分就要明确“微积分的基础是什么?”；有了“极限”的认识，数学还要问“如何用更精确的数学语言描述它?”；就连最普通的自然数，数学也要问“1 是什么?、2 是什么? ……”；数学问题解决了，数学还要问“有没有更好地解决问题的方法?”；……；这充分表现出数学对美的追求近乎“苛刻”。

2. 数学是一种符号语言

数学的符号语言是世界通用的语言，因而对于不同文化、不同语言的人们进行交流提供了有效的途径。数学符号的运用充分体现出数学的抽象的特点和数学创造的特点，离开了符号数学也就不成数学了。

符号语言的使用也是数学追求美的表现，因为符号可以使表达达到最精确的程度，如极限的概念无论怎样用文字表达，都不可能达到“$\varepsilon-\delta$”语言所能达到的准确程度，再如对函数增减性的文字叙述的准确程度，无论如何都很难与分别用两个不等式所表述的状况相比。

M·克莱因在《西方文化中的数学》中指出，数学语言是精确的，它是如此精确，以至常常使那些不习惯于它特有形式的人觉得莫名其妙。如果一个数学家说“今天我没有看见一个人”(I did not see one person today)，那么他的意思可能是，他要么一个人也没有看见，要么他看见了许多人。数学的这种精确性，对于一个还没有认识到它对精密思维的必要性的人来说，似乎显得过于呆板，但任何精密的思维和精确的语言都是不可分割的。而符号地运用是对数学精确性的最好表现。

3. 数学是知识体系

数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学还是有着丰富内容的知识体系。这一看法是公认的。

4. 数学是一种精神

在最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞和驱使人类的思维得以运用到最完善的程度。

M.克莱因在《西方文化中的数学》说，一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。在数学史上，阿基米德这位伟大的古希腊数学家和科学家，在公元前221年被突然闯入的罗马士兵杀害，当时他正在研究画在沙盘中的几何图形。对此，A·N·怀特黑德说过：阿基米德死于一个罗马士兵之手，是世界发生头等重要变化的一个标志；爱好抽象科学、擅长推理的古希腊在欧洲的霸主地位，被实用的罗马取代了。罗马是一个伟大的民族，但是他们却由于只重实用导致了创造性的缺乏而受到人们的指责。

上述讨论我们发现，无论我们用什么来刻画数学都显得不能概括全部，数学是方法、数学是语言、数学是思想、数学是精神都只是部分地表达了数学内涵，因此，“文化”——也只有用文化，似乎才能表达数学与我们难以分离的关系，表达数学无所不在的特点。因而也就有了“数学是文化”这一高度概括性的语言。

11.2 数学理性精神的诞生

理性精神是数学精神的重要组成部分，也是人类走向文明的重要支柱，理性精神使人较好地克服迷信和盲从，在基础教育改革不断深入的现代，教师需要理性精神为改革指引方向，在人类不断走向进步的时代，更需要理性精神为社会和谐发展提供精神支柱。

从历史上看，数学理性精神诞生于古希腊，古希腊文化实际上是一种数学文化，它给世界留下了三件珍宝。其一是它留给人们一个信念：自然数是万物之母，这个信念鼓舞人们将宇宙间一切现象的终极原因寻找出来；其二是它孕育了一种理性精神，这种精神已经渗透到人类知识的一切领域；其三是它给出一个样板——欧几里得几何这个样板的光辉照亮了人类文化的每一个角落。

11.2.1 数学理性精神的诞生

在人类文明史上，中国、埃及、古巴比伦和古希腊被称为“四大文明古国”，前三者都先后取得了算术和几何上的辉煌成就，但只有古希腊产生了具有“科学意义”的数学，因而成为现代数学乃至现代科学的发源地。[1]

在希腊以前的数学，都以经验的积累为其特征，如在埃及和巴比伦人那里，经常用的是类比和归纳的方法。例如埃及人相信生命不朽，所以他们在埋葬死者时，要陪葬衣服、家具等，以供死者在另一个世界使用，这就是类比的结果。又例如当他们多次看见水经过加热体积增大了，于是得出结论：水加热体积会增大，这就是归纳的结果。他们也将类比和归纳的方法运用于数学研究中，得出了许多实用的结果，解决了许多问题。但是，这两种推理方法都不能确保结论的正确性。

有一种推理方法能保证它所得出的结论是正确的。这种方法就是演绎法：从已经认可的事实出发，推导出新命题，如果承认这些事实，就必须承认新命题。这种方法产生于古希腊，而且古希腊先哲将其运用于数学，并在数学中排斥其他方法。数学中运用演绎法，是数学理性思维的标志，那么，这种思维方式是怎么产生的？这里我们结合对几位先哲的简单介绍和希腊数学对演绎法的偏爱，使

① 王相国．理性数学的哲学起源．数学教育学报，2007．3．

读者体会这一理性思维的产生过程。

1. 泰勒斯与万物起源

有一个故事说，一次泰勒斯（Thales）在夜晚散步时，由于全神贯注地观察星星，不小心跌到沟中成了落汤鸡。随行的一位妇女大惊失色："你连脚下的东西都看不到，又怎么能够知道天上发生的事情呢？"然而，泰勒斯的确取得了许多卓越的成就，其中之一就是奠定了希腊数学的基础。

被誉为"科学之祖"的泰勒斯（Thales），以及大多数早期希腊数学家，都曾向埃及人和巴比伦人学习过数学原理。因此，希腊人的思想毫无疑问地受到了埃及和巴比伦人的影响，但是他们创立的数学与前人的数学比较，却有本质的区别。这种区别是怎样产生的，我们来分析泰勒斯的一些思想产生过程，也许会从中受到启发。

据一些相关资料称，泰勒斯早年是一个商人，曾到过不少东方国家，学习了古巴比伦观测日食、月食和测算海上船只距离等知识，了解到腓尼基人英赫·希敦斯基探讨万物组成的原始思想，知道了埃及土地丈量的方法和规则等。他还到美索不达米亚平原，在那里学习了数学和天文学知识。[①] 因而，泰勒斯有机会接触不同民族的文化，这为他对这些文化的比较、分析和批判提供了可能性。而泰勒斯本人的智慧和这一客观条件的相互协调，便成为理性思考产生的有利条件。

综观世界上所有的民族，最初的文化产品都表现为神话，而神话的产生来源于人们对自然界的各种解释，一个最主要的问题就是解释万物的起源。然而，不同的民族对同一个问题却有不同的解释，这些解释有时甚至是矛盾的。对于一个处于这种矛盾之中的智者而言，便自然产生对这些不同解释的比较、分析和批判，这也就是最初的理性形态。泰勒斯就是这样一个伟大的智者，他提出了"万物起源于水又复归于水"这一自然观，使人们可以摆脱万物本源是精神的这一认识观，形成一种物质观。因此我们可以认为泰勒斯是第一个将理性认识带入人类的思想中来的人。正是这种开始摆脱了超自然的神力而转向在物质世界中来寻求万物本源的思想，以及这种对各种不同文化进行批判的思辨，使泰勒斯对他在当时所掌握的算术和几何的方法和结论都要寻出一个"来源"，而不仅仅满足经验性。于是，泰勒斯将证明引入了数学，这对数学来说具有划时代的意义。

2. 毕达哥拉斯与希腊数学特点

如果说泰勒斯是希腊理性数学的奠基人，那么，第一个认识到数量关系对人类理解和把握世界所起的重要作用，进而将其发展为一门独立学科的人就是毕达哥拉斯（Pythagoras）。

---

① 王相国. 理性数学的哲学起源. 数学教育学报，2007.3.

被誉为“智慧之神”的毕达哥拉斯(Pythagoras)师从贤哲、游历四方、兼收并蓄、博学多思,因此成为欧洲最早期的哲学家之一,也是欧洲最早期的数学家之一。毕达哥拉斯同样以批判的眼光继承和发展了古希腊的哲学与数学。其宇宙观认为万物既不是水,也不是其他什么,而是自然数。“万物皆数”的哲学观正是兼收并蓄、批判地继承和发展的结果,它第一次使人们发现数学对人类的重要意义。

毕达哥拉斯学派在数学上有两大突出的贡献。其一是坚持在发展几何时必须首先制定“公理”或“公设”,而此后的工作就是通过严密的、导向公理的演绎推理来完成的。“公理”思想的产生,以及毕达哥拉斯从泰勒斯那里继承并大力发展的对数学问题进行逻辑证明的理性主义思想和方法,深深影响了西方数学乃至整个西方文化,成为东西方文化差异的重要标志。其二是毕达哥拉斯学派对有理数的研究和无理数的发现。无理数的发现虽然使毕达哥拉斯的“万物皆数”的哲学毁于一旦,但是为数学研究开辟了广阔的道路。毕达哥拉斯以后的数学家和哲学家批判地继承了毕达哥拉斯的哲学思想,为现代数学和现代科学的产生和发展奠定了坚实基础。

3. 演绎法对古希腊人的意义

演绎法,作为一种获得结论的方法,与反复试验法、归纳法和类比法相比,有许多优点。突出的优点就是,如果前提确定无疑,那么结论也确定无疑。希腊人坚持,所有的数学结论只有通过演绎推理才能确定,他们抛弃了以前数千年的文明里一直被看做是数学整体的有机组成部分的试验法、归纳法和类比法。

为什么希腊人要坚持将数学中运用演绎证明呢?我们一方面可以通过对泰勒斯、毕达哥拉斯等先哲的思想的了解得到解释,另一方面,我们可以通过分析古希腊人的精神活动的特点,剖析希腊社会的本质找到答案。

希腊人是天才的哲学家,他们热爱理性,爱好精神活动,这就使他们与其他民族有重大区别。受过教育的雅典人大都致力于哲学,而哲学家最基本的工具就是演绎推理,因此希腊人着手数学研究的时候也就偏爱这种方法了。

希腊人偏爱演绎法达到令人吃惊的程度,这是他们钟爱美的一个方面。希腊人将美看做是次序、一致、完整和明晰。美像情感一样,也是一种心理感受。希腊人在每一种情感体验中都寻找理性的因素。在佩里克利斯写的著名颂词中,他颂扬在萨摩斯岛战役中牺牲的雅典人,不仅因为他们勇敢而富有爱国心,而且因为他们认为自己的行为合乎理性。对将美与理性等同起来的人来说,演绎推理的条理性、一致性和完整性自然会有吸引力。

希腊人偏爱演绎的另一个原因,在他们所处社会的组织中可以找到。哲学家、数学家和艺术家具有较高的社会地位,社会高级阶层完全鄙视商业活动和手工劳动,或者认为这些工作都是倒霉蛋注定要做的工作。幸亏希腊人拥有大量

的奴隶，替他们完成了那些必要的生产劳动，否则他们这种极端鄙视劳动的态度，很可能使他们对希腊文化不能作出什么贡献。以奴隶为基础的古希腊社会造成了理论与实践的分离，而数学和科学在抽象性和深度方面却有了很大发展。

由此我们就不难理解希腊人为什么偏爱演绎法了。如果一个人不是"生活"在他周围的世界里，那么经验对他几乎就没有什么教益。希腊人坚持演绎推理是数学证明中唯一的方法，这却是最为重要的贡献，它使得数学从木匠的工具盒、农民的小棚和测量员的背包中解放出来，成为人们头脑中的一个思想体系。在这以后，人们开始靠理性去判断什么是正确的。因此，希腊人以一种比其他方法更为高超的方法，清楚地揭示了他们赋予了人的理性力量以至高无上的重要性。

希腊人偏爱抽象和理想化，这在哲学和数学中充分显示出来。在艺术中也充分展示了这一特点。古典时期希腊人的画像的面部都没有任何表情的流露，在希腊思想中，很难把理性因素与美学因素、道德因素分开，他们所反映的不仅是一种思维方式，而且是一种世界观。例如欧氏几何是静态的，它不研究变化的图形的性质。同样，希腊雕塑中的图像也是静态、冷漠的，给人一种心理上的安怡，如米隆的"掷铁饼者"主人公正准备发出巨大的力量，却还像人们熟悉的正在品茶的英国绅士一样，安宁、从容不迫，但人物造型堪称一绝。这也可以认为理性精神已经深入到古希腊的所有领域，并形成了东西方在艺术领域的差异。与古希腊雕塑相对照，被誉为世界奇迹的中国秦代兵马俑，在人物造型上充分注意了表情的丰富多彩，兵马俑中有武将、文官，有士兵、战马，个个相貌不同，神态各异。武将威严庄重给人以身经百战、老谋深算之感，文官呈现晓以世故、精明干练之貌。士兵除有威武强悍的共性外，还有其不同的个性。在表情刻画上也堪称一绝。比较可以说明，不同的文化产生的艺术具有不同的特点，每个民族在创造自己的文化时，都有自身的特点，并创造出自身的文化。

希腊人使他们建筑也标准化了。他们简朴的建筑总是呈长方形，甚至长、宽、高的比例都是确定的。

希腊人的第二个卓越贡献在于，他们将数学抽象化。在埃及和巴比伦人那里，一条直线只不过是一断拉紧的绳子，一个矩形就是将一块田地围起来的篱笆。希腊人将点、线、角等变成了思想方面的概念。思考抽象事物比思考具体事物困难得多，但它却有一个最突出的优点，那就是获得了一般性。如对三角形性质的研究结果，适合于任何一个具体的三角形。

希腊人对数学发展产生影响的另一方面，是他们对几何学的重视。最重要的原因，则是他们用几何方法解决了一个重要的问题，从而使得希腊数学家进入几何领域。这个问题就是无理数的问题。无理数的发现，曾经引起毕达哥拉斯学派的恐慌。对于解决无理数的难题，巴比伦人曾有一个权宜的方法，那就是取近似值。希腊人认为，数学能被称为是一门精确的科学，必须发展出一套解决无

理数的方法，而不是取近似值。他们坚信，所有的数都可以用几何方法表示出来，他们从这条思路出发，选择一条长度代表 1，其他的数就依据这段长度来表示。例如，为了表示$\sqrt{2}$，他们就使用两直角边是一个单位的直角三角形的斜边的长度，他们还用几何方法进行数的运算，如将 3 与$\sqrt{2}$的乘积看成是矩形的面积等，他们还用几何作图的方法求解含有未知量的方程。

由于希腊人将算术概念转变成几何概念，而且他们终身致力于几何的研究，这就使希腊数学出现单向发展的状况，这无疑会影响数学的发展，因为，数学中的数与形是不可分割的整体，对任何一方的忽视都会使数学发展受到限制。但任何事物都具有两个方面，也正是因为古希腊人对几何的深入研究，才能诞生欧几里得《几何原本》这样一部标志着人类理性精神胜利的成果。

11.2.2 欧几里得《几何原本》

1.《几何原本》的意义

古希腊时期大师们已经掌握的最重要的结论，被欧几里得总结在《几何原本》(Elements)中，这部最负盛名的著作，约在公元前三百年形成，它既是几何学逻辑表现形式，又构成了一个时代的数学史。从几条经过精心选择的公理出发，欧几里得演绎出了五百条定理。

《几何原本》共有十三卷，其中第一卷讲三角形全等的条件，三角形边和角的大小关系，平行线理论，三角形和多角形等积(面积相等)的条件；第二卷讲如何把三角形变成等积的正方形；第三卷讲圆；第四卷讨论内接和外切多边形；第六卷讲相似多边形理论；第五、第七、第八、第九、第十卷讲述比例和算术的理论；最后讲述立体几何的内容。

从这些内容可以看出，目前属于中学课程里的初等几何的主要内容已经完全包含在《几何原本》里了。因此长期以来，人们都认为《几何原本》是两千多年来传播几何知识的标准教科书。属于《几何原本》内容的几何学，人们把它叫做欧几里得几何学，或简称为欧氏几何。

欧几里得几何的创立，对人类的贡献不仅仅在于产生了一些有用的、美妙的定理，更主要的是它孕育出了一种理性精神。人类任何其他的创造，都不可能像欧几里得原本中的几百条证明那样，显示出这么多的知识都是仅仅从几条公理出发，依靠推理而得出来的。这些大量深奥的演绎结果，使得希腊人和以后的文明了解到理性的力量，从而增强了他们利用这种才能获得成功的信心。受这一成就的鼓舞，西方人把理性运用于其他领域。神学家、逻辑学家、哲学家、政治家和所有真理的追随者，都纷纷效仿欧几里得几何的形式和推理过程。

在希腊人那里，数学也是被看成是所有科学的标准，亚里士多德特别强调每一门学科都必须像欧几里得几何学一样，通过一些适用于这门科学的有效方法，

确立几条基本原理,从这几条基本原理出发,以演绎的形式推导出真理。在柏拉图学院的门口,写有这样的箴言:"不懂几何者不得入内",这典型地反映了他们对待数学的态度。

2. 思维中理性因素的形成

希腊人将几何学知识运用于逻辑方面的伟大实践,被亚里士多德结构化、系统化了,总结成了思维的规律,这些思维规律现在已经被我们广泛接受和运用了。希腊几何学被称为逻辑科学的始祖,从希腊时代开始,几百代人通过学习欧几里得几何学,掌握了如何进行推理的方法,并形成了思维中的理性因素。

11.3 中国文化中的数学

我们可以说,没有演绎法就不可能有现代数学,但是我们又必须认识到,仅有演绎法,现代数学也是不完整的和难以发展的。古希腊数学起源于其他文明古国,但却彻底改变了其原来的面貌,将演绎法的运用推向了极端,从而排斥其他研究方法,这在现代数学发展之初无疑是有利的。但在体系形成以后就需要运用各种思想和方法于其中进行研究,否则其发展就是有限的。古希腊数学对代数研究的忽视的缺陷也充分说明了这一点。因此,现代数学要得到健康发展,必须兼收并蓄各种数学思想和方法,其中中国古代数学体系和数学思想为现代数学的发展作出了不可磨灭的贡献。

中国古代文明是人类最古老的文明之一。西部世界屋脊的崇山峻岭、北部的冰河和广阔的蒙古高原、东南部的太平洋,决定了地域相对封闭的人类文化的独立创造过程。原始思维所共有的数量关系、数字的神秘解释形式,在这一相对独立的文明发展进程中演变成中华民族古代数学的独特形式。

刻画记数、结绳计时是人类各民族在计数过程中几乎共有的过程,中国古代也有"事大,大结其绳;事小,小结其绳,结之多少,随物众寡"的记载。中国古代数学的独特现象之一,是数字最终演化为以"筹"(竹棍)的形式来表示,并以此为工具进行数学的运演操作。这是一种与古希腊数学符号运演相异的手工操作运演形式。

11.3.1 《九章算术》

《九章算术》对中国古代的数学发展有很大影响,这种影响一直持续到了清朝中叶。《九章算术》(图 11.2)的叙述方式以归纳为主,先给出若干例题,再给出结果,但却很少给出具体的解决问题的过程,因此历代数学家有不少人曾经注释过这本书,其中以刘徽和李淳风的注释最有影响。不同于西方以演绎为主的叙述方式,中国后来的数学著作也都是采用归纳为主的叙述方式。

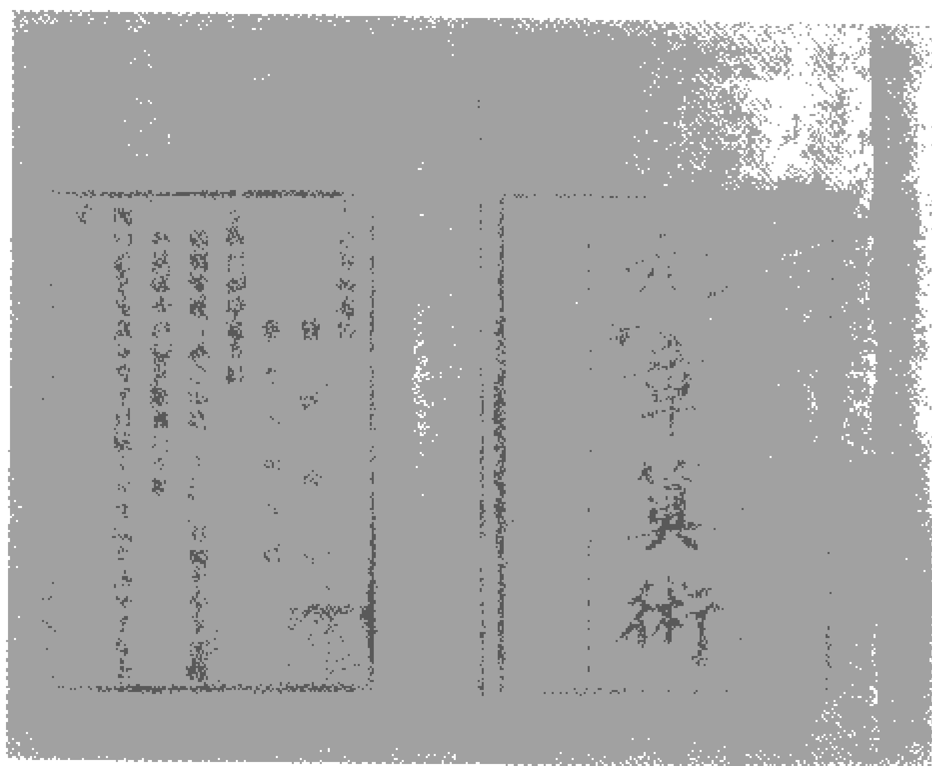


图 11.2

1.《九章算术》的特点

《九章算术》的出现,标志着我国古代数学体系的正式确立,《九章算术》有以下的一些特点。

(1)《九章算术》是一个应用数学体系,全书表述为应用问题集的形式;

(2) 以算法为主要内容,全书以问、答、术构成,"术"是主要需阐述的内容;

(3) 以算筹为工具。

《九章算术》取得了多方面的数学成就,包括:分数运算、比例问题、双设法、一些面积和体积计算、一次方程组解法、负数概念的引入及负数加减法则、开平方、开立方、一般二次方程解法等。《九章算术》的思想方法对我国古代数学产生了巨大的影响。隋唐之际,《九章算术》已传入朝鲜、日本,现在更被译成多种文字。

2.《九章算术》部分内容

(1) 筹算解方程组

在中国古代数学的发展中,筹算的方法,即用竹棍作为数学符号、作为运演操作的工具是中国古代文化对人类数学的一个独特贡献。这种筹算的操作方式和运演程序表现了中国古代数学的极大的创造性。这种运演操作不仅可以进行加、减、乘、除、开平方、开立方的运演,而且在方程的运算方面更达到了令人惊奇的地步,后者与现代数学中方程理论的矩阵解法有极大的相似之处。例如,在方

程术中第 1 题为:[1]

今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何?

问题相当于解方程组.

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\2x+3y+z=34,\\x+2y+3z=26.\end{cases}$$

解法如下:

(1)

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

→ (2)

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

→ (3)

0	0	3
0	5	2
4	1	1
11	24	39

→ (4)

0	0	4
0	4	0
4	0	0
11	17	37

第一步,用右行(列)x 的系数 3"遍乘"中行和左行各数,然后从所得结果按行分别连续减去右行对应各数,得到(2);

第二步,(2)以中行 y 的系数 5 遍乘左行各数,从所得结果连续减去右行对应各数,并约分,就得到(3),由此可求出 z;

第三步,以左行 z 的系数 4 遍乘中行和右行各数,所的结果连续减去对应的左行各数,并约分,得(4)。

由此得出上禾(x)$=9\frac{1}{4}$,中禾(y)$=4\frac{1}{4}$,下禾(z)$=2\frac{3}{4}$

这一算法已经接近现代数学的矩阵解法,说明中国筹算方法在古代具有领先地位,但这一算法却未能将其推广到一般情况,得出一般结论。这是中国古代数学缺乏抽象和概括,并上升到一般理论的表现,也是中国古代数学的不足。

(2)圆的面积

在中国古代数学的发展中,筹算数学遇到的另一个问题就是如何对待圆的面积。中国古代数学不是像古希腊数学那样从表述世界美好和谐的意义来看待圆及其面积,而只是基于实践应用的需要来求取圆形的面积,也就是说,中国数学在一定意义上是在实践的需要的推动下形成和发展的,这是中国古代数学具有实用性的特点的原因。辩证唯物主义认为,任何事物都具有辩证的特点,中国数学的实用性特点也有两个方面的反映。一方面,由于数学大师们没有"精确

[1] 李文林.数学史概论.北京:高等教育出版社,2002.8(74).

性”、“严密性”的顾虑，能够创造出许多数学成果；另一方面，也正是实用性的特点，使数学大师缺乏上升到一般理论和追求抽象的动力，因此缺乏一般性结论。

《九章算术》第一卷“方田卷”，刘徽在第三十二题的注释中给出割圆术并论述了圆周率的求取过程。作为实践应用技艺的中国筹算数学，刘徽在此体现了实用的准则：他以图形来说明割圆术的方法。也即通过在圆内作多边形的方法，用多边形的面积逼近圆的面积。

在割圆术中没有对无穷小的极限问题做过多考虑，刘徽指出“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆合体而无所失矣。”从而，这一曾引起古希腊数学家高度重视并设法回避的问题，在中国古代数学中就只是在应用的意义上得到了处理。一般的说，西方数学中那种带有表述宇宙万物意义的内容、概念及方法在中国筹算数学中大都被轻视、忽略了，因为实践应用才是筹算的根本目的。

(3) 负数

与西方比较，中国古代数学对负数的认识和运算表现得极为自然并与经济生活相同步，由于中国的筹算数学没有像希腊数学那样肩负着理性的重任，而只是对实践应用的结果负责，因此就自然地对生产和生活中的“亏损”“不足”等现象给出筹算上的表示和具体可操作的运演规则。

(4) 出入相补

在中国古代数学的发展中，虽然它不像古希腊文化那样用几何图形来构造世界，但是社会实践应用也必然会提出一些有关几何图形的面积和体积的计算问题。对这些问题，筹算数学只关注它们的实际应用而不是逻辑推理过程的形式化，中国古代数学采用一种独特的以割补图形计算面积和体积的方式。对这种方式刘徽曾以“出入相补”加以说明，也即将图形切割、拼凑成简单已知的可计算的面积图形，然后在运用筹算获得结果，赵爽勾股定理的证明，可以看成是“出入相补”运用的最完美的杰作，其证明也被选作 ICM 2002 Beijing 会徽。证明示意图见图 11.3。

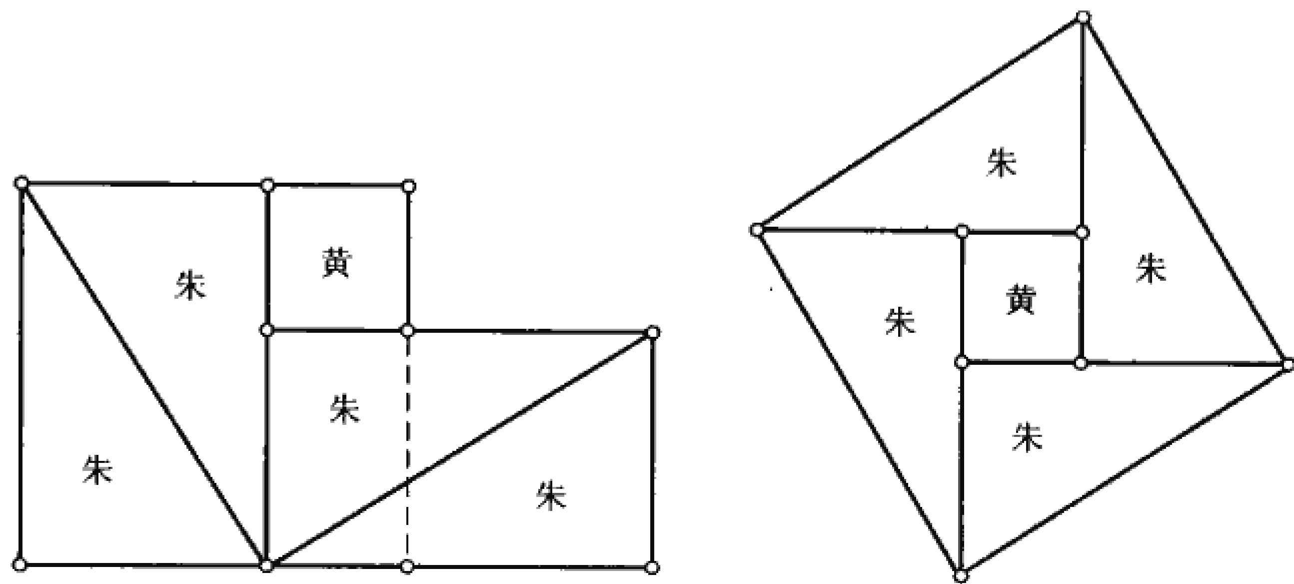


图 11.3　用“出入相补”证明勾股定理

由上述可见,《九章算术》所体现的中国古代数学的各种形式和方法,事实上是中国文化这样一种特定的文化系统对自己数学形式的选择。

作为对《九章算术》的评价,目前有两种明显对立的观点。一种观点认为《九章算术》为代表的中国古代数学并没有能够成理论体系。例如,李约瑟就认为"中国数学是很可以和旧大陆其他中世纪的民族在文艺复兴之前的成就相比",但是"从实践到纯知识领域的飞跃,中国数学是未曾参与过的"。另外,数学家陈省身先生在谈到数学史时也认为"得于国外的数学经验和有机会看中国的数学书,我觉得中国数学都偏应用,讲过分一点,甚至可以说中国数学没有纯数学,都是应用数学。"

另一种观点则认为中国古代数学以刘徽的《九章算术·注》为代表已经形成了逻辑的结构体系,有的数学史学家提出"古代东、西数学是风格各异的两种理论体系,如果说西方数学著作表述为逻辑的演绎体系,那么东方数学则是呈现出计算为中心的算法体系。"

11.3.2 其他数学成就简介

中国古代数学具有许多成就,如在唐代就形成了以算经十书为代表的数学教育的教材体系,而且有许多名题一直是世界数学教学的良好资料。如《孙子算经》中的"物不知数"问题、《张邱建算经》中的"百鸡问题"等在许多国家的数学教材中出现。又如杨辉三角所蕴涵的数学内容的研究及运用,成为中国古代数学的又一亮点。再如中国剩余定理对不定方程求解的作用等,这些都使中国古代处于世界数学的领先地位。

15 世纪的中国的算法数学发展到了世界的领先地位,秦九韶得到的"孙子定理"及"大衍求一术",李冶发展总结的"天元术"和朱世杰创立的"四元数",还有对杨辉三角形的研究和运用都是辉煌的成果,对世界数学作出了杰出的贡献。

11.4 比较与思考

11.4.1 《九章算术》与《几何原本》比较

我国古代著名数学著作《九章算术》与《几何原本》相比,既有相同之处,又有不同之处。相同之处如,从两书的材料来看,两书都是整理性的数学著作,分别对前人的数学成果进行了整理与总结;从两书的作用来看都起教科书的作用。两著作存在的不同之处主要体现在以下几个方面。

1. 受不同的价值观念的指导

《几何原本》是在数学作为表现世界、构造世界的基本形式这一价值观念下,展开它的理性意义上的构建的,这就使得《几何原本》建立在一种理性论证的基础上,适应文化理性思辨的要求。

《九章算术》是在中国文化实用技艺的价值观念下展开构成的,因此,作为实用的技艺,对当时的经济、技术问题给出具体的、可应用的方法,就是《九章算术》的唯一追求。

由于不同的民族文化可以造成在古代数学创造中所形成的数学形式、方法、构造等方面的不同,使两部数学史上的巨著,在数学形式和体系上都具有不同的特点。《九章算术》在实用主义文化的影响下,注重解决实际问题,而《几何原本》在理性文化的影响下,注重推理和演绎。

2. 思维特征及其差异

《九章算术》集中国古代数学大成于一体,突出地表现了数学的实用性、计算性、归纳性及模型化的特点。尤其是实用性,表现在以算筹为工具,步步都与具体的现实问题和需要相连。

《几何原本》也是古代西方数学的集大成于一体者,其思维特点是一种演绎的、抽象化的、公理化的思维创造。撇开具体的事实进行抽象的演绎,进入一个与现实没有直接联系的数学观念世界。只要符合数学推理本身的逻辑,即使其正确性在短时期难以应验,但随着现实条件的逐渐成熟,迟早一定会在现实中得到证实。

《九章算术》和《几何原本》是两种不同的思维发展方向:一个是向下,一个是向上。“向下者日益被现实所限制,向上者包含了更大的时空。”[①]

11.4.2 “公理化”及“算法化”的比较

“公理化”及“算法化”是分别产生于西中方数学研究的两种有代表性的方法,这两种方法具有完全不同的特点。

1. 两种方式产生背景的比较

所谓“公理化”方式,是“从某些基本概念和基本命题出发,依据特定的演绎规则,推导一系列的定理,从而构成一个演绎系统的方法”[②]西方公理化方法的特点是:定义、公理(或公设)⇒定理、证明,重点是形成演绎体系。这一方法的起源与古希腊的文化环境有密切的联系。

古希腊是一个对少数人具有民主的国家,这少数人中包括了数学工作者。

① 綦春霞.数学课程论与数学课程教材改革.北京:北京师范大学出版社.2001.12(12).

② 张奠宙.中学几何教学研究[M].北京:高等教育出版社,2006.1.

由于民主的需要，辩论和研讨成为社会文化的重要特点，从而形成一种崇尚理性的文化背景，而这种民主和崇尚理性的社会环境给数学研究过程中演绎推理的方式的产生提供了良好的条件。人们为了捍卫自己的结论自然要有论证，然而，也正是由于这种论证的需要，人们只对演绎推理感兴趣，而对实际问题并不感兴趣，因此将实际问题抽象为思维对象是必然的。而数学的高度抽象形式由于与人们的思维有较大的距离，如没有宽度和厚度的线、没有大小的点等概念只有少数人能够接受和理解，数学也就只能是少数人的专利，因此使数学进入“象牙塔”成为“冷美人”也就是必然的。这种研究方式的抽象性和人们对公理及原始概念的理解，也使公理化的研究方式具有完全趋于形式化而脱离实际的危险。

所谓“算法化”方式，是“为了解决一整类实际或科学问题而概括出来的、带一般性的计算方法。”中国古代的算法特点是：问、答⇒术、注，即先就一些具体问题进行“问”、“答”，然后由具体的“算”上升到“术”，再说明算法或公式成立的原因，也就是“注”，其重点是归纳出一类问题的“算法”。这一数学研究方式产生于中国也有其文化背景。

中国古代由于是封建统治，各种工作包括数学研究的目的，从一定意义上说都是为皇帝服务的，而工作的结果是否正确，最后都由皇帝或其代表来裁定，人们也就无须花费时间来对自己的研究成果进行辩护，因此，“证明”是没有必要的。由于数学具有“服务”的特点，因而结果是否实用就成为判断研究成果优劣的标准，因而“算法化”的研究方式具有与实际问题联系紧密的特点，但也正是这一特点，容易使研究缺乏抽象和概括，难以形成理论体系，这也是中国古典数学缺乏理论性和系统性的重要原因。

2. 方式的可接受性比较

“算法化”的数学研究方式由于缺乏论证，对结果的可靠性的模糊，使人难以置信。而与之相反，“公理化”的数学研究方式，虽然存在对公理可靠性的不同认识，但由于其演绎推理的严密性，不仅使人对其结果深信不疑，而且容易体验其科学性的一面，因此后者比较容易被接受也就是正常的了。我国清代数学家徐光启对欧几里得《几何原本》的评价可以说明这一点，徐光启认为“此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改。有四不得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更之不可得。”

另外，中国的数学研究在一定程度上说可以认为是体力劳动，从“出入相补”求面积、体积，从刘徽为了求圆的面积画了一个半径为一尺的圆，并“走来走去”地在其内作正多边形等，我们不难理解这一点。因而在“劳心者治人，劳力者治于人”的思想的统治下，数学的繁荣就只能是奢望了。而且由于在古代中国数学被认为是“可以兼明，但不可以专业”（颜之推语），其影响也就不可能扩大。古希腊的数学研究模式可以认为是一种纯脑力劳动，从研究方式上看是比

较容易让人理解为轻松又体面的工作，而且由于社会文化对数学的重视，因而进行数学研究成为人们的选择也就不足为奇了。

11.4.3 文化特点引出对数学的不同理解

西方古希腊以前的数学也是在人们的生活和生产实际中产生的，是一种经验的积累和总结，但由于古希腊民主社会的背景而导致的崇尚理性的思维特点，使数学也逐步由经验型发展为演绎型，特别是“不可公度”量的发现所引发的数学第一次危机，使人们进一步认识到“感性知识是不可靠的，只有理性知识才是可靠的”①。但是在西方数学发展并非一直沿着演绎型进行，实际上，在微积分创立的17世纪上半叶，虽然人们还未形成微积分的理论依据，却将其用于解决各种问题。然而，数学崇尚理性的传统文化特点，使人们将注意力集中在为微积分建立理论基础的努力上，这种努力最终使微积分成为具有严格理论基础的数学基础学科。

相反在中国，最早的数学研究是具有理性特点的，如战国时期的《墨经》中就对一系列数学概念点、直线、圆、平行等给出了抽象的定义，但其后由于社会文化传统对数学实用性单方面的要求，数学研究的主要目标是帮助君王统治、管理国家。因此，中国的古代数学，多半以“管理数学”的形式出现，目的是为了丈量田亩、兴修水利、分配劳力、计算税收、运输粮食等国家管理的实用目标，使人们忽视对数学问题的理性思考。如无理数等问题并未对数学造成影响，从表面上看对数学发展是好事，但实际上反映了中国数学研究者对“无理数”的性质和特点研究的忽视，而这种对理论问题的忽视，使中国数学缺乏由经验型向理论型的过渡，始终将实际问题作为数学的研究对象，因而数学便沿着经验型发展，未形成“算法”的理论。从这个意义上说，中国数学有其落后的一面。

古希腊的文化时尚，是追求精神上享受，以获得对大自然的理解为最高目标。因此“对顶角相等”这样的命题，在《几何原本》里列入命题15，借助公理3（等量减等量，其差相等）给予证明。在中国的数学文化里，不可能给这样的直观命题的证明留下位置。

同样，中国数学强调实用的管理数学，却在算法上得到了长足的发展。负数的运用、解方程的开根解法，以及杨辉（贾宪）三角、祖冲之的圆周率计算、天元术那样的精致计算课题，也只能在中国诞生，而为古希腊文明所轻视。

综上所述，一种数学研究方式能否得到健康发展，在很大程度上受制于这种方式所处的社会文化环境对其支持状况。人们对中国古代数学“算法式”的忽视，是历史的原因造成的，而不是因为这一研究方式本身的原因，也不意味着这

① 林夏水.数学哲学[M].北京:商务印书馆.7(41).

种方式是一种落后的研究方式。相反,古代中国的"算法"思想,由于计算机的普及和发展为其提供了有利的社会文化环境,并已经使其焕发出新的活力,成为实验数学的基础。所以数学究竟以什么研究方式存在并不重要,关键是人们应该认识和合理看待各种研究方式,并能依据实际研究的问题选择研究方式,这便是从文化的角度认识研究方式所应该给我们的启示。

虽然数学研究方式没有优劣之分,但却左右着人们对数学的认识,也就是说,对数学研究方式的认识是人们数学观形成的基础。如中国古代数学重"算"轻"理"的研究方式,使人们将数学看成是一种技艺。另外,由于中国古代数学在战国以后就缺乏对思维抽象物的讨论,因而数学研究总是与具体事物联系,使人们在数学观中将数学与其他自然科学等同而难以体现数学的特点。在西方随着公理化方式的集大成者欧几里得的《几何原本》的诞生,人们改变了数学是经验科学的看法,而将数学看成是演绎的科学;而微积分及解析几何的诞生,虽然在初期存在理论上的不严密性问题,但由于其解决实际问题的有效性,被数学家广泛应用,而成为17世纪数学的主流,从而使人们将数学又看成经验科学;而形式公理化的产生主要是由于人们对《几何原本》公理体系的反思所引发的非欧几何的创立,从而使人们又重新认识到数学是一门演绎的科学。从上述中西方人们对数学看法的发展过程,我们不仅可以解释数学观的多样性,而且也能解释数学观为什么是随着数学的发展而变化的。

数学观与数学研究方式一样也无优劣之分,但却又可以强化人们对数学研究方式的肯定或否定。由于数学观与数学研究方式的这一联系,我们就可以解释为什么人们只认为公理化方式是科学的,这是由于人们普遍将数学看成是一个严密而科学的知识体系。

由于文化的差异,使得数学的研究对象、研究方法、思想体系都产生了巨大的差异,这自然就存在一个关于数学究竟是什么、应该怎么样研究数学的问题,也就是数学本质的问题。

11.4.4 对数学理解的比较

1. 关于数学的本质的问题

对于事物的本质,人们通常会认为是最需要弄清楚的事实,也是最基本的。但是,最基本也就是最不易澄清的。对于数学本质的理解也是如此,数学家、哲学家对数学本质的认识一直没有一个统一的结论。

对数学本质的认识可以归结为数学中的经验主义与理性主义的传统之争。由古希腊时代发展起来的数学传统,充分肯定了演绎的真理性。从一组不加证明的基本命题和不加定义的概念出发,运用逻辑运算的规则形成的一个演绎体系。这种演绎法进一步发展成为数学中一种一般化的方法——公理化方法,不

仅使数学成为人类直接应用逻辑的力量探索现实世界独一无二的科学，同时也使得数学开始成为一个严密的、抽象性形式体系。

数学的经验性也是数学的一个很重要的来源，特别是计算机的出现改变了数学只是用纸和笔进行研究的传统方式，给数学家的工作带来了最先进的工具，数学研究从此发生了某种变化。一些数学家正在创立一种新的做数学的方法，即主要通过计算机实验从事新的发现。由于这种研究方法是与传统方法很不相同，因此，在这些数学家看来，计算机的使用正在改变数学的性质：数学正在成为一门实验科学。

从数学发展的历史进程来看，数学一直沿着纯数学和应用数学两个方向发展。一方面，有的数学家认为数学是一种抽象性、严密性的逻辑体系，是一个符号化的形式系统，数学起源和发展并不是为了实际运用，往往只是一些数学家个人爱好，美的追求，仅仅是为了数学本身而研究数学；另一方面，又有的数学家认为数学是来源于经验，是应用最为广泛的科学，现代社会无一不用到数学。对数学的认识常常在这对立的两极之间徘徊，不能取得一致的意见，也许根本就没有，可能也没有必要有完全统一的认识。

对数学本质的理解和认识随着时代的发展而发展，而且数学家对数学的本质的不同认识直接影响到数学家对数学的研究。任何一种数学观念（即对数学本质的认识）的产生都与一定的民族文化背景相联系，但是数学观念一旦形成就决定着数学的发展方向。在数学发展史上，不同民族的数学观念是不相同的。古希腊人把数学视为一种思维流派，强调数学理论思维的培养，几何成就相对突出，这与其文化背景下的注重人与自然的关系的思维方式是一致的。古代东方国家由于关注数学的实用价值和功利价值，因而高度重视算术与算法，数学理论则较为粗糙。

2. 数学的存在方式

数学起源于“算”，由算发展出多种不同的数学形式，其中具有代表性的是“公理化”和“算法化”形式，但只有“公理化”形式才成为一种普遍接受的数学研究方式。正如郑毓信教授在他的《数学文化学》中指出，西方数学并不是人类历史上唯一可能的数学形式。但人们在思想和行动上有意无意地将诞生于古希腊的公理化的研究方式作为数学研究的主流方式，而将诞生于以中国为代表的东方的算法化的研究方式在很长时间看成是数学研究的一种辅助方式。这与两种方式产生和“成长”的环境、研究方式可接受性、特别是它们与社会文化背景适应程度有密切联系。正如英国著名历史学家汤因比（Arnold J. Toynbee）曾指出的，世界上曾经存在21种文明，但只有希腊文明转变成了今天的工业文明，之所以如此，就是因为数学在希腊文明中提供了工业文明的要素。

“公理化”和“算法化”两种模式是数学研究的两个不同的研究方式，它们都

有自己成长和发展的社会文化背景,都是数学家们长期形成的行为模式,因而都是一种文化。以中国为代表的数学研究中的"算法化"方式,虽然比西方的"公理化"方式起源早,但由于其"成长环境"的影响,发展比较缓慢。但计算机技术的发展却又为其提供了充分发展的社会文化环境,因此,其成为一种重要的数学研究方式也就是必然的。其实,随着社会的发展,各种数学研究方式都将具有用武之地。

"演绎式"和"算法式"两种数学研究方式都不是完美的,"算法式"在创造性方面的优势正是"演绎式"的弱势,而"演绎式"在严密性方面的优势也正是"算法式"的弱势,因此两者的完美结合是数学发展的重要途径。这正如李文林教授所说,"缺乏演绎论证的算法倾向和缺乏算法创造的演绎倾向同样难以升华为现代数学。"

前面论述可以看出,一种研究方式是否"流行"在一定程度上取决于其文化背景,取决于其研究方式是否比较容易被人接受。所以过分张扬某一方面而忽视另一方面,都将给数学发展带来不利影响。计算机的外在特点是"算",而内在特点是"逻辑",因而计算机体现了两种数学思想的融合,也体现了中西两种文化的统一性。

不同时期、不同地点的数学具有自身的特点,但都是一种精神的反映。公理化从直观性公理体系⇒思辨性公理体系⇒形式化公理体系的发展过程[①],反映了西方数学崇尚理性,追求真理的精神。从赵爽的勾股定理的证明成为数学经典⇒刘徽对圆的面积和球的体积公式的研究⇒祖冲之父子对球的体积公式的完美发现,反映了东方数学崇尚实用、追求精确的精神。无论是什么精神,对数学的发展和形成具有重要的意义。

11.5 文化视角下的数学研究

数学是文化的重要组成部分,只有从文化的角度认识数学,才能全面理解和认识数学。

11.5.1 还数学于本来面目

英国数学家和哲学家罗素(Russell B)曾说,数学,如果正确地看它,则具有……至高无上的美——正像雕刻的美,这种美不是投合我们天性的微弱的方面,这种美没有绘画或音乐的那些华丽的装饰,它可以纯净到崇高的地步,能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。一种真实的喜悦的

---

① 张奠宙.中学几何教学研究[M].北京:高等教育出版社 2006.1(33~50).

精神,一种精神上的亢奋,一种觉得高于人的意识——这些是至善至美的标准,能够在诗里得到,也能够在数学里得到①。罗素以哲学家特有的方式揭示了数学严谨结构之完美,表达了数学形式高度抽象的美。然而这种美,因为其内涵的深邃、外表的冷峻,而且是一种静态的美,使人很难体验,这是人们从逻辑和结构的角度很难发现数学的美的原因,也是人们冷漠数学的主要原因。

任何事物都具有内在和外在的两种不同层次,数学的结构是其外在的表现形式,而外在形式形成的内在原因就是其文化特点。我们从文化的角度研究数学,不仅可以看到数学的结构和逻辑,还能看到数学产生的背景、数学家个人观念的影响、数学的发展过程,从而体验到数学亲近自然的一面,体验到数学生命的存在,体验到数学的动态美。由于内因对外因具有决定的作用,因而我们从文化的角度研究数学不仅可以揭示数学外在形式产生的内在原因,并能理解数学形式的多样性和合理性。辩证唯物论认为,外因不仅由内因决定,而且对内因具有反作用,因而从文化的角度研究数学还能揭示数学已有的表现形式对数学发展的影响。

数学从本质上说是一种文化,因此,从文化的角度来理解数学,就是将数学还原为本来面目,这样一来我们就可以完整地认识数学,而不只是看到一副完美无缺的结构的雕塑,将数学"点化"为生动的、有生命活力的"美女"。数学的生命力来源于数学家的数学探索活动,来源于数学家对数学的态度。因此我们可以认为数学的生命来源于数学家的生命活动及生活的社会文化环境和数学传统以及由此而形成的价值观。

总之,数学的结构与数学的文化是数学的两个方面,前者以显性的方式存在而后者以隐性的方式存在,我们只有从这两个认识数学,才能全面地认识数学。

11.5.2 认识传统和价值观对数学发展的影响

所谓价值观就是人们对事物的判断是非的价值取向,从哲学家的角度可以将价值取向概括为两类,即以社会为本位的价值取向和以个人为本位的价值取向。数学家们不同的价值取向对数学研究成果具有不同的对待方式,而这种对待方式却有可能对数学的发展产生影响,特别是一些在数学发展史上具有重要作用的数学家。我们以毕达哥拉斯(学派)、牛顿、高斯的观念,和伽罗瓦、罗巴切夫斯基、康托尔对数学发展的影响来说明这一点。

毕达哥拉斯(学派)、牛顿、高斯虽然处于不同的数学发展时期,但是他们确有极为相似的地位,这种地位也就导致了他们处于类似的社会文化环境,具有类似的价值观,从而也就使他们对研究成果的处理方式也十分类似。毕达哥拉斯

① 李文林.数学史概论[M].北京:高等教育出版社,2002.8.

学派对自己发现的无理数的结果的隐瞒，牛顿对自己发现的微积分（即流数和反流数）的不肯公布、高斯对自己对非欧几何的发现的隐瞒，这些处理问题的方式极为相似，其结果也极为相似。毕达哥拉斯学派的行为导致对无理数的研究一直处于回避或“地下”工作状态，使人们对无理数的研究推迟了若干年。牛顿对研究结果的处理导致了数学史上一件令人遗憾的“优先权的争论”的官司，而且这一官司对英国数学也有一定的负面影响。高斯对研究成果的处理，不仅使一位有可能成为一流数学家，当时还是一位大学生的波约造成了极大的打击，并使非欧几何的研究也推迟了若干年。

伽罗瓦、罗巴切夫斯基、康托尔虽然也处于数学发展的不同时期，但他们对自己研究成果的处理方式也极为相似，他们不仅敢于发表自己的研究成果，而且敢于捍卫自己的研究成果，他们的处理结果的方式不仅推动了数学的发展，而且为数学研究开辟了崭新的天地。并形成了新的学科。

为什么相似的情况会在不同的数学发展时期出现呢，我们无法推断这些数学家的价值观，也不必妄谈其个性，我们只想说明价值观对数学具有重大的影响，这就是从文化的角度看数学与价值观的联系给我们的启示。

11.5.3 发现数学研究的特点

从文化的角度理解数学我们会发现数学研究具有很多特点。

1. 数学研究体现的是一种创造能力

数学首先是一种创造能力的体现。数学“作为一门心灵自然科学，作为一门精神自然科学，其研究对象和研究方式都是心灵的创造（Borel A）”[1]。数学的创造是对美的追求，如在欧氏平面中，点与直线的位置并不完全“对称”，如平面上任意两点可以确定一条直线，但两条直线却不一定能确定一个点（当两直线平行时），为了解决这种不对称性，德国数学家德萨格（Desargues G）首先在直线上引入了一个“无穷远点”，并把它看成与此相平行的各条直线的交点；另外，所有“无穷远点”则又构成了所谓“无穷远直线”，而这一创造的结果，便标志着射影几何的诞生。

数学的创造是对真理探索的过程，如对方程解的研究，伽罗瓦创造了“群”的概念，在数学家的不断努力下，发展成了近世代数和抽象代数，四元数的产生也是数学家创造力的成果。

数学创造力是数学家洞察力的体现，17 世纪的欧洲数学家，因其非凡的创造力而发现了导弹射程与曲边梯形面积两者之间的关系，从而创立了微积分。中国古代数学家祖冲之父子，也以其洞察力发现了“祖暅原理”从而推导出球的

① 郑毓信.数学教育哲学[M].成都:四川教育出版社.2004,3(13).

体积公式。

2. 数学的研究体现一种继承性

文化都具有继承性的特点，与自然科学相比，数学具有最强的继承性。数学在它的发展史上几乎没有出现过完全推翻前面的理论的例子。数学的每一次发展都是把前面的研究作为一个特例。例如，代数系统的发展，一维空间——二维空间——三维空间——n 维空间的发展，欧氏几何——非欧几何的发展，物体个数——集合的势的发展，相等关系——等价关系的发展等都体现出数学发展对先前研究的依赖性。

反观自然科学，却存在后来的发展彻底推翻前面的理论的许多例子。如曾经长期占统治地位的"地心说"被哥白尼的"日心说"所取代；人们长期的认识"两个物体在空中下落，重的一定比轻的下落速度快。"被伽利略的理论取代，也即"两个物体在空中下落，无论轻重，下落速度一样的"；"燃素说"在氧气发现后被推翻。

3. 数学研究具有地域性和超地域性的特点

人类的出现首先就是分地域的，而且在古代互相隔绝，各个群体便按照自己不同的方式来创造自己的文化，因此文化便具有地域性的特点。数学作为人类的文化，也具有地域性的特点。前面关于中国古代数学与古希腊数学的比较我们已经可以认识到这一点。其实，同样是西方数学，由于产生的地域不同，也会带有差异。正如怀尔德（Wilder R）指出的"法国数学家偏爱函数论，英国数学家对应用感兴趣，德国数学着重数学基础，意大利则感兴趣于几何，而美国的数学则以抽象特征著称。"[①]可见，虽然都是数学研究，但在不同的国度或不同的文化区域的人们会从不同的角度看待问题。

数学除了具有地域性的特点外，还具有超地域性的特点，这正如有的数学家所形容的"春天的紫罗兰处处开放"，我们从印度、埃及、巴比伦的数学所具有的实用的、算法的等共性可以认识到这一点。另外，我们从古希腊的数学家阿基米德和中国古代的数学家刘徽对圆和球的研究思路和研究方式的共性也能认识到这一点。如今数学已经成为一种世界共同的语言更能体现这一点。

4. 数学研究具有时代性和超时代性的特点

文化具有鲜明的时代性特征。也就是说，一个时代的文化与另一个时代的文化会出现明显的差别。数学依据这一特点可以划分为萌芽时期、常量数学时期、变量数学时期、近代数学时期和现代数学时期，各个时期也具有鲜明的特点。萌芽时期的数学表现为朴素的直觉的观察和度量；常量数学阶段数学体现出理性、严谨和精巧的特点，数学的研究对象具有相对固定的特点；变量数学阶段的

① 郭华光，等. 试论数学的文化特性. 数学教育学报，2005.3.

数学表现出发展异常迅速和研究成果应接不暇的特点，辩证法也开始进入数学，数学研究对象具有变化的特点；近代数学阶段的数学表现出抽象的特点，数学研究对象也由来源于实际，发展为既研究来源于实际的对象，也研究来源于数学本身的抽象对象，如群、环、域等成为数学研究对象；现代数学阶段的数学具有“自由化”的特点，由于非欧几何的创立，人们已经不再把真理和客观规律与数学等同起来，而将数学研究看成是创造的过程。

数学文化还具有超越时代的特点。首先数学研究的结果在任何时代都具有实用性，如欧几里得几何学成为几千年数学学习的对象，而且其中的定理在其研究空间的可靠性不会随着时代的变化而变化。另外数学研究的思想也具有超越时代的特点，如阿基米德和刘徽对无限分割的研究，为微积分的创立提供了思想基础。其实很多近代数学的思想在古代已经产生，如无穷的思想和对无穷的研究，产生于许多文明古国，并形成“潜无限”论和“实无限”论，这些都为后期的研究提供了基础。

11.5.4 比较数学与文学的共性

数学的继承性的特点，使数学发展为一个庞大的且一脉相承的体系。可以与数学的这一特点相提并论的不多见，但语言文学却也具有这一特点，任何一种语言也不会否认以前的字义、词义，只会不断地扩充和引申。其实数学与文学具有许多相似之处。

我国数学教育大师徐利治先生对数学与文学的关系进行了研究，形成了数学美学的思想。徐先生对数学与文学的关系的研究对我们颇有启发。徐先生认为在文学小说创作上，要讲究某种“造型”的艺术。所谓文学造型就是去塑造某种典型人物和典型题材。文学典型是抽象概括过程的产物，它们来源实际生活而高于生活实际。例如，鲁迅创作出来的“阿Q”典型及其典型性格，就是从现实生活中的一批人物中，抽取出“精神胜利法”的通性后而塑造的人性模型。这其中包括有抽象思考过程。类似地，数学模型方法也是一种造型艺术。数学造型就是去构筑、创制或设计美好的数学模型或理论模式。它们也都是抽象的产物，来源于实际背景而超越实际背景。

德国19世纪的分析数学大师魏尔斯特拉斯(Weierstrass K)曾经说过：“真正的数学家都有几分诗人气质。”国外的传记作家常常把数学家和诗人归入同一类，就是因为他们都能创造出优美的精神产品[①]. 张奠宙先生曾经提到唐代陈子昂的名作《登幽州台歌》：“前不见古人，后不见来者。念天地之悠悠，独怆然而涕下。”中，用形象化的生动语言表述了“宇宙时空的无限性”。近代史上的罗

① 徐利治. 数学美学与文学. 数学教育学报，2006.2(5).

素,不仅是数理逻辑的创始人,而且还是诺贝尔文学奖的获得者。

11.6 数学教育传统的形成

数学教育也是文化的产物,在其形成和发展的过程中,受到文化传统的影响,形成各种数学教育的传统。

11.6.1 文化传统对数学教育的影响

1. 东西方文化传统在教育上的反映

从文化的角度进行分析,我们就会发现整体的文化传统对数学教育的重要影响。

由于东西方有着不同的文化传统,在数学教育上也就有不同的形式。例如,按张奠宙先生的分析,东西方的数学教育有以下不同的特征。

东方:考试严厉,教师中心,注重演练,负担过重,强调严密,形式演绎,注重模仿,相对平均,弱于自信;

西方:考试温和,学生建构,强调理解,课业不足,注意趣味,非形式化,注重创造,两极分化,善于表达。

实际上,"规范性"与"(个体)发展性"可以被认为最为集中地反映了东西方数学教育的差异。也就是说,东方在数学教育中比较强调规范化,而西方则更注意个性的发展。

2. 东方教育传统产生的原因

张奠宙先生从社会文化的教育观念方面对造成"东方数学教育传统"的文化原因进行了分析,认为深深扎根于中国传统文化之中的"苦读+考试"的观念,是形成数学教育传统的原因。形成"苦读"的原因包括(1)儒家文化:现世功业,于修行来世的哲学不同;(2)家庭期望:望子成龙,光宗耀祖;(3)学习传统:寒窗苦读,读书不必快乐,兴趣居于次要地位;(4)教师中心:天地君亲师,传道,授业,解惑。形成"考试"的原因包括:(1)科举争胜:读书的目的是通过考试,"好胜"取代了对大自然的"好奇";(2)八股程式:代圣贤立言,固守套路,不求创造;(3)教育古训:熟能生巧,背诵模仿为主;(4)试卷为本:一张考卷定终身,评价机制僵化。

3. 西方教育传统产生的原因

西方教育传统产生于所谓"博雅教育",它源于古希腊,又为古罗马人所延续和发展,并在中世纪的教会学校中得到了勃兴。19世纪末和20世纪初,它代表了欧洲和美国中等教育的主要路线。此后由于受进步主义教育的影响而声势日微,20世纪50年代后,随着"回归基础"运动的展开而重新兴起。

何为博雅教育(liberal education,也译自由教育、普通教育、文雅教育)? 很难找到一个明确的解释。按英国学者朗特里(Rowntree D)的界定,旨在解放思想和精神,避免专门化和不做就业准备的教育;教育的目的不是准备谋生,而是“准备生存”。

以上分析说明文化传统对数学教育的重要影响。也就说明任何一种数学教育传统都有其深厚的文化背景,要改变不是经过一次重大的改革就能做到的。而且,任何一种数学教育传统也都有其合理的成分,否认这一点是危险的。因此数学教育改革应该走互相借鉴,共同发展的道路。

11.6.2 教师的观念对数学教育的影响

数学教师的观念产生于文化传统和教学经历,而教师的观念一旦形成,则在很大程度上决定了数学教育的过程和数学教育的结果。这里我们主要是从教师的“数学观”和“数学教育观”来分析这种影响。

1. 教师的数学观对数学教学的影响

所谓数学观,是对数学的认识和看法,即关于“数学是什么?”的问题的回答。任何一位数学教师都具有自身的数学观念,不同的教师具有不同的数学观,即使是同一个教师在不同的教学环境中或不同的教学阶段也可能持有不同的数学观念。但是数学观念的存在方式可以是显性,也可以是隐性的,因此并不是任何教师对自己所拥有的数学观念都很明确。

在一个时代或一个民族,个人的数学观念将综合形成社会的数学观念,也就是数学观念的社会层面。数学观念的社会层面(社会的数学观)对整个社会的数学行为、个人的数学行为以及数学教育行为,都将产生影响。这从我国的不同历史时期的数学教育情况清晰可见,文化大革命时期,读书无用,整个社会的数学教育不论从形式上还是从内容上都遭到严重破坏。恢复高考以后,上大学成为学习者的社会召唤,人生的“独木桥”必然导致应试教育的体制氛围。数学观念的社会层面又反过来对个人的数学观念产生影响,如当前国人过于注重数学的工具作用(主要是运用于各种考试)的重要原因是目前“考必言数学”的结果。也就是说,数学观念的社会层面和个人层面是相互依赖的,因而教师的数学观念也是社会数学观与教师本人对数学的认识的共同结果。

任何一个数学教育改革运动都反映了一定的数学观念,20 世纪 60 年代遍及欧美的影响很大的“新数运动”,正是以形式主义的数学观念作为思想基础的,过分注重数学知识的逻辑结构,而忽视了实际的认识过程和认识能力。1957 年苏联第一颗人造卫星上天,引起了超级大国的空前危机,将问题的症结归于数学的落后。于是掀起了中学数学教学改革运动,企图以现代数学代替传统数学,结果因不合实际而宣告结束。我国要实现数学教学从应试教育向素质教育的转

变，关键是数学观念的转变，数学教育应由功利性向素质性观念转变。

按照英国学者欧内斯特（Ernest P）的观点，对于教师所具有的数学观念可以大致区分出以下三种：

(1) 动态的、易谬主义的数学观。这是指将数学看成是人类的一种创造性活动，从而认为数学一定包含有错误、尝试与改进的过程，处于不断发展之中；

(2) 静态的、绝对主义的数学观。这是指将数学看成是无可怀疑的真理的集合，是一个精心组织起来的高度统一且十分严密的逻辑体系。

(3) 工具主义的数学观。这是指将数学看成适用不同场合的结论、方法和技巧的汇集，由于这些技巧和方法等适用于不同的场合，因此数学不能被看成是统一的整体。

教师持有的数学观念将对数学教育产生影响。如果一个教师持有动态的、易谬的数学观，则在教学中就能尽力体现数学的创造过程和发展过程，注意数学研究方法和数学思想方法的教学，使数学教育成为学生运用数学研究的思想方法解决数学或实际问题的过程。而且在教学中不容易产生局限性，而使学生的思维僵化。如在讲解“距离”问题时，就不至于使学生产生“在平面内到定点的距离等于定长的点的轨迹一定是圆”的片面认识。就能够引导学生认识到，到定点的距离等于定长的点的轨迹是什么必须依赖于对“距离”的定义，而对“距离”的定义需要满足“距离公理”。换句话说，在满足“距离公理”的前提下，可以对“距离”依据研究问题的状况进行定义，而对“距离”概念的不同界定，则决定了其轨迹也就不同。从而使学生体验数学研究对定义和公理的依赖性，从中体会数学的特点。也就是说，教师的教学就不单是知识的传授，而同时是方法的教学和思想的渗透。

如果教师持有静态的、绝对主义的数学观，就将以静止的眼光看待数学教学内容，在教学中也就更强调记忆和对知识的理解，而且在教学中对一些概念中的字或词总是强化。如教师在进行“函数”概念的教学时，就会特别强调定义中的“数集”，从而使学生对函数的理解出现僵化，为后期学习带来困难。其实，函数关系只是数学中“关系”的一种，而关系是不限于数之间的关系的，因而，函数也不限于“数集”，但在中学所讨论的函数只限于“数集”。

如果教师持有工具主义的数学观，则在数学教育中，会较多地注意数学的工具特点，强调数学的应用性，如对物理、化学学习的作用等。

2. 教师的数学教育观对数学教育的影响

所谓数学教育观念，则是指关于如何看待数学教育，也就是对“什么是数学教育?”的回答。教师的数学教育观也是不断发展和变化的。一些研究提出，对于教师所具有的数学教学观念，可以大致分为四种类型：

(1) 以学生为中心的数学教学思想。即认为数学教学应当集中于学习者对

数学知识的建构；

(2) 以内容为中心、并突出强调概念理解的数学教学思想。即认为应当围绕数学内容来组织教学，并应特别重视概念的理解，从而，认为在教学中就不仅应该讲清楚"如何"，而且还应该讲清"为何"；

(3) 以内容为中心、并突出强调数学的运作的教学思想。即认为数学教学应当特别重视学生的运作及其对于各种具体的数学技能的掌握；

(4) 以教学法为中心的数学教学思想。这种教学思想的主要特征就在于：与特定的教学内容相比，教师更加重视教学法方面的问题，如教学情境的创设、环境的布置等。

正是因为教师的教学都是在一定的教学观念的指导下进行的，所以，英国著名数学教育家斯根普曾这样写道"我们并不是谈及关于同一数学的较好的和不那么好的教法。只是在经过了很长一段时期以后，我才认识到并非是这样的情况。我先前总认为教师都在教同样的科目，只是一些人比另一些人教得好而已。但我现在认为在'数学'这同一个名词下所教的事实上是两个不同的学科。"

无论是教师的数学观念还是教师的数学教育观念都是文化传统的产物，而且又是形成新的文化传统的因素，所以，我们只有将教师的观念与其所在的传统文化联系起来，才有可能对其理解更深。

11.7 作为课程的数学文化

11.7.1 将数学文化纳入课程

1. 新课程对数学文化的重视

全日制义务教育数学课程标准指出，"数学是人类的一种文化，它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分"。普通高中数学课程标准(实验)解读中提到，"一般说来，数学文化表现为在数学的起源、发展、完善和应用的过程中体现出的对于人类发展具有重大影响的方面。它既包括对于人的观念、思想和思维方式的一种潜移默化的作用，对于人的思维的训练功能和发展人的创造性思维的功能，也包括在人类认识和发展数学过程中体现出来的探索和进取的精神和所能达到的崇高境界等"①。

高中新的课程标准对高中数学课程的基本理念提出了多方面的要求，其中之一就是体现数学的文化价值，认为数学是人类文化的重要组成部分，数学课程应当适当反映数学的历史、应用和发展趋势，应反映数学对推动社会发展的作

---

① 数学课程标准研制组. 普通高中数学课程标准(实验)解读(M). 南京：江苏教育出版社，2004.

用、数学的社会需求、社会发展对数学发展的推动作用,反映数学科学的思想体系、数学的美学价值、数学家的创新精神。数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用,逐步形成正确的数学观。为此,高中数学课程提倡数学的文化价值,并在适当的内容中提出对"数学文化"的学习要求,设立"数学史选讲"等专题。

由此可见,无论是义务教育的数学课程还是高中的数学课程都对数学的文化价值给予了足够的重视,并提出了明确的要求。

2. 数学文化的教育价值

作为课程形态的数学文化具有其他学科所不能整合的教育价值:科学方面的教育价值和人文方面的教育价值。

首先是科学方面的教育价值,主要是指:通过严格的数学证明和计算,解决一些数学问题,从而可以培养人严谨朴实的科学态度,使人思维严密,做事有条理;数学文化在生产生活领域发挥工具性作用和技术性作用,能够使人更好地从事生产和改造自然。

另外是人文方面的教育价值,主要是指:数学能够使人具有理性,培养理性的人、理智的人;数学可以提高人的审美能力;数学教学过程能促进人的数学化,使人具有理性的体验,并形成与之适应的情感、意志、价值观;数学具有德育功能,使人求真、求善、求美,数学能反映社会主义建设的现实,反映数学发展的历史,能培养人的辩证唯物主义观点、培养良好的思维品质、欣赏数学的美学价值,能使人获得文化的熏陶。

目前数学教育的科学价值已经被人们所共识,而数学的人文价值常常被人们所忽视。甚至存在着一种将数学与人文对立起来的偏见,似乎数学课程的目的仅仅是弘扬科学精神,从而导致了数学课程中人文精神的"缺失"。因此我们应该在数学教育中将科学教育价值和人文教育价值统一起来,和谐发展学生的数学素养。

3. 数学文化教育价值的实现

倡导什么样的数学文化,就会导致什么样的数学教育。数学从本质上说是一种文化,因而数学教学首先是文化的教学,数学教育也只有深入到这门学科的文化层面,才能获得真正的数学素养,从而实现数学文化的教育价值。

首先,应转变观念。应建立全新的文化的数学教育观念。这里至少要注意三个问题。一是要优化外部环境。也就是说,要使更多的人了解数学的文化价值,认识数学文化的作用;二是要改变教学观念。要改变将教学目标局限在对学生的知识和能力等方面,应该体现培养学生的数学文化修养;三是要加强理论研究。将对数学的认识和教学上升到一种理性的思考。

其次,在进行教学设计时,应将数学看成是一种特定形态的人类文化,或可

以称为人类文化的"子文化"。它是一种反映理性主义、思维方法、美学思想与文化教育功能意识的特定的知识体系。

再次,应具有文化特征的数学课程观,也就是说在数学课程的设计中,在充分反映科学数学的文化特征的同时,应充分体现数学史、数学家的探索精神和独特素养以及数学思维的智慧与创新、数学发展中的合作与民主。再就是具有文化特征的数学教学观,也就是说在进行数学课程实施时,应关注数学人文方面的教育价值,而不能仅仅"沉醉于数学题目的海洋"里,应关注学习者的感受,包括兴趣、情感态度和价值观等。

要实现数学的文化价值,还要充分发掘文化的数学的教育功能。王梓坤先生曾经指出,数学文化具有比数学知识体系更为丰富和深邃的内涵,数学文化是对数学知识、技能、能力和素质等概念的高度概括。我们学习数学不仅是为了获取知识,更要通过数学学习接受数学精神、数学思想和数学方法的熏陶,提高思维能力,锻炼意志品质,并把它们迁移到学习、工作和生活的各个领域。

要实现数学的文化价值,还应注意,要根据实际情况有计划、有步骤渐进式地推进数学的人文方面的教育,而不要从以往只关注数学的科学价值走到只关注数学的人文价值的另一个极端。

11.7.2 如何在中小学数学教学中进行数学文化教育

1. 认识数学文化的民族性和世界性

每个民族都有自己的文化,也就一定有属于这个文化的数学。古希腊的数学和中国传统数学都有辉煌的成就、优秀的传统。但是,它们之间有着明显的差异。古希腊和古代中国的不同政治文明孕育了不同的数学。

我们应当充分重视中国传统数学中的实用与算法的传统,同时又必须吸收人类一切有益的数学文化创造,包括古希腊的文化传统。当进入21世纪的时候,我们作为地球村的村民,一定要融入世界数学文化,将民族性和世界性有机地结合起来。

2. 揭示数学文化内涵,走出数学孤立主义的阴影

数学的内涵十分丰富。包括用数学的观点观察现实,构造数学模型,学习数学的语言、图表、符号表示,进行数学交流。通过理性思维,培养严谨素质,追求创新精神,欣赏数学之美等等。

半个多世纪以前,著名数学家柯朗(Courant R)在名著《数学是什么》的序言中这样写道:"今天,数学教育的传统地位陷入严重的危机。数学教学有时竟变成一种空洞的解题训练。数学研究已出现一种过分专门化和过于强调抽象的趋势,而忽视了数学的应用以及与其他领域的联系。教师学生和一般受过教育的人都要求有一个建设性的改造,其目的是要真正理解数学是一个有机整体,是科

学思考与行动的基础。”

丘成桐在接受采访时说:“由于我重视历史,而历史是宏观的,所以我在看数学问题时常常采取宏观的观点,和别人的看法不一样。”这是一位数学大家对数学文化意义的理解。这一论述启示我们,在揭示数学的文化内涵时,我们应该以发展的、历史的观点分析和研究数学。

和所有文化现象一样,数学文化直接支配着人们的行动。孤立主义的数学文化,一方面拒人于千里之外,使人望数学而生畏;另一方面又孤芳自赏,令人把数学家当成“怪人”。学校里的数学,原本是青少年喜爱的学科,却成为过滤的“筛子”。优秀的数学文化,应该是美丽动人的数学王后却仅被看成了一幅知识的框架。用文化的眼光看数学,就是要走出数学孤立主义的阴影,使数学教学变得生气勃勃,使数学变得有血有肉、光彩照人。

3. 多侧面地开展数学文化研究

谈到数学文化,往往会联想到数学史。确实,宏观地观察数学,从历史上考察数学的进步,确实是揭示数学文化层面的重要途径。但是,除了这种宏观的历史考察之外,还应该有微观的一面,即从具体的数学概念、数学方法、数学思想中揭示数学的文化底蕴。以下将阐述一些新视角,力求多侧面地展现数学与其他文化的相通之处,给读者一些启发。

(1) 数学和文学。数学和文学的思考方法往往是相通的。举例来说,中学课程里有“对称”,文学中则有“对仗”。对称是一种变换,变过去了却有些性质保持不变。轴对称,即是依对称轴对折,图形的形状和大小都保持不变。那么对仗是什么?无非是上联变成下联,但是字词句的某些特性不变。王维诗云:“明月松间照,清泉石上流”。这里,明月对清泉,都是自然景物,没有变。形容词“明”对“清”,名词“月”对“泉”,词性不变。其余各词均如此。变化中的不变性质,在文化中、文学中、数学中,都广泛存在着。数学中的“对偶理论”,拓扑学的变与不变,都是这种思想的体现。文学意境也有和数学观念相通的地方。徐利治先生早就指出:“孤帆远影碧空尽”正是极限概念的意境。

(2) 欧氏几何和中国古代的时空观。前面提到的初唐诗人陈子昂的名句“前不见古人,后不见来者,念天地之悠悠,独怆然而涕下。”这是时间和三维欧几里得空间的文学描述。在陈子昂看来,时间是两头无限的,以他自己为原点,恰可比喻为一条直线。天是平面,地是平面,人类生活在这悠远而空旷的时空里,不禁感慨万千。数学正是把这种人生感受精确化、形式化。诗人的想象可以补充我们的数学理解。

(3) 数学与语言。语言是文化的载体和外壳。数学的一种文化表现形式,就是把数学融入语言之中。“不管三七二十一”涉及乘法口诀,“三下五除二就把它解决了”则是算盘口诀。再如“万无一失”,在中国语言里比喻“有绝对把

握”,但是,这句成语可以联系“小概率事件”进行思考。此外,“指数爆炸”“直线上升”等已经进入日常语言。它们的含义可与事物的复杂性相联系(计算复杂性问题),正是所需要研究的。“事业坐标”“人生轨迹”也已经是人们耳熟能详的词语。

(4) 数学的宏观和微观认识。以函数为例,初中和高中的函数概念有变量说和对应说之分,其实是宏观描述和微观刻画的区别。初中的变量说,实际上是宏观观察,主要考察它的变化趋势和性态。高中的对应则是微观的分析。在分段函数的端点处,函数值在这一段,还是下一段,差一点都不行。政治上有全局和局部,物理上有牛顿力学与量子力学,电影中有全景和细部,国画中有泼墨山水画和工笔花鸟画,其道理都是一样的。从这样的观点考察函数就会发现这些在函数中都有相应的体现。

(5) 数学和美学。数学始终都将对美的追求作为研究的重要思路,数学不仅追求和谐的美、对称的美,如椭圆、双曲线方程的推导。而且追求直觉的美,如立体几何、平面几何的图形绘制。

总之,在中小学进行数学文化的教育,对教师的素质和知识提出了更高的要求。教师不仅应掌握数学发展的历史,而且要了解数学思想、数学方法等与其他学科的联系和区别。当数学文化的魅力真正渗入教材、到达课堂、溶入教学时,数学就会更加平易近人,数学教学就会通过文化层面让学生进一步理解数学、喜欢数学、热爱数学。

11.8 数学史在数学教学中的运用

1972 年,在第二届国际数学教育大会上,成立了数学史与数学教学关系国际研究小组(International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics,简称 HPM),标志着数学史与数学教育关系作为一个学术研究领域的出现。通常我们也把这一研究领域本身也称作 HPM。1995 年,美国数学协会在国家科学基金资助下成立了数学史及其在教学中的应用研究所(Institute on the History of Mathematics and Its Use in Teaching)专门致力于研究如何将数学的历史运用于课堂教学。

在美国,早在 19 世纪 90 年代即有人提倡将数学史作为教学工具引入数学教学之中。美国学者核普勒(Heppel G)在 1893 年改进几何教学协会(Association for the Improvement of Geometrical Teaching)会议上宣读的一篇论文中[①],引用下面的诗句来说明当时内容枯燥的数学课本:

① G. Heppel. The use of history in teaching mathematics. *Nature*, 1893, 48: 16 - 18.

如果又一场洪水暴发，
请飞到这里来避一下。
即使整个世界被淹没，
这本书依然会干巴巴。

Heppel认为，要让学生不再觉得数学枯燥乏味，教师就必须告诉他：他正在学习的算术、几何、代数和三角是如何为满足人们的需求和愿望而发生进步的[①]。1919年，英国一数学会报告提出："每一个孩子都应该知道他所学习的这门学科的更为人文或个性的一面"，并建议"数学教室中应悬挂大数学家的肖像，数学教师在课堂上应经常提到这些大数学家的生平与数学研究，并对数学发现对人类文明进步的影响作出解释。"[②]60年代，英国心理学家科斯特勒(Koestler A)批评传统的教学方法，认为"传统的教学方法让学生面对的不是问题，而是现成的解答，这意味着剥夺了他的所有激动、关闭他的创造性动机，将人类的探索过程归结到一堆干巴巴的定理。"[③]英国数学史学会在1971年创建之初即将"促进数学史在教育中的运用"作为学会目标之一。

美国学者米勒(Miller G A)认为，数学史最大的作用乃是它在该学科的学习中注入更多的活力，它把数学概念从静态转向动态；通过记录数学家们在形成数学思想主流过程中所产生的影响，数学史使得数学人性化了。把科学人性化，这也正是著名科学史家萨顿(Sarton G)所追求的理想。按照萨顿的观点，如果要将数学人性化，最佳方法是讲授数学的历史。

在具有数学史研究传统的意大利，20世纪著名数学史家洛利亚(Loria G)十分关注数学史的教育价值。洛利亚认为，数学史是联结中学数学和大学数学教学的纽带。洛氏还提出数学史在数学与其他学科关系、发生教学法等方面的作用。[④]

著名数学家和数学史家M·克莱因(Kline M)十分强调数学史对数学教育的重要价值。以下是1970年代采访者针对克莱因的《为什么教授不会教书》一书对他进行采访时的一段对话：[⑤]

---

① F. Furinghetti, A. Somaglia. History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School*, 1998, **27** (4): 48.

② J. Fauvel, Maanen (eds.). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

③ I. Grattan-Guinness (ed.). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences* (Vol. 1), Lodon: Routledge, 1994. 11-12.

④ F. Furinghetti. The history of mathematics as a coupling link between secondly and university teaching. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 2000, 31 (1): 43-51.

⑤ D. J. Albers & G. L. Alexanderson ed., *Mathematical People: Profiles and Interview*. Boston: Birkhäuser, 1985. P. 171.

采访者:您在书中有一处说数的字母符号直到1600年左右才开始使用。您在前面的一处又指出,微积分的逻辑基础是在19世纪发展起来的,约在牛顿和莱布尼茨三百年后。但我们期望年轻学生喜爱代数,学生开始学微积分时就明白使用ε和δ的需要。您认为数学教材的编写者应该更加密切地坚持这门学科历史发展的顺序吗?

克莱因:我肯定相信历史顺序是教学的优秀指南。微积分入门中不该涉及ε和δ。这一严密性属于高等微积分。我们无需完完全全追随历史,但如果大数学家在作出某些创造时遇到困难,我们的学生也必会遇到。

采访者:您提倡每一位未来的(数学)教师都修数学史课程吗?

克莱因:每一位中学和大学数学教师都应该知道数学史。有许多理由,但最重要的一条理由或许是:数学史是教学的指南。

在克莱因眼里,数学史的重要程度可谓无以复加。克莱因坚信,历史上数学家所遇到的困难,课堂上学生也会遇到,因而历史对于课堂教学具有重要的借鉴作用。

M·克莱因批评只注重逻辑严密性的数学教材,指出:“数学绝对不是课程中或教科书里所指的那种肤浅观察和寻常诠释。换句话说,它并不是从显明叙述的公理推演出不可怀疑的结论来。”[①]他指出,数学家们自己当然喜欢用演绎的方法,但这并不能激发学生的兴趣。从历史上看,在曾经鼎盛过的数以百计的文明中,只有一个希腊文明发展起我们今天所崇尚的演绎数学,这就充分说明:抽象的、演绎的数学并不是自然的,它远离一般人的思想、兴趣和行为。它是一门高度复杂、难懂、甚至深奥的学科。克莱因指出,数学家所经历的困难、挫折对学生具有很好的教育意义:“通常的一些数学课程也使人产生一种错觉。它们给出一个系统的逻辑叙述,使人们有这种印象:数学家们几乎理所当然地从定理到定理,数学家能克服任何困难,并且这些课程完全经过锤炼,已成定局。学生被湮没在成串的定理中,特别是当他们正开始学习这些课程的时候。……课本中的字斟句酌的叙述,未能表现出创造过程中的斗争、挫折,以及在建立一个可观的结构之前,数学家所经历的艰苦漫长的道路。而学生一旦认识到这些,他将不仅获得真知灼见,还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气,并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧。实在说,叙述数学家如何跌跤,如何在迷雾中摸索前进,并且如何零零碎碎地得到他们的成果,应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气。”[②]

① M. Kline. Carl B. Boyer – In Memoriam. *Historia Mathematica*, 1976, **3**: 387 ~ 394.

② M. Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press, 1972. iii.

荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(Freudenthal H)则同时也是一位数学史家,他同样持有 M·克莱因的观点,称"年轻的学习者重蹈人类的学习过程,尽管方式改变"。他批评那种过于注重逻辑严密性、没有丝毫历史感的教材乃是"把火热的发明变成了冷冰冰的美丽",并认为数学史应该是数学教师用于数学教学的必备知识。[①]

无疑,到 20 世纪 70 年代,数学史对数学教育的意义已经是许多西方数学教育家的共识:利用它可以激发学生的学习兴趣、培养学生的数学精神、启发学生的人格成长、预见学生的认知发展、指导并丰富教师的课堂教学、促进学生对数学的理解和对数学价值的认识、构筑数学与人文之间的桥梁,等等。数学史与数学教育之间关系的理论研究的必要性已凸显出来。

11.8.1 数学史对学生学习的意义[②]

从学生的学习角度说,数学史在教学中有许许多多的作用,其中以下几点是重要的。

1. 激发学生学习数学的兴趣

1972 年 8 月 24 日,美国数学家魏尔德(Wilder R L)在全美数学教师协会(NCTM)大会演讲中称:"大家都知道一项最困难的问题,是学生自认对数学没有任何需要,愤恨被迫学习数学。假如他能够精神自主的话就不要学习数学。处理这类情形,只强调数学的技术是不够的,一定要运用到另外一些什么。对有能力欣赏数学在历史上所扮演的角色的学生,如一位教师还不能使学生们被数学所吸引,这位教师就不应再任教了。"[③]在魏尔德看来,数学史素养对于一个合格的数学教师而言是不可或缺的。因此他提倡在大学开设数学史课程。[④]

以下故事对激发学生学习的兴趣是有利的。

"牛顿二项式定理"的故事:法国著名昆虫学家法布尔(Fabre J H)师范毕业后被分配到乡下一个条件十分简陋的、全校教师只能挤在一张校长餐桌上吃饭的学校教书。尽管读师范时学过一些平面几何知识,但作为文科生的他,数学知识、特别是代数知识依然相当贫乏。用他自己的话说,开一个平方根,证明一个球表面积公式,已经是科学的顶点了。打开一张对数表,立即头晕目眩。可是有一天,一个报考桥梁工程专业的年龄与他相仿的不速之客登门造访。原来,这位

---

① H. Freudenthal. Should a mathematics teacher know something about the history of Mathematics? *For the Learning of Mathematics*, 1981, **2**(1): 30 ~ 33.

② 本节部分内容参考了华东师范大学数学系汪晓勤博士的讲学内容,在此致谢.

③ 魏尔德. 数学的文化价值及与其他科学的关系. 科学月刊,1974 年第 54 期.

④ R. L. Wilder. History in the mathematics curriculum: its status, quality, and function. *American Mathematical Monthly*, 1972, **79**(5): 479 ~ 495.

年轻人的考试科目中有数学，为了通过这场考试，他希望法布尔能辅导他学代数。真是病急乱投医。法布尔先是吃惊，接着是犹豫；但最后，不知从哪儿来的勇气，他竟然答应人家了：后天开始上课。自己不懂游泳，却要教别人游泳，怎么办？勇敢的办法是自己先跳进海里！这样，在濒临淹死的时候也许会产生一股强大的求生力量。可是，法布尔不光对代数一窍不通，而且连一本代数书都没有：他想跳进代数学的深渊，可是连深渊都没有。他想去买一本，可是囊中羞涩，况且他那里可不是想买就能买到的。离上课只有24小时。怎么办？有了。有位教自然科学课的先生，是学校领导层的人物，尽管在学校里他有两个单间，但平时住城里，也算是上流社会的人物了。法布尔猜想他房间里必有代数书；但由于人家高高在上，又怎敢开口言借？只有一个办法：偷。正逢休假日，四顾无人，法布尔幸运地用自己房间的钥匙打开了那城里度假的主人的房间。天从人愿！双腿有些发抖的小偷从书柜里搜索出三指厚的一本代数书来。神不知鬼不觉，法布尔回到了自己的房间。他急切地打开书本，一页又一页地翻看着，了无兴趣。大半本书翻过去了，突然，他的眼光停在了一个章名上："牛顿二项式"。誉满全球的17世纪英国大科学家牛顿，他的二项式是怎么回事？强烈的好奇心促使法布尔拿起笔，一边看，一边在纸上写字母的排列和组合，整整一个下午在排列和组合中度过。不可思议，法布尔竟然完全搞懂了！这下，他可以从容地应付明天的数学课了。这真是与众不同的课，人家从头开始，而法布尔则几乎是从末尾开始。他时而耐心地讲授，时而和那忠实而认真的学生进行讨论，第一次课成功了。牛顿二项式定理大大增加了法布尔的自信心。法布尔继续向更多的代数知识点发起冲击，壁炉里的火光伴着他熬了一夜又一夜。在知难而进的老师和认真忠实的学生共同努力下，他们最后啃完了代数课本。那年轻人如愿以偿，通过了考试。那本代数书被偷偷地放回了原处。后来法布尔继续向解析几何发起冲击，最后拿到了数学学士学位。[①]

这一故事实际上也就说明，数学并不是部分人的专利，只要付出了努力，基础数学是可以学好的。这样的故事对学生树立学习信心是有帮助的。

围绕"负负得正"的故事有很多。美国诗人奥登(Auden W H)曾武断地说："负负得正，其理由我们无需解释！"[②]奥登的话暗示我们：许许多多人在徒劳地寻求"负负得正"的理由。事实上，自从负数概念进入数学课本以来，人们就没有停止过对"负负得正"合法性的质疑。18世纪还有西方数学家认为"负负得正"这一运算法则乃是一个谬论；甚至到了19世纪，英国还有一些数学家不接

---

① 法布尔．昆虫记·卷九．鲁京明、梁守锵译．广州：花城出版社，2001(122～133)．

② M. L Crowley, K. A. Dunn. On multiplying negative numbers. *Mathematics Teacher*, 1985, **78**: 252～256.

受负数。如英国数学家弗伦德(Frend W)抨击那些"谈论比没有还要小的数、谈论负负得正"的代数学家,认为负数有悖常理,"只有那些喜欢信口开河、厌恶严肃思维的人才支持这种数的使用"。[1] 由于"负负得正"的不好理解,便也就成了一个教学难点了。所以教师在进行这部分内容的教学时,应该意识到学生理解的困难。

这些数学故事对学生学习兴趣的激发,对学生学习态度的养成都有积极的意义,教师要善于收集和利用这些素材,并将其巧妙地运用于数学教学之中,便能取得意想不到的教学效果。

2. 对学生的人格成长产生启发作用

蒙蒂克拉(Montucla J É)在他的《数学史》中讲述了古希腊大数学家阿基米德(Archimedes)的故事:公元前212年,阿基米德的家乡叙拉古被罗马人攻陷。当时,阿基米德仍在专心致志地研究一个几何问题,丝毫不知死神的临近。当一个罗马士兵走进他时,阿基米德让他走开,不要踩坏了他的图形,罗马小卒残忍地用刺刀杀害了他。

18世纪法国著名女数学家索菲·热尔曼年轻时正逢法国大革命,一次偶然在父亲的书房里发现蒙蒂克拉的书。她阅读了上述故事后,觉得数学肯定是世界上最有魅力的学科,不然阿基米德怎会如此醉心于它?在那以后,她深深爱上了数学,并且是在女性在学术上普遍受歧视时走上了数学研究的不归路。

美国著名数学家、诺贝尔经济学奖获得者、获第74届奥斯卡最佳影片奖、最佳导演奖的美国影片《美丽心灵》男主角的原型人物纳什(Nash J F)14岁时阅读美国数学家贝尔(Bell E T)的《数学精英》(Men of Mathematics),为费马的数学定理所吸引,独自证明了其中的一个定理,从此深深爱上了数学,而此前课堂上数学老师并没有让他对数学产生这样的爱好!

我们不会相信一个数学故事或一本数学家传记一定造就一名数学家,但数学家的奋斗经历对学生人格成长的正面启发作用是无可否认的。教师要善于运用欧拉、莱布尼茨、牛顿、刘徽、祖冲之等数学家为数学献身的故事激励学生的数学学习。

3. 不同时空数学思想的对比有利于拓宽学生的视野,培养学生全方位的认知能力和思考弹性

不同时空的数学家往往会作出同样的数学发现,一个概念、定义、定理、公式当然不会仅仅局限于课本中的某一种思想方法。拥有数学教材中有关概念、定理、思想方法产生和发展的历史知识,无疑会大大拓宽我们的视野,进而丰富和提升我们的课堂教学。让我们看一个等比数列求和的例子。在苏格兰埃及学家莱因得

---

[1] G. Howson. *A History of Mathematical Education in England*. Cambridge: Cambridge University Press.

(Rhind A H)于1858年购自埃及、时间属于约公元前1650年的埃及数学纸草(通常称为莱因得纸草或阿莫斯纸草,今藏大英博物馆)上,我们见到这么一张表:①

1	2801	房屋	7
2	5602	猫	49
4	11204	老鼠	343
	19607	麦穗	2401
		容积	16807
		总数	19607

通过研究发现,这是一个等比数列 $7, 7^2, 7^3, 7^4$ 的求和问题,其中左边两栏就是 2801×7 的具体算式。由此可知,古代埃及人已经总结出了等比数列 $7, 7^2, 7^3, \cdots, 7^n, \cdots$ 的前 n 项和 $S_n = 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ 的递推关系

$$S_n = (1 + S_{n-1}) \times 7.$$

因此我们有理由相信,古代埃及人已经知道等比数列

$$a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, \cdots$$

前 n 项和的十分灵巧的推导方法:因

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a + q(a + aq + aq^2 + \cdots aq^{n-2}) = a + qS_{n-1}$$
$$= a + q(S_n - aq^{n-1})$$

故当 $q \neq 1$ 时,有

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

而公元前3世纪古希腊欧几里得(Euclid)的《几何原本》第9卷命题35则是利用比例性质来推导等比数列求和公式的②。设有等比数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,公比为 $q \neq 1$。则有

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

利用分比定律

① C. S. Roero. Egyptian Mathematics. In I. Grattan-Guiness ed., *Encyclopaedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*. London: Rourledge. 1994. 30–45.

② T. L. Heath. *A History of Greek Mathematics*. London: Oxford University Press, 1921.

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_3 - a_2}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}.$$

再由合比定律，又有

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = q - 1,$$

这等价于我们今天的

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

可见，历史上许许多多精彩的思想方法被排斥于我们的教材之外。了解历史之后，我们当然不能说教材上的“错位相减法”是唯一适合于课堂教学的方法。在历史方法的对比中，学生开阔了视野，在不知不觉中还学会了欣赏数学。即使是运用错位相减法进行教学，也应该将这种思路的产生过程展示给学生。

实际上，类似的例子比比皆是。如被开普勒誉为几何学两大法宝之一的勾股定理，古代中国、希腊、印度、阿拉伯以及近现代欧洲都有证明，毕达哥拉斯、欧几里得、赵爽(3世纪)、刘徽(3世纪)等人的证明都完全可以引入课堂教学。张奠宙教授认为，一堂勾股定理课，实际上应该就是一堂数学史课。

又如球体积公式的推导，以往的高中课本采用的是17世纪意大利数学家卡瓦列利(Cavalieri B)的方法，而在历史上我们还有祖暅的截面法、阿基米德的力学方法和旋转体逼近法、开普勒的棱锥求和法等。

适当将历史上的数学解决问题的若干种方法引入课堂教学，不仅使学生明白，课本上给出的公式并不是唯一的方法，从而拓宽学生视野，培养全方位的思维能力。

另一方面，用数学问题的历史上的解法与课堂上学生自己的解法进行比较，对培养学生的学习兴趣会产生很好的效果。

4. 让学生了解数学的多元文化意义

数学从来不是某一个国家、民族或个人的专利，每一种文化都有其自己的数学。数学历史让学生了解到不同文化背景下的数学思想，从而理解数学的多元文化意义。

世界上数学文明最早出现在那个地区？在一次针对中学数学教师研究生课程班的测试结果中，近三分之一的教师把票投给了中国。这个结果值得我们深思。在传统数学教学中，数学史与爱国主义教育似乎是密不可分的，而在利用数学史进行爱国主义教育时，往往又是言必称中国人的某项成就“比国外早多少年”。如果我们在测试卷中加上“最早发现勾股定理的国家是哪一个”，那么想必也会有不少教师“自豪地”把票投给中国。

我们先关注一下古代两河流域的美索不达米亚文明的有关数学成就。古巴比伦时期(公元前1900—前1600年)数学泥版文献中的一些几何或代数问题表

明:勾股定理早在公元前两千年就已在两河流域文明中得到了广泛应用。

在大英博物馆所藏的一块巴比伦泥版上有如下数学问题:"已知矩形的长为4,对角线为5,问宽是多少?"解法是:"4乘4得16,5乘5得25,从25中减去16,余9。因为3乘3得9,故3即为所求的宽。"显然,巴比伦人用的是勾股定理。

美国耶鲁大学所藏的YBC 7289号泥版是一个已知正方形边长为30,求对角线的问题。

1936年,欧洲考古学家在离巴比伦古城约350英里的伊朗苏萨(Susa)城发掘出一组数学泥版。其中一块上有这样的问题:已知等腰三角形三边分别为50、50、60,求三角形外接圆半径。

迪巴伊(Tell Dhibayi)泥版是考古学家于1962年在巴格达附近发掘的约五百块泥版中的一块数学泥版,制作时间大约是公元前1750年。上面是一几何问题:已知矩形面积和对角线长,求矩形的边长。

在迄今发现的共约300块巴比伦数学泥版中,最让数学史家们感兴趣的莫过于美国哥伦比亚大学所藏Plimpton 322号泥版了。泥版上有15行、4列数字,原来人们还以为是一份账目。但是,奥地利著名数学史家诺伊格鲍尔(Neugebauer O)经过研究惊奇地发现:第3列数与第2列数的平方差竟都是平方数(少数行不满足这一规律,但据推测是抄写错误所致)!

研究表明,它是一张勾股数表。

英国著名数学家齐曼(Zeeman C)指出,如果巴比伦人使用了勾股数一般公式

$$a=p^2-q^2,\quad b=2pq,\quad c=p^2+q^2$$

那么,满足$q\leqslant 60$,$30°\leqslant A\leqslant 45°$且$\cot^2 A=\dfrac{b^2}{a^2}$($A$是勾$a$所对的角)为有限小数的勾股数只有16组。而Plimpton 322号泥版给出了其中的15组,其水平之高,令人惊叹不已。

泥版文献中还有一些围绕勾股定理的更复杂的问题,如已知a、$c\pm b$,求b、c;已知c、$a+b$,求a、b,已知ab、$a+b+c$,求a、b、c等。尽管在巴比伦泥版中我们还没有发现像中国《九章算术》勾股章中关于勾股定理的一般性叙述,但Plimpton 322号泥版却表明他们对该定理的认识决不限于几个特例。即便我们把勾股定理上溯到商高时代,巴比伦人仍拥有无可辩驳的优先权。

在西方文献中,勾股定理一直以古希腊哲学家毕达哥拉斯(Pythagoras)的名字来命名,但迄今并没有毕达哥拉斯发现和证明勾股定理的直接证据。据传,毕氏学派为了庆祝这条定理的发现曾宰百牛祭祀缪斯女神,但这又与该学派奉行的素食主义相悖。尽管如此,人们仍然对毕达哥拉斯证明勾股定理的方法给出了种种猜测,其中最著名的是德国数学史家汉克尔(Hankel H)等人的面积剖分

法。如图 11.4 在边长为 $a+b$ 的两个正方形中各含有四个全等的直角三角形，除去这些三角形后，两个图形剩余部分的面积相等，即 $c^2=a^2+b^2$。

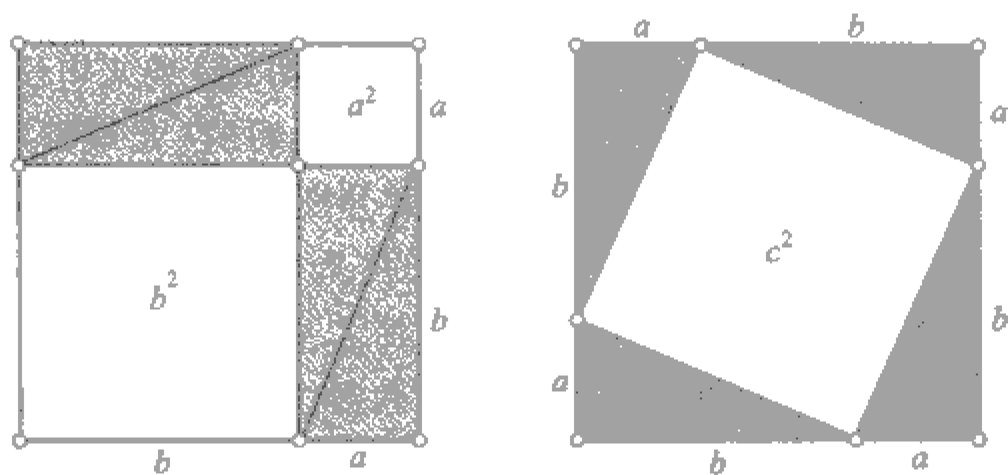


图 11.4　古希腊：后人推测的毕达哥拉斯证法

在希腊数学中，关于勾股定理的明确证明见于欧几里得的《几何原本》。如图 11.5，借助于全等三角形，证明正方形 *ACGF* 与矩形 *ADLO* 等积，同理矩形 *BELO* 与正方形 *BCHK* 等积。应该指出，由于《几何原本》的广泛流传，欧几里得的证明是勾股定理所有证明中最为著名的，希腊人称之为“已婚妇女的定理”；

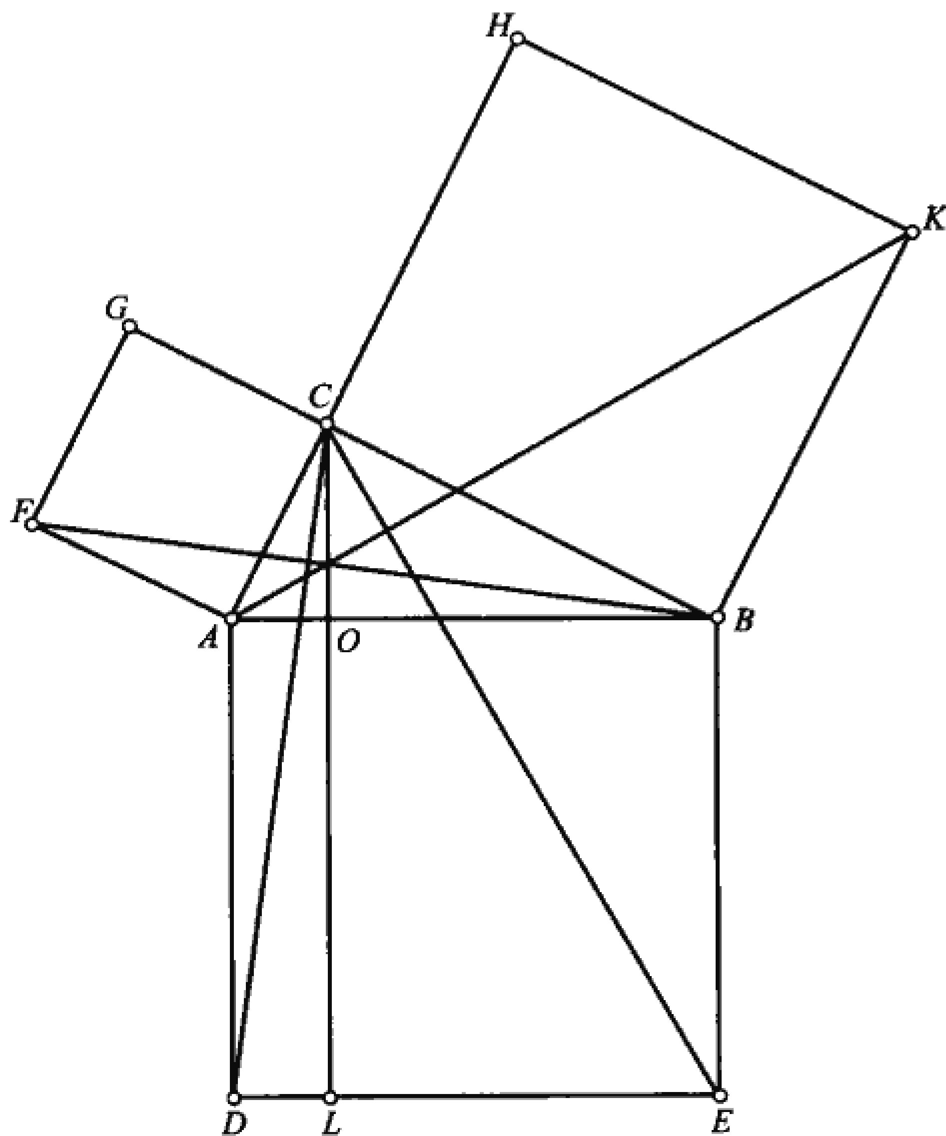


图 11.5　《几何原本》证明勾股定理的图

法国人称之为“驴桥问题”；阿拉伯人称之为“新娘图”、“新娘的坐椅”；在欧洲，又有人称之为“孔雀的尾巴”或“大风车”。

在中国古代，勾股定理的特例以及一般情形的叙述见于公元前2世纪成书的天文数学著作《周髀算经》。研究者指出，《周髀算经》经文中已经包含了勾股定理的一般证明。不过，这有待于进一步探讨。稍后的《九章算术》则列专章介绍勾股定理的应用。公元3世纪，赵爽和刘徽分别对勾股定理作证明，他们运用的都是出入相补原理。赵爽的证明见于他的《周髀算经》注：“按弦图，又可以勾、股相乘为朱实二，倍之，为朱实四。以勾股之差自相乘，为中黄实。加差实，亦成弦实。”（前已叙述，此处略）美国数学家和数学史家库利奇（Coolidge J L）认为，赵爽的证明或许是所有证法中最简易的。

刘徽的证明见于他的《九章算术》注：“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不动也。合成弦方之幂。”刘徽原图已失传，但清代数学家李锐对其作了复原，见如图11.6。

公元9世纪，阿拉伯著名数学家伊本·瓜拉（Thabit Ibn Qorra）在修订《几何原本》的阿拉伯文译本时，给出图11.7所示的证明，并把勾股定理推广到一般三角形中。这个证明与赵爽和刘徽的证明相类似。

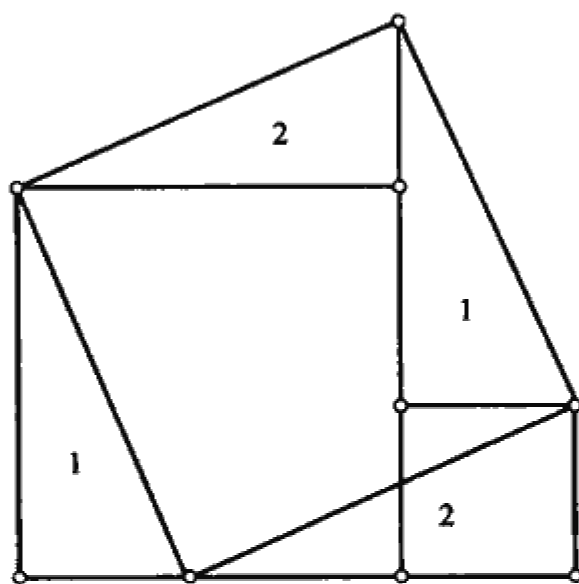


图11.6　中国：刘徽对勾股定理的证明（3世纪）

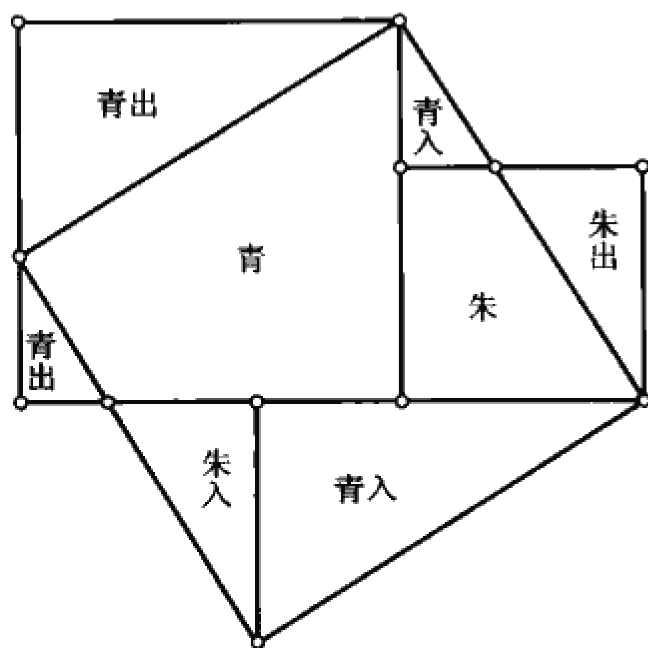


图11.7　阿拉伯数学家伊本·瓜拉（Thabit Ibn Qorra）的证明

12世纪，印度数学家婆什迦罗（Bhaskara）在其数学著作中给出勾股定理的两种证明：第一种证明如图11.8：由直角三角形 CDB、ADC 和 ACB 的相似性得

$$\frac{a}{c}=\frac{d}{a},\quad \frac{b}{c}=\frac{e}{b},$$

从而得 $d=\frac{a^2}{c}, e=\frac{b^2}{c}$，

故 $c=d+e=\frac{a^2+b^2}{c}$，或 $c^2=a^2+b^2$。这里 c 为直角三角形 ABC 中斜边 BC 的长。

第二种证明与赵爽的一样。

17 世纪，日本数学家村濑义溢给出勾股定理的证明如图 11.9 所示。

18 世纪，中国数学家梅文鼎给出勾股定理的证明如图 11.10 所示。

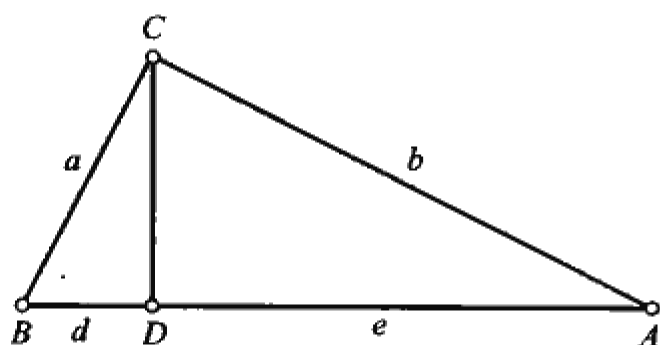


图 11.8　婆什迦罗的证明

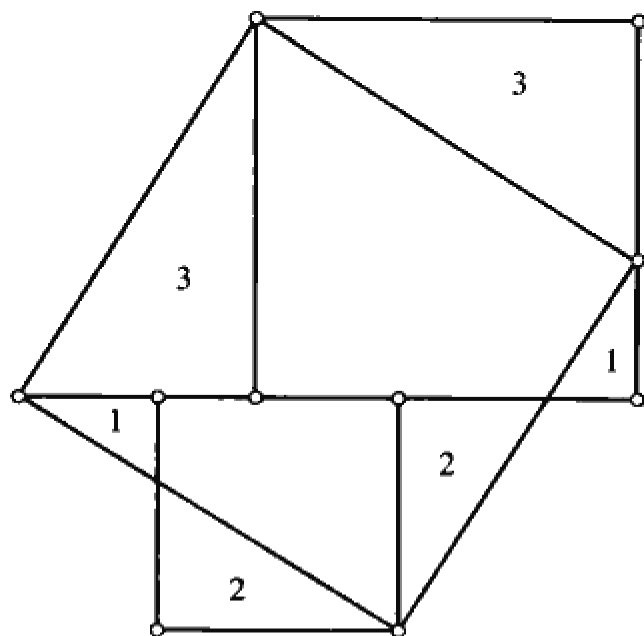
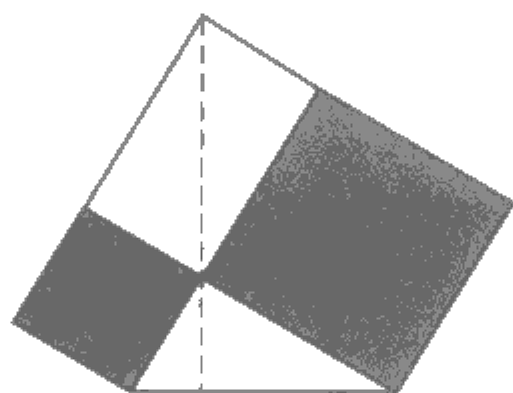
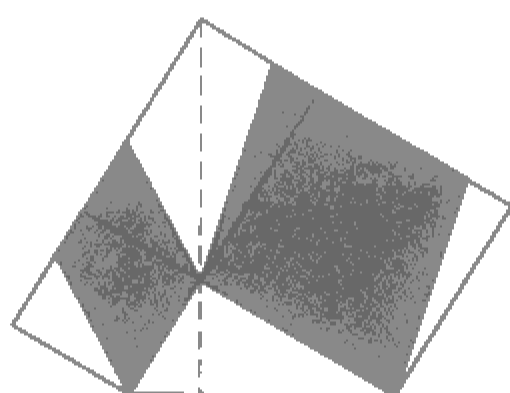


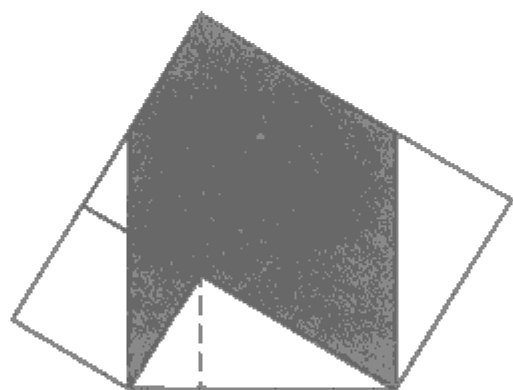
图 11.9　日本数学家村濑义溢的证明



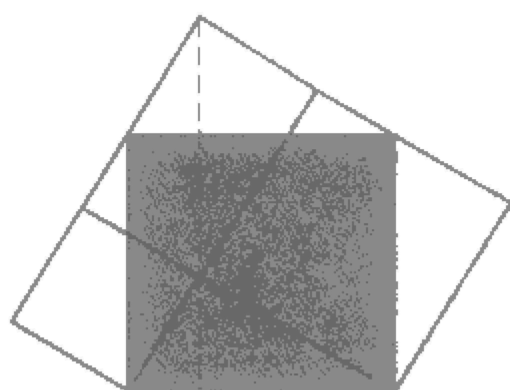
(1)



(2)



(3)



(4)

图 11.10　中国数学家梅文鼎的证明

关于勾股定理的证明还有许多有趣的故事。有一个故事说，在 1876 年一个周末的傍晚，在美国首都华盛顿的郊外，有一位中年人正在散步，欣赏黄昏的美景，他就是当时美国俄亥俄州共和党议员伽菲尔德。他走着走着，突然发现附近的一个小石凳上，有两个小孩正在聚精会神地谈论着什么，时而大声争论，时而小声探讨。由于好奇心驱使伽菲尔德寻声向两个小孩走去，想搞清楚两个小孩到底在干什么。只见一个小男孩正俯着身子用树枝在地上画着一个直角三角形。于是伽菲尔德便问他们在干什么？只见那个小男孩头也不抬地说："请问先生，如果直角三角形的两条直角边分别为 3 和 4，那么斜边长为多少呢？"伽菲尔德答到："是 5 呀。"小男孩又问道："如果两条直角边分别为 5 和 7，那么这个直角三角形的斜边长又是多少？"伽菲尔德不假思索地回答到："那斜边的平方一定等于 5 的平方加上 7 的平方。"小男孩又说道："先生，你能说出其中的道理吗？"伽菲尔德一时语塞，无法解释了，心理很不是滋味。

于是伽菲尔德不再散步，立即回家，潜心探讨小男孩给他留下的难题。他经过反复的思考与演算，终于弄清楚了其中的道理，并给出了简洁的证明方法。

他是这样分析的，如图 11.11 所示：

$$S_{\text{梯形}ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2),$$

$$S_{\text{梯形}ABCD}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle EBC}+S_{\triangle CED}$$

$$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ba+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(2ab+c^2)$$

比较上二式便得：$c^2=a^2+b^2$.

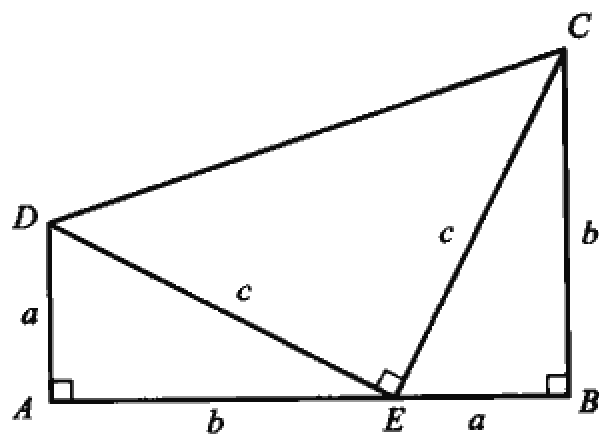


图 11.11　伽菲尔德对勾股定理的证明

1876 年 4 月 1 日，伽菲尔德在《新英格兰教育日志》上发表了他对勾股定理的这一证法。1881 年，伽菲尔德就任美国第二十任总统。后来，人们为了纪念他对勾股定理直观、简捷、易懂、明了的证明，就把这一证法称为"总统"证法。

勾股定理的证明层出不穷，至今已多达近四百种。历史告诉我们：数学是全

人类共同的遗产，不同文化背景下的数学思想、数学创造都是根深叶茂的世界数学之树不可分割的一枝。当我们把多元文化引入数学课堂时，我们会发现："谁比谁早多少年"已经不是最重要的，最重要的是：这会让我们的学生消除民族中心主义的偏见，以更宽阔的视野去认识古代文明的数学成就，并学会欣赏丰富多彩的数学文化。

11.8.2 将数学史融入数学教育的途径

1. 建立适合于学习的数学文化课堂

我们知道，文化是指人类在社会历史发展过程中所创造的物质财富和精神财富的总和，文化是相对于一定的人的群体而言的，文化是群体的创造物。数学教学的过程，也是创造文化的过程，教室数学文化就是教室的主体在学习数学的过程中所形成的物质的或精神的传统、习惯、行为方式等的总和。这种文化产生于数学学习的过程和环境，同时又决定着学习的过程和环境，从而影响着学习结果。文化的形成可以是自发的，也可以是主动构建的。

(1) 教室数学文化建构的意义

目前，关于课堂文化的建构问题，已经引起了国内外的普遍关注，2005 年 8 月 23 日—8 月 27 日，欧洲第十一届关于学习与教学研究的大会在塞浦路斯的首都尼科西亚举行，会议的中心议题是从不同的角度来认识如何构建有效的学习环境。在国内随着新课程的不断推进，数学文化也成为一个使用频率很高的词汇。实际上，数学文化的建构对学生的数学学习具有十分重要的意义，其意义主要体现在以下几个方面。

第一，有利于形成一种数学学习的合力。建构主义认为数学学习的有效过程，是学习者在一定的文化背景和情境下，利用必要的学习资源，通过与他人的协商、交流、合作和本人进行意义建构的方式主动获得知识的过程。在这里数学主要地被看成人类的一种活动，一种以"数学共同体"为主体，并在一定文化环境中所从事的创造性活动。从这个意义上说形成一种以班级学生为主体的"数学共同体"和学习环境是学好数学的必要条件，而班级数学文化可以为学生提供良好数学学习环境。

良好的班级数学文化环境的特点应该是，学生在此环境中有充分发表意见和交流体会的机会，而且在不失个人特点的基础上形成共同的数学研究模式，并用这种"模式"去影响学生。充分发挥学生的创造性，便能形成更多更好的"模式"，由此提炼出一些"范式"，这种"范式"不断转化为共同体成员的行为方式，最后成为一种传统。这就是一种良性的循环环境，这种循环即可逐步成为班级的数学文化特点。

我们知道任何数学精神的形成都具有一定的文化环境，希腊数学特点的形

成，文艺复兴后以牛顿为代表的西方数学特点的形成，以及中国古代数学特点的形成等都与当时的社会文化和当时的“数学共同体”的研究模式有着密切的联系。因此学生一旦形成教室的数学文化传统，就容易形成一种具有本教室的特点的学习数学的风格，就能够充分发挥群体对个体的规范、启发作用及个体对群体的影响作用。按照建构主义的理论，情境是学习的平台，而良好的数学文化实际上就为数学学习提供了必要的情境，学生在这一情境中，将各自学习的孤立个体凝聚起来，互相取长补短形成合力。

第二，有利于形成对数学的正确认识。赫什（Hersh）教授指出，问题并不在于数学教学的最好方式是什么，而在于数学到底是什么……如果不正视数学的本质是什么的问题，便解决不了教学上的争议。因此，对数学的正确认识是一切数学活动的基础。

传统的教学对“数学是什么”的问题教师一般是不直接涉及的，只有靠学生自己去体会，靠教师“潜移默化”地影响，这就使这一问题对学生来说一直是一个不明确的问题，这是造成学生对数学的认识不正确或不全面的主要原因，而对数学认识的不正确和不全面又直接影响学生对数学学习的兴趣和效果。

明确的认识来源于思考和辩论，教室的数学文化环境，能够为思考和辩论提供有利的条件，学生能将过去对数学的潜在的个人认识，经过不断的交流逐步完善。许多问题的是在辩论中明确的。数学文化的建构能形成一种群体的思维模式，也就是形成一种对数学的群体认识。

第三，有利于数学化的进程。著名数学教育家弗赖登塔尔（Freudenthal H）认为，数学化是数学教育的目标。所谓数学化，应该是具有数学的思维方式和行为模式。数学的基本特点就是抽象性。亚里士多德（Aristotle）指出，数学是研究量和数的大小的，但是，它们所研究的量和数，并不是那些我们可以感觉到的、占有空间的广延性的、可分的量和数，而是作为某种特殊性质的（抽象的）量和数，是我们在思想中将它们分离开来进行研究的。

数学实际上是通过用数学的概念、定理、法则和公式等来描述世界，因此数学的研究似乎“脱离”了客观世界，而正是这种“脱离”客观世界的研究，才使数学对客观世界具有更有价值的指导意义，学生对这一点的体会是形成数学思维的关键。数学的抽象性造成学生对一些问题理解的困难，如极限的概念，学生从直观的角度理解极限或判断极限的存在是比较容易的，一旦将极限的概念抽象化，学生的困难立即产生。这个问题的解决需依赖于较好的数学文化环境，学生在良好的文化环境中，通过互相启发、共同探讨，加深理解。

新课程改革将数学化作为数学教育的重要目标，而要实现这一目标，使学生具有数学思维习惯，在很大程度上依赖于数学环境，也就是班级数学文化，这正如要培养“语感”就必须具备相应的语言环境一样。

(2) 教室数学文化形成的建议

第一,教师必须明确数学文化环境对学生的学习的重要意义。教师应比较多地了解数学发展的过程,从而理解社会文化与数学的相互影响,对创建班级数学文化的意义更加明确。张奠宙先生指出,如果简单地陈述数学概念、数学定理,似乎没有文化意味。但是,只要问"为什么要研究这些概念,这些定理?"马上就会涉及文化价值。所以,教师明确了数学文化对学生学习的重要意义,便能挖掘教材内容里所隐含的文化意味,并从文化的角度对教学内容进行加工,也才能在教学中突出教材的文化特点。从而使学生对内容的理解更深,由此产生更多关于数学的话题,这对于形成班级数学文化氛围是一个关键因素。

另外,教师要善于发现数学中潜在的美,著名数学家柯朗(Courant)在其名著《数学是什么》(1941)第一版的序言中指出"数学的教学,逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练,固然,这可以发展形式演算的能力,但却无助于对数学的真正理解,无助于提高思考的能力。数学的研究,有过度专门化和过度抽象化的倾向,忽视了应用以及与其他领域之间的联系。这种状况……必然激起强烈的反感。"为了避免这种反感,只有使学生体会到数学之美,学生能否体会到数学的美,在很大程度上依赖教师的数学教学,而对美的体验能促进良好班级数学文化的形成。

第二,形成一种数学学习的环境。在皮亚杰(Piaget J)看来知识既不是客观的东西,也不是主观的东西,而是个体在与环境交互作用的过程中逐渐建构的结果。建构主义认为数学知识不是对客观现实的本质的发现,数学是一种人类的活动,它反对认为数学是静态的,由一系列常规程序组成的世界,而强调数学是在活动中根据主体需要建构起来的,是拟经验的、可误的。

依据建构主义的理论,数学学习的过程应该是学生的探索和形成数学认识的过程。而这一过程在很大程度上依赖文化环境。教师的重要作用就是帮助学生形成有利于数学学习文化环境,将课堂教学延续到课外。经常围绕数学问题开展交流活动,如互相编制一些数学问题并相互解答对方的问题,使学生形成研究数学的传统习惯,并对数学产生浓厚的兴趣,他们以自己的数学研究成果为荣。

总之,在创建数学文化环境的过程中,教师的作用是十分重要的,教师应有意识地培养班级的数学文化传统,引导其向健康有利的方向发展,充分发挥这一"舆论"导向作用,这将对学生的数学学习是十分有利的。

2. 教师应该转变观念

观念的转变是行动的基础,教师要理解数学史对学生的意义,从过去只把数学史当成是增强数学课堂趣味性的素材的不全面认识,上升到认识数学史对学

生素质的影响和学习态度的形成等多个方面。教师首先要对数学史有充分的了解,只有了解了数学史才能理解其作用。在此基础上才能理解数学史的价值。数学史从学生素质培养的较大至少具有以下作用。

第一,数学史的了解有利于学生对数学的理解。对数学的理解要从数学研究对象和研究方法的特点上入手,而在数学发展史上存在多种数学研究的方式和研究的对象。如我们在前面已经叙述的古希腊由于一开始就将数学与哲学、宗教等意识形态领域的问题联在一起,因而对数学的研究也就体现在思维方面,正如古希腊著名哲学家柏拉图(Plato)将数学看成是由不完美的现实世界通向完美的理念世界的桥梁。古希腊的这种对数学的理解,必定使数学的对象为思维抽象物而脱离实际,研究方式也必然形成演绎的方式为主。相反,中国古代数学从一开始就与实际联在一起,对数学的研究也就自然是为了解决实际问题,研究方式也多与直观方式为主,如赵爽对勾股定理的证明方式。古希腊和中国古代数学的发展历史可以使学生理解,数学的研究对象和研究方法是有理论和实际两个方面的,这对学生全面理解数学是有益的。

第二,数学史的了解有利于学生形成全面的思维习惯。首先使学生认识到数学的真确性特点,在数学中,对于概念都需要通过定义才能在数学中存在,因为不定义的数学概念将会给数学研究带来困难,如由于集合的概念最初未能够给出确切的定义,所以才发生了数学史上著名的“集合论悖论”,这就说明了数学对定义的依赖性和数学追求严密的必要性。然而,数学在很大程度上又依赖公理,也就是说,依赖对问题的假设。教师可以通过简单介绍非欧几何的诞生使学生体会到这一点。这样的教学可以使学生思维灵活、全面。

第三,数学史的了解有利于学生数学思想方法的认识。如数学中充满着辩证思维,人们关于无穷的认识就是一个漫长的过程,从古希腊对无限的认识到极限理论的建立,再到康托尔(Cantor G)无限集合概念的产生,人们运用有穷和无穷的辩证统一的关系来认识无穷。这种辩证思维还如抽象和具体、精确与近似等关系,认识这些可以使学生掌握数学研究的基本方法。又如圆锥曲线的研究过程,从古希腊的阿波罗尼奥斯(Apollonius)对圆锥曲线的认识,到笛卡儿坐标系的建立,从而对圆锥曲线性质的研究成为可能,从中学生可以体验,代数方法的重要作用。再如从古希腊对无理数的发现,到康托尔(Cantor G)和戴得金(Dedekind)对无理数的定义,人们对一条看似十分简单的数轴的认识的不完整。学生通过对“数轴上的点是怎样排列的?”这样的问题的思考,产生许多想象。这些例子的介绍,使学生体会数学思想方法的多样性。

第四,数学史的了解有利于学生创新精神的养成。创新的思维来自对各种现象的比较,被称为西方数学史上第一位数学家的泰勒斯(Thales)之所以能够创立论证数学,依赖于其对事物的认识方式,而认识方式的产生却在一定程度上

依赖于其对各种认识论的比较,发现其中的差异,从而萌发对事物的论证的思维方式。因而,在数学教学中的多种数学家对同一问题的不同的研究方法可以激发学生创新思维的产生。

11.8.3 数学史材料的运用

数学史材料运用于教学有直接和间接两种方法。

1. 历史材料的直接利用

对数学史材料的直接运用的目的,依据教学内容的不同而不同。

(1) 使学生了解一些数学使知识

包括人名、时间、著名数学著作和数学事件、数学家的生平、数学名题、优先权问题、有关数学史专题的著述等都可以直接在教学中运用。我国数学教材和波兰的《数学 2001》系列数学教材中,7 年级的课本中即有一元一次方程的实例——丢番图(Diophantus)的墓志铭。

行人啊,请稍驻足
这里埋葬着丢番图
上帝赋予他一生的六分之一
享受童年的幸福
再过十二分之一,两颊长胡
又过了七分之一,燃起结婚的蜡烛
贵子的降生盼了五年之久
可怜那迟到的宁馨儿
只活到父亲寿命的半数
便进入冰冷的坟墓
悲伤只有通过数学来消除
四年后,他自己也走完了人生旅途

(解答:由$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$,得 $x=84$)

美国学者比德韦尔(J. K. Bidwell)提出数学史材料运用的三种方式[1]。一是在课堂上展示趣闻轶事(anecdotal display),使用数学家的图片、写有出生日期的日历以及数学或数学家的邮票等,可以抓住学生的注意力,激发他们的兴趣。二是在讲课过程中注入轶事材料(inject anecdotal material as the course is presented)。如在讲斜截式直线方程 $y = mx + b$ 时,可以介绍法国数学家蒙日

① J. K. Bidwell. Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, 1993, **86**(6):461 ~ 464.

(G. Monge)于1784年首次使用符号 m 表示斜率;这种方程形式很可能是1866年霍惠松(Howison)在《解析几何论》(*A Treatise on Analytic Geometry*)中首次使用的;而斜率(slope)一词是1897年Church在《解析几何基础》(*Elements of Analytic Geometry*)中首次使用的。比德韦尔(Bidwell)认为这样的介绍给课堂讨论增添了趣味,将数学与人联系起来。比德韦尔(Bidwell)还认为,可以用2~5分钟时间来介绍任何有趣的话题,不论这个话题是否与课堂中讲授的内容有关。第三种方式是将历史发展过程作为课程本身的一部分(make historically accurate developments of topics a part of the course),如,引入复数概念时,使用卡丹(Cardan G)的问题:求 x 和 y 使得 $x+y=10$,$xy=40$。又如讲三角学时,介绍正弦函数的起源(圆弧所对弦长),托勒密(Claudius Ptolemaeus C)的弦表。另外,还可以使用历史上的数学课本,或作为引入,或从中选择例题。

(2) 使学生认识某部分知识的意义

数学史上许多知识的产生对数学是具有重要意义的,有些甚至于有里程碑的价值。在学习这些知识时,应该使学生了解其意义。如笛卡儿将变量引入数学,特别是函数研究为变量研究提供的数学模型的方法,不仅改变了数学以常量为研究对象的历史,而且使数学的运用性加强了,更为微积分的诞生奠定了基础,从而使数学进入快速发展的阶段。因此,恩格斯对此给予了高度的评价;又如对数的诞生使乘除法运算转化为加减法运算成为可能,拉普拉斯(Laplace P S)对此给予了高度评价,认为如果一个人的生命是拿他的一生中的工作多少来衡量的话,那么对数的发明,等于延长了人类的寿命;再如,极限理论的形成,不仅为微积分奠定了坚实的基础,而且,保证了数学的严密性。这样的材料有很多,教师在教学某一部分内容时,如果能够将数学史与教学内容有机结合,则为教学效率的提高增添了可能性。

2. 注入历史的教学法——发生教学法

所谓发生教学法(genetic approach to teaching and learning),其基本思想是:只有当主体产生足够的动机,或只有在主体心理发展的某个适当时间,才开始让他们学习某个主题(概念、理论等)。也就是说,主体在面对一些原来的知识无法解决的问题,感到有学习新的方法或理论的必要时,教师才开始讲授这种新的方法或理论。而数学史上新概念、新思想、新方法、新理论的出现往往正是由于解决问题的需要。因此,数学史为发生教学法提供了丰富的素材。这需要教师从以下几个方面开展工作。

(1) 数学教师应了解所教主题的历史;

(2) 确定该主题历史发展的关键步骤;

(3) 重新构建这些关键步骤,使之适用于课堂教学;

(4) 上述重构的步骤按从易到难的系列问题给出,后面的问题建立在前面

问题的基础上。

图 11.12 说明数学史在数学教学中的运用。

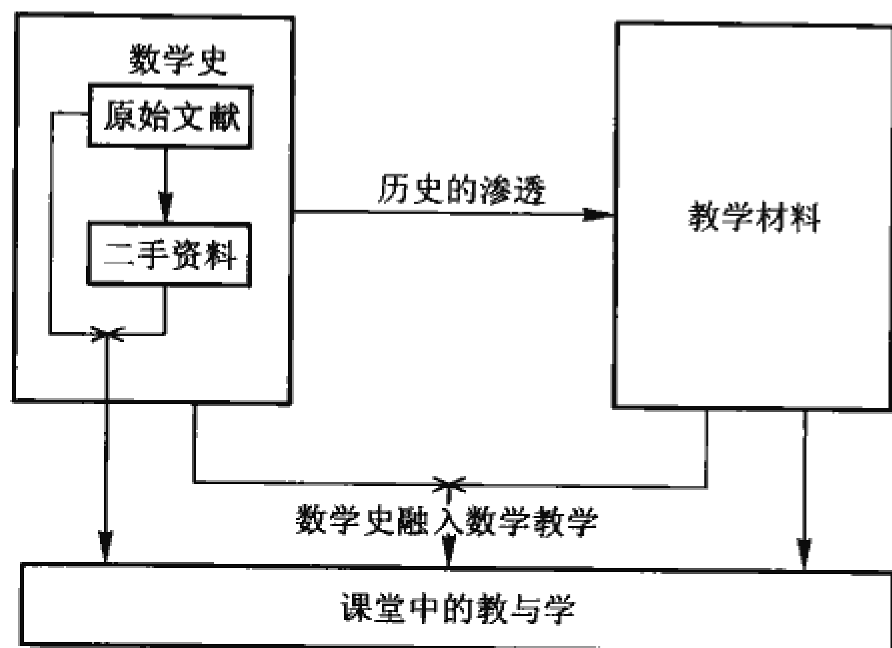


图 11.12　数学史在数学教学中的运用

本章思考题

1. 数学的本质是什么？
2. 数学史给我们的数学教学什么启发？
3. 谈谈你对数学与文化的关系的认识。
4. 对中学学生掌握数学史的情况进行了解，并说明原因。
5. 你对"数学是一种精神"是怎样理解的？
6. 中国古代数学与古希腊数学的特点分别是什么？
7. 比较《九章算术》与《几何原本》的思想、方法、内容的异同。

12

第 12 章 数学基础课程改革

当代科学技术迅速发展,引起人类知识爆炸性增长。为了在日趋激烈的国际竞争中立于不败之地,教学改革成了世界上所有国家教育的重大主题,其中,各级各类学校数学教学的改革成为焦点。这是因为,数学的重要性已经被越来越多的人所认识,数学素养已经成为人的一个基本素质,不懂数学的人将成为现代社会的新的文盲。要了解科学技术的任何领域都需要对数学的基本理解,而且数学一直都是其他科学发展的基础,美国国会议员布朗(Brown)曾强调指出:"改善数学教育对我们的社会是极其重要的,正如数学是通向科学成功的必经之路,对数学的了解也是在今日世界取得成功的必经之路。"

我国的基础教育以加入 WTO 为背景,以 1999 年 6 月召开的全国第三次教育工作会议明确提出的"素质教育要以培养学生的创新精神和实践能力为重点"为标志,以世纪之交正式启动的新课程、新教材的实践为载体,全面进入了新一轮的改革。这次课程改革的根本任务是:全面贯彻党的教育方针,调整和改革基础教育的课程体系、结构、内容,构建符合素质教育要求的新的基础教育课程体系。

12.1 改革的理论依据

12.1.1 素质教育目标更明确

素质教育是克服应试教育弊端的必需对策;素质教育是适应新时期社会主义现代化建设的新举措;素质教育改革是我国教育理论和实践工作者的教育理念发生转变和更新的契机。那么,什么是素质?素质能否培养?在多大程度上能够培养?为了对素质培养问题更明确,我们应该区分自然发展中形成的素质与作为教育目标的学习结果的素质。如果对这两种素质不加区分,把教育目标直接针对个体在自然发展中形成的智力和人格特质,则容易产生理论和实践中的误区。因此从理论上认识这些问题,提高素质教育的针对性,对我国数学教育的改革是必要的。

罗伯特·加涅是当代美国著名的学习和教育心理学家,他将学生的素质分

成三类：先天的、后天习得的和自然发展中形成的，认为后天习得的素质是学校教学的目标。加涅倾注了毕生精力，找到了支配人类行为表现的五种学习结果，也称五种习得的性能(learned capabilities)，即言语信息、智慧技能、认知策略、态度和动作技能①。

言语信息也被称作陈述性知识，也就是可以用语言或文字表达的知识，相当于我国“双基”教学中的基础知识，对数学而言则是指数学的概念、公式、定理等；

智慧技能的实质是人们应用符号办事的能力，相当于我国“双基”教学中的基本技能，对数学而言则是指解决一些程序性问题的技能；

认知策略类似于学习方法，但其内涵却要丰富得多；

态度是个体习得的、决定个体行为选择方向的相对稳定的内部状态或反应倾向，包括认知、情感和行为三个方面。在我国的教育体制中，态度教育大致相当于德育，但态度涉及的范围大于道德范围，如学习不认真，我们只能说他态度不好，但不能说他道德不好。态度是学校教育最重要的目标之一，也是人的最重要素质之一；

动作技能有两个成分：一是一套操作规则，二是肌肉协调能力。

加涅认为以上五种习得的素质可以解释人的一切后天习得的行为。由于教育目标就是预期的学生学习的结果，因此素质教育便应该以这五种习得素质的提高为对象，从而教育目的就变得明确了。

12.1.2 基本理念的变化

随着教育理论研究的不断深入和教育本身的发展，对一些概念的理解也随之变化和完善。

1. 对“教学”的理解的变化

“教学”历来是课程中的基本概念之一，由对“教学”的看法和不同前提条件派生出不同的教学论。“师者，传道授业解惑者也”，这是古人对传授式教学的经典解释；教学是教师教和学生学的统一活动，是苏联教育家凯洛夫(Кайров И А)的观点；“先生的责任不在教，而在教学，教学生学。”这是著名教育家陶行知先生的教学观，“教是为了不教”是叶圣陶先生的观点。而新课程对教学的表述是：教学是师生交往、积极互动、共同发展的过程。这一表述，指明了教学过程是教师与学生的共同发展过程，从而超越了以往的教学观，赋予了“教学”新的含义，体现了教师的价值。教学也从过去重点关注教师的教，转移到重点关注学生

① 皮连生. 实施《基础教育课程改革纲要(试行)》的心理学基础. 上海：上海教育出版社，2004. 4(12).

的学。

2. 对课程的认识的深入

要对耳熟能详的课程作较为科学、统一的界定并不容易。课程一词的定义可谓仁者见仁，智者见智，目前比较统一的认识是古德莱德的课程定义。古德莱德将课程分为以下几个层次：

(1) 理想的课程，即指由一些研究机构、学术团体和课程专家提出的应该开设的课程及其内容；

(2) 正式的课程，即由教育行政部门规定的课程计划、课程标准和教材，也就是列入学校课程表中的课程；

(3) 领悟的课程，即指任课教师所领会的课程。由于不同的教师对正式的课程会有各种不同的了解和解释方式，因此教师对课程"实际上是什么"和"应该是什么"的领会，与正式课程之间会有一定的差距，从而减弱了正式课程的某些预期影响；

(4) 运作的课程，即指在课堂实际实施的课程。观察和研究表明，教师领会的课程与他们实际实施的课程之间会有一定的差距，因为教师要根据学生的反应随时进行调整；

(5) 经验的课程，即指学生实际体会到的课程。因为每个学生对事物都有自己特定的理解，两个学生听同一门课，会有不同的体验和学习经验，因此同样的课程对不同的学生便具有不同的作用。

由上述关于课程的认识我们可以发现，从理想的课程，到学生内化的经验课程之间有一个较长的过程，而在这一过程中教师的作用是不可忽视的，教师实际上承担了从理想课程到经验课程的桥梁作用。而对课程的这一理解，使人们对教师在课程中的作用有了清楚的认识，也为教师在课程中的主观能动性的发挥提供了理论依据。

3. 对知识的理解发生了变化

(1) 知识的分类更明确

现代教育理论将知识分为狭义的知识和广义的知识。狭义的知识是指人能有意识地回忆出来的知识，也就是信息加工心理学中的"陈述性知识"。广义的知识是个体通过与环境的相互作用后获得的信息及其组织，包括陈述性知识和程序性知识。陈述性知识一般指能够用语言或文字明确表达的知识。被储存在个体内部的为个体的知识，通过书籍或其他媒体储存于个体外部的，即为人类的知识。而程序性知识一般指难以用语言和文字表达的知识，存储于个体内部，经常与能力相联系。过去人们比较重视陈述性知识，学校教育也主要是以教学陈述性知识为主，因为陈述性知识便于通过各种考试检验其教学效果。在本次课程改革中，人们不仅注意了陈述性知识的教学，而且更注意程序性知识的教学。

有研究者将人的知识用冰山模型来解释，认为人的知识分为显性知识和隐性知识，冰山露在海水外面的是显性知识，而隐藏于海水下面的是隐性知识，而隐性知识不仅是人的知识的主要部分，而且对人的影响是极大的。课堂上能够直接传授的是显性知识，隐性知识是个体在学习显性知识的过程中，通过感悟、深思、潜移默化等方式而获得的。隐性知识在一定意义上可以理解为程序性知识，是人的素质的根本，也是素质教育的主要提高的对象。对知识的理解的深入为素质教育提供了操作性较强的教育目标，那就是应该在传授显性知识的同时将学生隐性知识的获得作为重要的教学目标。

(2) 知识的认识更客观

建构主义理论认为，任何知识都不是绝对真理，数学也不例外，客观世界是独立于我们经验之外的，当我们诠释意义，当我们试图解释，当我们在经验的基础上提出理论的时候，我们正在组织我们的经验世界，我们无法知道我们所获得的知识是，或者能够是关于客观世界的一个正确描述，我们所获得的只是猜测、理论或假设。建构主义认为数学知识不是对客观现实的本质的发现，数学是一种人类的活动，它反对认为数学是静态的，由一系列常规程序组成的世界，而强调数学是在活动中根据主体需要建构起来的，是拟经验的、可误的。

实际上，数学研究的深入也使我们不断地修正对世界和数学本身的认识和理解。如非欧几何的创立，改变了人们关于欧氏几何是对客观世界唯一准确描述的认识，使人们认识到欧氏几何只是人们对世界的一种假设，是一种近似的描述；又如混沌理论的诞生使人们认识到，人不可能对任何客观运动事物进行准确的描述和建立数学模型，数学模型是人们将事物用数学语言进行刻画的一种近似，这就从根本上否定了过去认为"数学是精确的和完美无缺的"的看法，使人们对自身的认识状况有了更客观的认识。

4. 学习方式的改变

弗赖登塔尔(Freudenthal H)指出，数学教学的核心是学生的"再创造"。这就是说，数学教学必须以"再创造"的方法来进行。新课程强调了对学生创新能力的培养。学习方式也从关注听课、阅读、演题，到提倡实验、讨论、探索。

素质教育中所说的创新，主要是指创新的意识、创新的勇气、创新的欲望、创新的冲动和创新的习惯，主要在于对创新过程的一种体验，而不在于对创新结果的追求或创新成果的获得；素质教育中所说的学生的创新，主要是指个体认识论意义上的创新，即学生在教师的指导下，在积极、主动的认知活动中去发现个体原先所不知晓的事物。

对于中国学生来说，或许最缺乏的还不是创新的能力，而是创新的意识、勇气、欲望、冲动以及相关的人格，最缺乏的可能是一种创新的精神。在基础教育中，尽管我们很难指望中小学生能真正创新出什么来，但培养学生的创新精神是

至关重要的，也是完全可能的，何况我们所说的创新主要还是指个体认识论意义上的创新。新课程将“再创造”作为一种重要的学习方式，不仅强调了学生主体性的发挥，而且也更能适应现代社会对教育的要求。

5. 对数学的理解发生变化

随着数学研究本身的深入，人们由过去认为数学是绝对真理，深入到认为数学只是一种假设，改变了认为数学是绝对客观的看法，从而使人们对不同数学观的并存更能理解。其实，每个时代对数学的认识都只能是那个时代特定的数学研究水平、数学发展方向、数学思想、方法、数学传统等的产物。因此，不同的时代，便有那个时代的对数学的认识。另外，不同的人由于对数学的了解的情况不同，也会具有不同的观点，这样一来，对数学的认识就包含个体主观的因素。

由前述建构主义对数学的理解，使得我们将数学的教学过程不仅看成是传授知识和真理的过程，而更多地看成是学生主体性发挥的创造过程，是学生理解数学、形成数学观的过程。

6. 社会对人才的要求发生了变化

中国的经济、社会发展，对中国的教育和人才提出了许多新要求。“创新人才”与“创新人才的培养”突出地体现了这些新要求，体现了对教育的新思考。

海外华裔科学家杨振宁先生，在他半个多世纪的读书、教学生涯中，对人才培养问题做了深入研究。他认为，新世纪需要培养“开拓性”人才。他在中国科协 2000 年年会开幕式上所作的《中国文化和科学技术》的演讲中对美国学生和亚洲学生进行了比较后指出，美国中学生在考试方面是比不过亚洲的学生的，他们常常只能考倒数的名次。美国学生兴趣广泛，亚洲学生则往往钻入狭窄的专业；美国学生东跑西跑，亚洲学生按部就班；美国学生充满活力，亚洲学生安安静静；美国文化培养学生勇敢，亚洲文化训练学生胆怯；美国学生有自信心，亚洲学生则没有自信心；美国学生傲慢，亚洲学生谦逊……杨振宁先生认为，目前在学校和社会上存在一种错误观点，造成很多学生从小只知道读书，最终目标就是拿学位、做研究……这样培养出来的学生“读书型”居多，而有动力、有知识，独立思考能力强的“开拓性”人才少。这种培养模式对于“鼓励学生向科学技术和工业农业生产活跃领域去发展”是很不利的。

依据上述比较，我们发现，中国传统教育培养出来的人才具有自身的优势和明显的不足，离社会发展对人的要求还有一定的距离，因此，保留传统教育中好的部分，并借鉴先进国家的一些经验，也就是说在保留传统的前提下，学习先进的经验是各个国家的教育的发展的基本方向，也是目前中国新的课程改革的方向。

12.1.3 几种数学教育的基本理论

1. 弗赖登塔尔的数学教育理论

弗赖登塔尔(Freudenthal H)是世界著名数学家和数学教育家。对于数学教育弗赖登塔尔有独到的认识,并出版了许多数学教育理论著作。总体上讲,弗赖登塔尔所认识的数学教育有五个主要特征:

(1) 情景问题是教学的平台;

(2) 数学化是数学教育的目标;

(3) 学生通过自己的努力得到的结论和创造是教育内容的一部分;

(4) “互动”是主要的学习方式;

(5) 学科交织是数学教育内容的呈现方式。

2. 波利亚对数学教育的基本看法

美籍匈牙利数学家波利亚(Pólya G)对数学教育的目的、价值、方法非常关注。在他看来,中学数学教育的根本目的就是“教会年轻人思考”。教师要努力做的就是“教学生证明问题,甚至也教他们猜想问题”,启发学生自己发现解决问题的方法,从而从根本上提高学生的解题能力。

3. 建构主义的数学教育理论

建构主义理论认为,学习是一个“生成过程”,是在学习者已有知识经验与选择接受的信息相互作用的基础上获得新知识,构建新的认知结构的过程。下面简要说明建构主义理论关于数学教育的一些基本认识。

对于数学知识的认识,持建构主义观的学者认为:数学知识不是对现实的纯粹客观的反映,任何一种传载知识的符号系统也不是绝对真实的表征。它只不过是人们对客观世界的一种解释或假说,它不是最终答案,它必将随着人们认识程度的深入而不断地变革、升华和改写,出现新的解释和假说。数学中非欧几何的创立可以为建构主义对数学的解释提供依据。实际上,欧几里得几何和非欧几何都只是对客观世界的一种假设,而不同的假设能够得出许多不同的理论,如根据欧几里得几何的公理我们可以得出“平行线的同位角相等”的结论,而根据罗巴切夫斯基的非欧几何假设,我们可以证明完全相反的结论,即“平行线的同位角不相等”的结论。而这两个结论完全依赖于对“过直线外一点可以做几条直线和已知直线平行”的不同假设。

数学知识不可能以实体的形式存在于个体之外,真正的理解只能是由学习者自身基于自己的经验背景而建构起来的,取决于特定情况下的学习活动过程。否则,就不叫理解,而是死记硬背,是被动式的复制学习。

建构主义观下的数学学习具有以下一些特点:学习不是由教师把知识简单地传递给学生,而是由学生自己建构知识的过程;学生不是简单被动地接受信

息，而是主动地建构知识的意义，是根据自己的经验背景，对外部信息进行主动地选择、加工和处理，从而获得自己的意义，这种建构是无法由他人来代替的。外部信息本身没有什么意义，意义是学习者通过新旧知识经验间的反复的、双向的相互作用过程而建构成的。

学习意义获得，是每个学习者以自己原有的知识经验为基础，对新信息重新认识和编码，建构自己的理解。在这一过程中，学习者原有的知识经验因为新知识经验的进入而发生调整和改变。

建构主义理论对数学教学具有一定的指导意义。在教学中教师不能无视学习者原有的知识经验，简单地从外部对学习者进行"填灌"，而应把学习者原有的知识经验作为新知识的生长点，引导学习者从原有的知识经验中，生长新的知识经验。在建构主义的课堂上，教师不应仅仅作为知识的呈现者，也不是知识权威的象征，而应该重视学生自己对各种现象的理解，倾听他们的想法，思考他们这些想法的由来，并以此为据，引导学生丰富或调整自己的解释。

12.2 数学教育改革的发展经历

数学教育需要改革，唯有不断改革才能有数学教育的持续健康发展，这是社会的共识，也是数学教育界的共识。实际上，我国数学教育改革的步伐从来就没有停止过，世界范围的数学教育改革也是一个长期的过程。

12.2.1 国内数学教学改革的概况

我国是一个具有悠久历史的文明古国，是一个对数学作出过卓越贡献的优秀民族。新中国成立以后，我国中学数学教育进行过多次改革和实验，取得很大成绩，积累了丰富的经验，也遭受了许多挫折。按张奠宙先生在中国数学双基教学中的划分，我们可以将新中国数学教育分为5个阶段。[①]

1. 1949年到1958年是我国数学教学体系的创建和巩固时期

1952年8月，由教育部组织编订了新中国成立后的第一个《中学数学教学大纲(草案)》，大纲提出了中学数学的教育目的：中学数学的教学目的是教给学生以数学的基础知识，培养他们应用这种知识来解决各种实际问题所必需的技能和熟练技巧。教师在讲授数学的过程中，要贯彻新民主主义教育的一般任务：形成学生辩证唯物主义的世界观，培养他们新的爱国主义以及民族的自尊心，锻炼他们的坚强的意志和性格。

1954年10月，1956年教育部分别制定了第二个、第三个《中学数学教学大

① 张奠宙. 中国数学双基教学. 上海：上海教育出版社，2006.5(2～4).

纲(修订草案)》,对中学数学教学目的作了明确规定:中学数学教学目的是教给学生有关算术、代数、几何和三角的基础知识,培养他们应用这些知识解决各种实际问题的技能和技巧,发展他们的逻辑思维和空间想象力。

这一阶段的主要特点是,全面学习苏联,照搬苏联十年制数学教学大纲,由于中国的中小学是十二年制,实际上使得我国中小学生数学程度下降了。但是由于苏联数学教学比较严谨,比较注意学生的心理特征,学习苏联使我国的数学教学质量有所提高。

2. 1959 年至 1966 年,是我国数学教育的改革和发展时期

教育部于 1961 年 10 月和 1963 年 5 月分别制定了新中国成立以来的第四个和第五个《中学数学教学大纲(草案)》,大纲正式写进了"计算能力"和"空间想象能力"等词语。1963 年 5 月我国的数学教学大纲的教学目的是:使学生牢固地掌握代数、平面几何、立体几何、三角和平面解析几何的基础知识,培养学生正确而迅速的计算能力、逻辑思维能力和空间想象力,以适应参加生产劳动和进一步学习的需要。"三大能力"的培养的目标的提出对我国数学教育具有重要的历史意义。

这个时期的特点,可以分为两个阶段来看,第一阶段是 1959 年到 1962 年。由于"大跃进"及"新数学运动"的影响,在我国也掀起了群众性的"教育革命"高潮,对数学教育的目的、任务、教学大纲、教材、数学课程的现代化等问题展开了热烈的讨论,提出了各种改革的方案,进行了各种各样的数学教学改革实验。和国际上的"新数学运动"一样,在教学内容上要求过高、过急。教学上过分强调联系实际,大量参加生产劳动,忽视双基教学,违背教学规律,造成了教学混乱、质量下降。第二阶段是 1963 年到 1966 年。认真总结经验教训,1963 年提出了加强双基教学的重要性,在教材体系上开始摆脱外国教材的束缚,为建立具有中国特色的教材体系迈出了重要的一步。

1966 年至 1976 年遭到严重破坏的时期,这时期中学数学基础知识被削弱了,数学教材体系被破坏了,取消考试,造成是我国中学数学教育的大倒退。

3. 1977 至 1991 年,是我国中学数学教育恢复、调整、发展时期

(1) 全国不少中学围绕如何培养学生的能力,对数学教学方法进行了各种各样的改革实验,取得了很多有益的经验

20 世纪 60 年代有中国科学院心理研究所"自学辅导教学法",北京景山学校"单元结构教学法",20 世纪 70 年代有上海育才中学的"读读、议议、练练、讲讲"八字教学法。20 世纪 80 年代有辽宁实验中学的"研究教学法"及上海青浦县顾泠沅老师"尝试、指导、回授"教学法。

(2) 我国数学竞赛恢复、成熟,走向世界,取得辉煌成果的阶段

我国数学竞赛始于 1956 年,在著名数学家华罗庚,苏步青的倡导下,在北京、天津、上海、武汉 4 个城市首次举办了高中数学竞赛。在这以后,除 1959 年

和 1961 年因严重经济困难中断外，每年都有一些城市举行数学竞赛，一直持续发展到 1965 年。从 1965 年到 1977 年中断了 13 年，1978 年数学竞赛再次兴起，1985 年我国首次派出两名学生参加第 26 届国际数学奥林匹克竞赛（IMO）结果获得了一枚铜牌.，在 1986 年举行的 IOM，我国派足队员（6 人）参加。1990 年 7 月，在北京由中国成功地举办了空前规模的第三十一届 IOM，中国队蝉联团体第一，获 5 金 1 银。这标志着我国的数学竞赛水平已达到了国际先进水平。这里统计了从 1985 年到 2002 年的获奖情况，17 年间，中国队在国际竞赛中高潮迭起，参赛 98 人次，得奖 96 人次，其中金牌 70 枚，银牌 21 枚，铜牌 5 枚，团体总分 10 次第一，2 次第二。

中国代表队在部分国际数学奥林匹克竞赛中的成绩统计

时间	获奖情况	时间	获奖情况
1985 年	1 铜	1994 年	3 金、3 银
1986 年	3 金、1 银、1 铜	1995 年	4 金、2 银
1987 年	2 金、2 银、2 铜	1996 年	3 金、2 银、1 铜
1988 年	2 金、4 银	1997 年	6 金
1989 年	4 金、2 银	1998 年	未参加
1990 年	5 金、1 银	1999 年	4 金、2 银
1991 年	4 金、2 银	2000 年	6 金
1992 年	6 金	2001 年	6 金
1993 年	6 金	2002 年	6 金

(3) 我国积极，稳定地进行教材改革实验，取得良好的效果

1978 年，教育部制定了新中国成立以来第六个《全日制中学数学教学大纲（试行草案）》，大纲中关于中学数学教学的目的可概括为三句话：加强基础，培养能力，提高思想。大纲对中学数学教学内容的改革提出了"精简、增加、渗透"的六字方针。1978 年大纲是一份试行草案，经过 8 年时间的实践基础上再进行修改完善，1986 年颁发中小学数学教学大纲，它是新中国成立以来第一个没有带"草案"两字的正式大纲。

1981 年下半年陆续编出高中使用课本（甲种本），1983 年为了从实际出发大面积提高教学质量，对高中提出了一般要求和较高要求两种教材，即甲种本和乙种本，这在我国第一次打破了教材一刀切的现象。

1987 年国家教委正式颁发了《全日制中学数学教学大纲》，进一步明确了中学数学的教学目的，对中学数学的教学内容进行了编排，既照顾了完成九年制义务教育不继续升学的学生的要求，也照顾了一部分水平较高的学生能学到一些

较高要求的内容,重视了能力的培养,提出了具体的要求,使我国中学数学教育出现了新的局面。

4. 1992年至1999年,教育目的由升学转变到素质教育

1992年国家教委又制定了《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》,这是我国教育史上第一次在义务教育中,数学教育的目的由升学教育到公民素质教育的根本性的转变,数学教育要为培养社会主义事业所需要的多方面、多层次、多规格人才服务。为了保持稳定,1992年大纲与1986年大纲基本一致。但呈现程度不变、难度下降的趋势。这既符合国际教学发展的趋势,又有利于普及九年义务教育,使全体学生都能学好。

1992年大纲的另一个特点是适应"一纲多本"的要求,各地可以根据大纲要求,编写出适应不同层次需要、风格各异的多种教材。从此,结束了只有一套统编教材的历史。出现了十多套中小学数学教材,各种教学流派,呈现一派繁荣的景象。

5. 1999年至现在,新一轮基础教育改革

1999年1月及6月受教育部基础教育课程改革专家小组委托,在北京召开了"现代数学及其对中小学数学课程的影响"专题座谈会,会议特别邀请了近20位我国一流的数学家就数学课程改革的一些问题进行了研讨,取得了很好的成果,为课程的编写打下了良好的基础。

1999年10月,受教育部基础教育司委托,国家课程研制工作小组在北京召开了"国家数学课程标准研制工作研讨会",这次大会分析了我国数学教育的成绩与不足,认为中华人民共和国成立后50年,我国数学教育的成绩是巨大的,但还存在如下一些问题:学生的创新精神,实践能力较差;数学学习方式单一、被动;数学学习的情感体验消极等。造成这些问题的原因是多方面的,有教育观念、教育管理体制、考试制度和社会用人制度等原因,也有来自课程、教材和教师等方面的原因。这次会议以后,新的一轮数学课程改革开始启动。

2001年颁发了《基础教育改革与发展纲要(试行)》,同时制定了《数学课程标准(实验稿)》陆续编出了新课程标准的中小学数学教材,一场声势浩大的新课程改革在全国各地大面积展开。

12.2.2 世界范围的几项数学教学改革介绍

世界范围内的数学教学改革实际上也从未停止过,本部分只介绍"新数运动"、"回归调整"及"问题解决"三次影响比较大的改革。

1. 60年代的"新数运动"(数学现代化运动)

(1)"新数运动"的背景

19世纪末20世纪初,美国比较流行的教育理论是杜威的"经验主义"课程

观,这一理论认为,“儿童和课程仅仅是构成一个单一过程的两极”,儿童是起点,课程是终点。只要把教材引入儿童生活,让儿童自己去体验,就能把两极联系起来,使儿童从起点走向终点。根据这一基本的观点,提出了“在做中学”的教育思想。不可否认,这一教学思想对数学教学是有一定积极意义的。但由于不是以学科知识本身为逻辑,因而学生所获得的是一些经验知识,而不是系统的学科知识。

1957 年 10 月 4 日,苏联发射了第一颗人造地球卫星,这使自以为“世界霸主”的美国朝野震惊,并促使他们以新的眼光去认识科学技术发展的需要和教育改革的关系,经过分析,美国人深感本国教育的落后,科学人才的缺乏,因此改革教育,特别是改革数学教育成为一个重要的措施。1958 年,美国国会通过“国防教育法”拨巨款改革教育。根据调查,当时美国学生的数学成绩在收集到的 12 个国家中名列第 11 位,美国学生也不像其他国家的学生那样喜欢数学。1961 年,美国数学教师委员会出版了一个:《学校数学的革命》,并启动了一次数学课程改革。

(2)“新数运动”的思想

对现代化运动的兴起有决定意义的是 1959 年 9 月美国“全国科学院”召开的一次会议。会上全面研究了数学改革的问题,提出了课程改革的四个新思想。

第一,学习任何学科,主要是使学生掌握该学科的基本概念、基本原理和基本方法,这就是所谓的结构主义思想;

第二,任何学科的基础知识都可以用某种方法教给任何年龄的学生,即所谓的早期教育的思想;

第三,过去教学只培养逻辑思维能力,而今后则应重视发现的能力,或称之为直觉思维的能力;

第四,激发学生学习积极性的首要条件不是考试,而是对数学的真正兴趣,因而提出教材的趣味性以及教学方法上的一系列问题。

这四个新思想成为“新数运动”的理论基础。

这场“数学教育革命”在 60 年代初风起云涌,人们习惯上称为“新数学”运动,简称“新数运动”。在以美国为首的许多国家都积极开展了中学数学教育现代化的试验,一时出现了许多新大纲,新教材,这些教材有三“新”的特点,即内容新、体系新、处理新。

(3)“新数运动”对教学内容和体系的改变

从内容上看,较传统教材增加了以下 6 项:

第一,集合论初步,引入集合运算及映射概念;

第二,数理逻辑初步,介绍命题演算、量词等,并使用现代的逻辑符号;

第三,贯穿“结构”观点,群、环、域、向量空间、矩阵代数,都结合实例严格

叙述；

第四，下放“微积分”初步，将一元微积分的主要内容放到中学；

第五，概率论和统计初步；

第六，算法语言和程序设计初步。

前三项主要从抽象理论基础着眼，后三项则基于“应用”的因素，不过多数教材重理论、轻应用。

从体系上看，一些主要的“新数学”教材都作了彻底的改革，三角、代数、几何的分科不复存在，几何学代数化，欧氏几何体系被变换几何观点、方法代替，集合、函数的观点，结构的观点成为贯穿全书的线索，并增加了应用和趣味的内容。

新教材的处理也颇有新颖之处，强调趣味性，纠正学生视数学为畏途的传统观念；强调数学直觉和做实验，不崇尚技巧。此外还用流向图解方程以训练思维能力，用发现法要学生自己去发现定理，不用传统的讲述法等也有其特色。

以上三“新”，主要是加了新内容。然而有增必有减，那么该消去哪些内容呢？首当其冲的是平面几何，其次是代数恒变形、反三角函数、三角方程、二次不等式、无理数理论等，这些内容也都作了删节。从传统的观点看，这些都是基础。因此从这个角度说“新数”运动削弱了基础。

追求现代化的目标，成了当时数学教育研究中的趋势。当然，认识并非完全一致，但要改革的愿望毕竟占了上风。于是形成一种世界性的规模宏大的“数学教育现代化”的浪潮。

（4）“新数运动”的特点

60 年代初（包括 50 年代末），在以美国为首的许多国家都积极开展了中学数学教育现代化的试验，他们的共同特点和追求的目标是：

结构化——统一化。以集合—关系—映象—运算—群—环—域—向量空间的代数结构为主轴，把中学数学内容统一起来；

公理化——抽象化。把集合论初步和几何公理引入教材，这是近代数学科学发展的共同趋势在中学数学教育中的反应；

现代化——通俗化。大量收入现代数学内容和数学符号，利用生活现象为模型，帮助学生理解；

几何代数化。打破欧几里得几何体系，轻视几何，重视代数，用各种方式取代欧氏几何；

计算机化——离散化。普及计算器，与数值分析、概率统计及各种函数的学习相结合，使数学教学出现新的面貌；

传统数学精确化。增加近现代数学知识观点和方法，精简传统内容，几何被精简的最多，其次是根式、无理式、无理函数和三角方程等；

教学方法多样化。研究电化教学程序教学和个体教学，提倡发现法，教法趋

向多样化。

(5)“新数运动”的分析

经过十多年的实践,人们发现学习“新数”的学生的计算能力和几何直观能力都很差,毕业生无论就业或升学都有困难,甚至不能用所学的知识解决日常生活中的常见问题。如有些青少年上街买东西只能按单价付款,而不去计算总数。1968 年英国教授汉默斯利(Hammersley)就曾说:“新数”正在导致学生的“数学技能衰退和智力低下”,1971 年,法国教授托姆(Rene Thom)写过一篇文章《“现代”数学:教育学的错误还是哲学的错误?》文章对“新数运动”批评说,以代数代替几何是错的,把现代化搞过头,追求形式的抽象的理论是有害的,认为集合论与数理逻辑能在改革数学教学中起根本作用是幻想;放弃直观而过分推崇演绎法及公理法是不合理的。美国教授 M · 克莱茵(Kline M)1973 年出了一本书,书名为《为什么庄尼不懂加法——新数的失败》,书中分析了“新数”失败的原因,提出了自己对数学教育改革的意见。

当时有些教育现象也引起其他社会阶层的普遍不满,美国接受“新数”教育的一批学生,数学成绩普遍下降,甚至由于强调要学生掌握结构,竟然出现如下教学对话(教师问):“为什么 $2+3=3+2$?”(学生答)“因为两边都等于 5。”(教师纠正说)“正确答案应该是‘加法交换律成立’”据说有一位家长问他 8 岁的孩子:“$5+3$ 等于几?”孩子说:“$5+3=3+5$”,家长换个问法“5 个苹果加 3 个苹果,共有几个苹果?”孩子说:“不论苹果、梨,还是书本,反正 $5+3=3+5$”这一现象使人们十分担忧。

美国对“新数”的批评意见大致如下:

第一,学校应面对所有的学生,而不仅仅是培养数学家。“新数”只着眼于现代数学的观点,而不考虑学生未来的工作和生活的需要,没有认真考虑社会对数学教育的总体要求;

第二,抽象概念不能过早引入,否则学生必将难于接受,影响学习热情。

第三,逻辑思维不能仅靠演绎推理去培养,还应重视归纳模拟试验观察和猜想。“新数”只强调公理化、形式化和演绎推理,忽视了直觉思维到形式思维所必需的转化过程;

第四,“新数”忽视应用;

第五,把具有丰富历史根源的几何学,降到从属代数的地位,砍掉了欧氏几何,割断了数学教育的历史,破坏了数学教育的基本内容。

关于新数学运动,在很大程度上人们是持否定态度,客观地说“新数学”运动的“失败”是由于在数学教学中过分强调了数学教育的“数学属性”。数学教育除了应注意到数学属性以外,还应该注意到“教育属性”。然而过分强调数学教育的“教育属性”而相对忽视“数学属性”,将会使数学教育出现像有些数学教

育家所说的“最终所得到的并非数学，而是什么别的东西。”的问题，这一点应该值得我们注意，这也应该是我国当前数学教育改革的难点所在。在数学教育改革中，只有同时注意数学教育的“教育属性”和“数学属性”，并使两者协调发展，才能使数学教育改革健康发展。

(6)“新数运动”的启示

第一，数学教育现代化必须置于数学教育这个系统内考虑；

第二，数学教育现代化应该是一个渐进的过程；

第三，数学教育现代化具有可行性；

第四，数学教育现代化必须依据本国的国情。

2. 20世纪70年代的回归调整

20世纪70年代初期，由于“新数”遭到普遍尖锐强烈的批评，人们喊出了一个口号“回到基础”(back to the basics)。这种呼声首先是在美国，后来在其他国家也有相同的要求，“新数浪潮”被冷落起来。

20世纪70年代前半期，人们进行了认真的思考，在许多批评意见出现的同时，也有许多维护“新数”的意见，美国在1974年专门成立了一个数学教育全国质询委员会(NACOME)，对当时美国的中小学数学教育做调查分析，1975年发表了一份调查报告。报告承认过去十多年学生数学成绩下降，但不全同意部分数学教育家指责。报告认为，过分强调演绎方法和逻辑的作用不对，但忽视数学结构和逻辑的作用也是错的。报告指出，“新数”在内容的改革方面，主要集中在几何、概率与统计。“新数”引进变换法、坐标法等思想，能使传统几何教育变得有利于未来的数学和科学学习；引入直觉几何，也值得称赞。概率的引入是成功的，统计尚嫌不足，NACOME还指出：测验表明，学习“新数”的学生比学习“旧数”的学生，只是在算数运算能力方面较差，在其他方面还是前者高于后者的。报告认为“全盘否定60年代的数学教育改革是不公正的。”

美国有些州总结经验教训，认为失败的原因在于教师的培训工作没有跟上，教学方法不合适。一位资深的教师贝尔热(Belger)说：“1960年代以来的新数学教会我们去教较好的数学，却很少告诉怎样教得更好。”他们还举出一个重要的例子：1977年，美国队在第19届国际数学奥林匹克中获得冠军，组成美国队的8个学生是从34万中学生中选拔出来的，但他们都受过系统的“新数学”的训练。

经过认真地对比与评价之后，各个国家在20世纪70年代后半期，都采取了相应的调整措施，总的趋势有以下几点：

(1)“回到基础”。针对“新数”不重视计算技巧而偏重抽象概念符号或过早引人“数学结构”的弊端，重新强调计算能力的培养；

(2)强调数学的应用。努力培养学生运用数学解决实际问题的能力；

(3)“恢复几何”。将平面几何的内容又从新列人中学数学教材；

(4) 肯定和加强概率统计。把概率和统计列入中学教程，这是“新数”的重要成果，是科学发展的需要；

(5) 强调从学的角度去设计课程，以适应不同能力兴趣的学生；

(6) 数学教学不再只对少数尖子学生，而考虑各种水平的学生，重视教育原理，开展个体化学习试验，面向大众进行数学教育。

概括地说，在20世纪70年代前半期讨论的基础上，后半期做了调整，这种调整“多是针对过去20年‘新数’所忽视的问题进行的。”在许多方面抛弃了“新数”，甚至与之背道而驰，但也有不少方面，是在“新数”基础上加以发展的。

3. 20世纪80年代的“问题解决”

20世纪80年代的数学教育处于一个加紧探索、加紧试验的阶段。自80年代后期以来，国际数学教育界普遍关注着两个重大的特殊问题：

一个是关于计算机在数学教育的地位和作用的问题，另一个是关于“问题解决”(problem solving)在数学教育中的地位和作用的问题。这里我们主要谈谈后一问题。

20世纪80年代后期，英美数学教育家们提出：“必须把‘问题解决’作为中学数学教育的核心问题”，“数学课程应当围绕问题解决来组织”，“数学教师应当创造一种使问题解决得以蓬勃发展的课堂环境”。他们认为对“问题解决”研究得如何是数学教育水平的有效标准。而且认为“数学教育的核心是培养学生‘问题解决’”的能力，提出为了培养“问题解决”的能力，必须重新考虑中学数学的课程问题。因此问题解决成为20世纪80年代数学教育的一个潮流，并且受到数学教育界的普遍重视。

其实美国数学家和数学教育家波利亚(Pólya G.)在上世纪40年代末就提出将“问题解决”作为数学教育的重要内容，波利亚还提出了问题解决教学中的“启发法”，虽然波利亚的工作在世界范围内引起过积极地反响，但由于20世纪60年代在数学教育中占据中心地位的是席卷全球的“新数运动”，20世纪70年代，作为上述改革的“反动”，“回到基础”又成了美国数学教育接的主要口号，因此，只是到了80年代，作为一种“曲折的前进”，“问题解决”才真正成了数学教育的中心，波利亚的有关论述也成为人们关注的热点。例如，美国数学教师全国委员会(NCTM)1980年出版的指导性著作《学校数学中的“问题解决”》(Solving in School Mathematics)就重印了波利亚的一篇短文《论中学数学里的数学解题》作为全书的第一篇文章，而这一篇文章则是波利亚在1949年发表的。因此，可以说在“问题解决”的早期研究是对波利亚的重新发现。

正是由于波利亚的影响，就20世纪80年代初期而言，美国关于“问题解决”的研究主要集中在对与启发法的明确阐述和进一步发挥上，以至“数学启发法”在很大程度上成了“问题解决”的同义词。然而，相应的实践，特别是“问题

解决"的教学似乎未能取得预期的效果,特别是人们经常会看到这样一种状况,即学生已经具备了足够的数学知识,也已经掌握了相应的方法论原则(启发法),但仍然不能有效地解决问题。于是人们对这一失败的原因作出深入地分析,并由此作出进一步的研究,促成了"问题解决"的研究和实践的新发展,从而事实上造成了对波利亚的"超越"。

(1) 对"调节"与"观念"的认识

具体地说,新的进展集中地表现于以下认识,即"问题解决"是一个包含有多个环节的复杂过程,从而我们的研究就不能唯一地集中在启发法之上,而应过渡到对于解决问题的全部过程的系统分析,特别是应当清楚地揭示那些对于解决问题有着十分重要影响,但又往往是人们所忽视的环节。这里对"调节"、"观念"这样两个环节及有关研究做一些介绍。

所谓"调节(control)"是指解题者对自身所从事的解题活动的自我意识、自我分析和自我调整,容易看出,这事实上就是现代认知心理学中所说的"元认知"能力。①

具体地说,不成功的解题者往往不假思索地采取某一方法或解题途径,或总是在各种可能的解题途径中徘徊,而对自己在干什么特别是"为什么要这样干"始终缺乏明确的认识。另外,在沿着某一解题途径走下去时,又往往不能对自己目前的处境作出清醒的评估并由此作出必要的调整,而只是"一股劲地往前走",直致最后陷入了僵局而一无所获。美国一项调查显示,在美国约有60%的学生在解题时就是采取上述盲目干的做法。因此解决这一问题显得十分紧迫。研究认为,经常地问及"什么(what)?""为什么(why)?""如何(how)?"即思考现在在干什么,准备干什么,为什么要这么做,实际效果如何,是促进或进行自我调节的有效的方法。

由于调节涉及解题者对解题活动的自我意识、自我评估、自我调整,因此,这就不能纳入"启发"的范畴,而应被看成属于另一不同层次。因此调节也常常被认为属于元认知(meta - cognition)的范畴。

所谓"观念(belief)"在这里是指解题者的数学观及其对于自我调节能力的认识等,②由于人们(自觉或不自觉地)总是在一定的观念指导下行动的,因此,在这样的意义下,我们就可以说,一个人的数学观念决定了他从事数学活动的方式,研究表明观念对学生解决问题的能力有着十分重要的影响。

有不少美国数学教育家曾对美国的学生的情况进行了调查,他们所得出的普遍结论是:就现状而言,相当一部分学生的处境是令人担忧的。例如,戴维斯

---

① 郑毓信.数学方法论.南宁:广西教育出版社,1996.12(48).

② 郑毓信.数学方法论.南宁:广西教育出版社,1996.12(50).

(Davis R)教授就曾经指出:"对于大多数(美国)学生来说,数学学习就意味着每天准时到校,坐在教室里安安静静地听那些他既不理解,也根本不感兴趣的事,每天的日程就是听讲并按教师的布置且按教师指定的方法去做练习,努力记住一大堆毫无意义且零零碎碎的知识,而唯一的理由就是因为将来的某一天他们可能会用到这些知识,尽管教师和学生对是否会有这样一天持怀疑态度。"显然,这种处境对学生形成正确的观念是极为不利的。以下是美国学生中十分普遍的观念:

只有书呆子才会喜欢数学;

数学是无意义的,与日常生活毫无关系;

只有天才才能在数学中作出发明创造;

每一个数学问题都有正确解答;

数学证明只是对一些人们早已了解了的东西去进行检验,从而就是一种数学游戏,没有实际意义,没有真正的价值等。

这些观念对"问题解决"产生了许多消极影响。例如舍费尔德(Schoenfeld A)教授就曾经通过以下例子对此进行了分析。

每辆卡车最多可以载36个士兵,现有1 128个士兵送到训练营地,问需要多少辆卡车?

测试的结果表明,70%的学生正确完成了计算:1 128 ÷ 36 = 31……12。然而,答案中有29%的学生回答"需要31余12",18%的学生答案为31,只有23%的学生给出了32这一正确答案。[①]

舍费尔德教授分析,当学生回答有余数时,他们显然没有把这一问题看成是真实的问题,而这种做法正是他们在数学课堂中,通过机械练习学得的。

另外,在一次实验(1986年)中,97个一年级和二年级的学生被给予这样的问题:在一条船上有26头绵羊和19头山羊,问船长的年龄是多少?

结果有76个学生通过把26和19这两个数加起来而获得了解答。

(2) 关于教师的导语

对前面提到的船长年龄的问题,山东省济宁教育学院哈家定老师作了进一步的研究。首先教师另外编制了三道常规题,加上"一条船上有75头牛,34头羊,问船长几岁?",组成一份小测验试卷,在一个小学里作了一次对照测试。

测试对象是该校四年级的两个班。其中一个班在发卷子前和测验中途给予两次指导,即向学生说明:"会做就做,不会做就空着,如果那道题没法做,就写没法做"。另外一个班则不做任何指导,原则上时间不限,但学生只用了12分钟就交卷了。

测试发现,在未作指导语班的学生中有4名学生没有做此题,事后问其原

① 郑毓信.数学方法论.南宁:广西教育出版社,1996.12(52).

因，他们说不知道怎样做此题，其余51名学生答案中，多数为41岁，个别为109岁，还有为11岁的。事后访谈，答109的学生说不出道理来；答41的学生说：船长的年龄应该在40岁左右，100岁就没法下海了；答11岁的学生正好11岁。而在做了指导的57名学生中有大部分学生回答“没法做”，由此可以看出教师的指导语对学生摆脱思维束缚是有一定的帮助的。

虽然对“问题解决”的研究有一定的进展，但是，至今为止人们对“问题解决”的本质特征是什么还缺乏完全统一的理解。例如，英国的COCKCROFT报告认为：把数学用于各种情况的能力称为“问题解决”。美国NCSM把“问题解决”定义为：将先前已获得的知识用于新的不熟悉的情况的过程。《国际教育辞典》说：“问题解决”的特性是用新颖的方法组合两个或更多的法则去解决一个问题。由于对“问题解决”的本质的认识不同，就形成了不同的教育教学方式，对这一问题的研究还需进一步。

从对国内外的数学教育改革的回顾我们可以看出，任何一次数学教育改革都有其自身的背景和理论基础，而且也有明确的目的，但是改革的结果如何，却要经过实践的检验。

12.3 中美数学教学的一些比较

我们先来对比几个教学实例。

1. 两堂课的比较

一个实例选自全美数学教师委员会编的《教授数学的职业标准》(1991)，是由美国教师莎维提供的“$y=|x|+c$ 的图像”的教学设计。一个是选自上海教育出版社的《名师授课录》(1992)，是由安徽省合肥第六中学朱新民教师执教的“二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质”。这是两节内容相类似的课。

(1) 美国莎维执教的“$y=|x|+c$ 的图像”

引入：观察 $y=|x|$ 的图像

主要教学过程：

第一，根据 $y=|x|+1$，$y=|x|-3$，列表、画图(可输入计算机检验)，与 $y=|x|$ 的图像比较，并评论；

第二，不列表画出 $y=|x|+4$ 的图像；

第三，学生自己写出学习日志(理解的、没有把握的等)；

第四，作业与小结：小结 $y=|x|+c$，激发明天讨论 $y=|x+c|$。

(2) 合肥第六中学朱新民教师执教的“二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质”。

引入：复习 $y=ax^2$ 的图像和性质

主要教学过程：

第一，作出 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$，$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 的图像并思考其形状、最值、位置变化规律；

第二，将 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$，$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 展开，引导学生使用配方法一般的处理 $y=ax^2+bx+c$ 的作图问题；

第三，学生总结，阅读课本结论。

作业与小结：求抛物线顶点、对称轴、最值，教师总结解题方法。

我们来看一下在两节课中学生的表现。

(1) 美国莎维女士执教的函数图像课

教学对象是中学一年级 28 名选代数的学生，课上可使用计算机。

莎维让学生根据函数 $y=|x|$ 列出一个函数表并绘出的图像，学生轻声说："好像是 V 形"。

课堂讨论时，一女生主动站起来把图表画在前面黑板上，其余学生观看核对，也有学生在帮助有困难的同学，一学生建议输入计算机，多名学生赞同，显示做对了，全班欢呼。然后莎维让学生在同一坐标中画出 $y=|x|+1$，$y=|x|-3$ 的图像，然后写一段与 $y=|x|$ 的图像作比较并对照结果的评论，可独立做，也可合作完成。

两位学生叫起来，"所有图像形状一样！"另一位学生说那是"不同角顶点的角形"，全体学生补充说："其实是相似的角形。"

莎维在教室里走动，听讨论，提问题，给建议时，一个小组齐声喊："我们发现了是图像的平移。"莎维说："你们的猜测很有意思，其他人同意吗？"其他学生无表示，似乎不明白。该组一男生说："$y=|x|+1$ 的图像是往上移 1 格的 $y=|x|$ 的图像，$y=|x|-3$ 的图像是往下移 3 格的 $y=|x|$ 的图像"莎维引导全班继续下去，问谁能不用列表画出 $y=|x|+4$ 的图像来？大家迅速举手，"哗"连不常举手的一位学生也举起了手，由他试一试，很高兴，另一学生输入计算机，计算机证实了不常举手的那位学生的尝试，大家为他欢呼。

莎维让学生们记日记（包括理解的、还没有把握的）约 10 分钟。

(2) 合肥第六中学朱新民执教的初中二次函数图像课

课题：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质

复习上节课学过的二次函数 $y=ax^2$ 的图像与性质，教师和学生甲共同完成。

教师提出课题，请全班学生阅读课本并思考三个问题：

a. 课本中三个函数 $y=2x^2$，$y=2(x+3)^2$，$y=2(x+3)^2-2$ 的图像是怎样

作出的？

b. 它们的形状是否相同？最值各等于多少？

c. 你能发现它们的位置变化规律吗？

学生乙依次回答上述三个问题，回答完全正确。

请学生丙说出三个函数图像的顶点和对称轴，教师问："如何从表、图像及函数解析式中去观察函数图像的顶点和对称轴呢？"教师针对学生的回答，进行了必要的指导。

教师继续引导学生将 $y=2(x+3)^2$，$y=2(x+3)^2-2$ 分别化为

$$y=2x^2+12x+18, y=2x^2+12x+16,$$

然后提出问题"同学们能不能画出后面这两个函数的图像呢？"学生说："能！它们实质上是 $y=2(x+3)^2$，$y=2(x+3)^2-2$ 的图像"

从特殊到一般，教师问："函数 $y=ax^2+bx+c$，与 $y=ax^2$ 的图像的形状、顶点、对称轴和相对位置如何呢？要解决这个问题，事先要做什么准备工作呢？"

学生丁："先要配方"。

教师把学生配方的结果 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 与上面图中的函数进行模拟，利用图像进行讲解。

教师又请学生阅读课本中 $y=ax^2$ 的三条性质，然后说"我们能不能仿照它去总结 $y=ax^2+bx+c$，的性质呢？"，学生齐声回答"能"。教师要求学生把课本上的结论阅读一遍。最后教师讲解课本中的两道例题，并总结解题方法："求抛物线的对称轴、顶点坐标以及二次函数的最值，有两种基本方法：一是配方法；二是公式法，要重视配方法，而不能仅仅满足于会代公式。"

最后教师布置作业：阅读课本，做课本习题。

20 世纪 80 年代以来，数学教育改革历经了各种挫折和磨难之后，逐步走向成熟，上述两节课是 90 年代初中、美双方很有代表性的课例。从整个教学过程看，美方教师十分注重学生的参与度，总是先提出一个感兴趣的问题，然后让学生独立或小组形式投入，教师却要讲究"什么时候介入"的教学问题，其最终目标在于培养学生独立探究的能力与气质。中方教师非常注重新旧知识之间的联系，起点是对教材的感知，然后充分利用学生已有的知识与经验，教师则讲究新旧知识的联系是否"合理与实质"的问题，其目标归属主要在于使学生掌握系统牢固的基础知识和熟练的基本技能。

从教学过程可以看出，两节课都在探索学生如何主动地学习的问题。前者以学生的兴趣为中心，粗犷而放达，犹如学游泳，直接把孩子丢在水里，让他们在自我体验中增长才干；后者环绕课本知识而展开，细腻中见扎实，

2. 案例 2

旅美学者蔡金法博士，对中国内地和美国的小学生的数学学习状况做了大

量比较研究，这里只列举其中的一个测试情况。虽然是小学的情况，但对我们还是有启发的。

Sally 正在举行一次聚会，当门铃第一次响的时候，1 个客人进门了；当门铃第 2 次响的时候，3 个客人进门了；当门铃第 3 次响的时候，5 个客人进门了；当门铃第 4 次响的时候，7 个客人进门了；以这样的方式继续进行下去，后一次门铃响的时候进门的客人数比前一次门铃响的时候多 2 个。

（1）当门铃第 10 次响的时候，多少个客人进门？解释一下你是如何找到答案的。

（2）在下面的空白处，写出规律或用语言描述如何求得每一次门铃响的时候进门的客人数。

（3）99 个客人进门时，是第几次门铃响？解释或展示你是怎样获得答案的。

（4）提出三个问题分别是容易的问题、中等难度的问题和较难的问题。

门铃情境下所提出问题的类型

		98 个美国学生			155 个中国学生		
		问题 1	问题 2	问题 3	问题 1	问题 2	问题 3
拓展性问题	在某声铃响时的客人数	33	27	17	21	30	27
	一些客人进来的铃响数	0	2	1	1	3	1
	几次铃响后的客人总数	7	19	26	4	7	11
	一些客人进门时的铃声总数	0	0	6	0	3	6
基于规划的问题		13	7	0	6	3	3
拓展性问题的总百分比		53	55	50	32	46	48
非拓展性问题		20	5	2	41	20	9
无问题或不相干问题		27	40	48	27	34	43

上述表格没有证据说明，美国学生比中国学生易于提出更多的不同问题。[1]

在解决门铃问题中，当要求他们去求第 10 次门铃响时进门的客人数时，中美几乎获得了相同的成功率（70%）。然而，当要求他们去求 99 名客人进门时的铃声数时，中国学生的成功率（43%）要显著高于美国学生的成功率（24%）。这一结果与过去的研究已经表明的结果是一致的。即中国学生在问题解决中要比美国学生更多地使用抽象的策略，因而他们也就能成功地去解决那些运用抽象策略就能最有效地、最准确地获得解答的问题。

① 张奠宙．中国数学双基教学．上海：上海教育出版社，2006．5（38）．

运用抽象策略的学生，一些学生注意到，在某一特定的铃声之后进门的客人数等于铃声数的2倍减1。另一些学生注意到，在某一特定的铃声后进门的客人数等于铃声数加铃声数减1。

而运用具体策略的学生会列一张表或一个数列，或是注意到，每次铃响的时候，都比上次铃响的时候多进2个客人，因此依序加2即可找到答案。

研究结果证实了中国学生倾向于运用抽象的策略，美国学生倾向于运用具体的策略。但研究结果也显示，美国学生比中国学生更经常地选择恰当的策略，也就是说，在选择策略上具有更多的灵活性。案例也可以说明，中国课堂在培养学生常规策略上是有效的，而美国课堂在发展学生创造性数学思维上是有效的。

从比较我们发现，两国的教学各有所长，也各有不足，因此互相取长补短是共同的发展趋向。其实，由于美国中小学生在国际数学比较测试中表现平平，美国数学教育研究工作者试图了解和学习那些取得高分国家或地区（如中国）是如何进行数学教学的。一种理想的教学观念和实践也许存在于东西方两极的中间地带，“基于各自的本土文化，相互借鉴，取长补短，用以改进本国的教育改革。”①

有研究表明，与美国学生相比，中国学生在解决问题时，如果没有把握常常一字不写，而不愿意随便尝试一下，写下部分（也许是无意义的）过程。② 而美国学生却对于不熟悉的问题习惯于多方面的尝试。

12.4 我国数学教育评价中存在的问题

12.4.1 对教师的教学评价

对教师的教学评价对课堂教学起了一个导向的作用，它将教学分为“好的”和“需要改进的”。现在我们认为的好课，就是教师的讲解逻辑性强，教师的基本功好，学生都听懂了，掌握了教师所教的内容，至于学生的能力、学生的思维，学生是不是真正理解了数学，这些方面却不是重点考虑的问题，在评价中总是有意无意地被忽视。也就是说我们的教学评价主要集中在一些可以观察到的现象，说明还处于初级阶段。评价对于那些没有完全解决学生提出的问题，让学生带着问题下课，但学生主动探索的课有时却不认为是好课。判断好课的标准是学生是不是对所有问题都懂了，即教师的教学是不是将学生的问题都解决了，学

① 黄荣金. 华人数学课堂之透视. 数学教育学报. 2006. 2(68).

② 同上.

生没有问题了。这样的评价方式有一定的可取之处,如比较便于比较,比较“客观”,但这种评价方式的问题和不足,也是我们应该认真思考的问题,恐怕不能简单地用好还是不好来评价这种评价方式。

至少我们可以认为,对公开课的评价不应该停留在表面效果上,应当作开展教学专业研究的一种契机来利用。有些老师敢于引导学生提出问题,探究问题,这种做法本身应该提倡。有些教师虽然没能当场解决学生的所有问题,留下一点遗憾,却能给师生都下了探索的空间,可以在下次课上组织更为深入,成熟的探讨,这种教学也应得到承认,总之,目前我国对教学的评价方式过于刻板,需要改进。

12.4.2 对学生的学习评价

过去我国的评价是通过考试对学习结果进行评价,由于单一的评价手段无法建立评价目标多元、评价方法多样的评价体系,不能关注学习的过程,不能关注在数学活动中所表现出来的情感与态度,因而评价不能达到全面了解学生的数学学习历程,激励学生的学习和改进教师的教学的目的。

实际上,教学评价可以分为学习过程的评价和考试评价两个方面。

学习过程的评价,主要是对学生的学习积极性和平时的学习态度进行评价。学习积极性具体表现在课堂参与的热情,如回答问题是否主动,因此教师有目的的设置一些合理的问题是重要的。学习态度具体表现在作业完成的质量程度,如独立完成作业的情况,作业的准确率,讲解后的订正情况等。

学习过程的评价是一动态的评价过程,它要有比较统一的、明确的标准,同时要突出和信任任课教师在评价中的作用。例如,可以由教师统一编写有层次的作业和评估标准,统一制定合适的、全面的评价细目表,然后由教师定期地进行记录,评价。

考试评价,是比较传统的评价制度,这种评价方式是一种重要的评价方式,利用得当,可以调动学生和教师的积极性,运用不当,却可以伤害教师和学生的积极性。因此,充分利用其有利因素而克服其不利因素,是改进考试评价方式的基本思路。如考试评价可以把试卷分为几个层次,在考试时间内,只要完成第一个层次的并达到一定分值就算合格,而用其他层次划定良好或优秀。这会比用一个分数划定界线更合理。当然,最后对学生学习状况的评价必须由学习过程和考试的评价综合给出,以保证评价的公正性和准确度。

上述讨论表明,我国基础教育对学生学习的评价还处于比较初级的阶段,评价的积极因素不能充分发挥,评价方式过于简单,因此应改进评价观念和评价手段,使评价成为学生学习的动力。

12.5 我国数学教学的成功与不足

12.5.1 注重"数学基础知识和基本技能"的教学

"双基"是我国数学教育的立足之本、发展的基础[①]。注重"数学基础知识和基本技能"的教学，是我国数学教育的特点。由于中国学生在"国际数学测试"中成绩优良，在国际奥林匹克竞赛中屡获佳绩，因而"双基"数学教育引起世人重视。尽管目前还没有具备完整的理论形态。但是已经有了不少积累，值得我们进行总结和提高。

数学知识是数学能力发展的基础，"无知者无能"，没有数学知识的人不可能有数学能力。但是如何发展我国在数学教育方面的成就，又如何改革和避免目前存在的问题，是本次课程改革需认真思考的问题。这里，我们论述目前对"双基"研究获得的结果，包括其成功和不足。

"数学双基"的内涵有狭义和广义之分。狭义的"双基"是指记忆和掌握"基本数学公式和程式"、快速且准确地进行计算的"基本技能"，以及能够逻辑地进行数学的"基本论证"。广义的则泛指和"创新"相对的那一部分，不妨称为"双基"平台。通过考试能够外显的"双基"，往往指狭义的部分。

我们"双基"教学，主要在以下四个方面有独特的认识：

1. 运算速度

"算"是中国传统数学的特点之一。中国数学教学，继承善于运算的传统，特别是强调运算的速度。中国数学教育理论认为，速度保证了效率，速度为高级思维提供了充裕的时间和空间，因此在进行运算时具有一定的速度是一个人的基本素质。

2. 知识的记忆

我国的数学教学，强调必要的记忆，认为记忆是理解的基础。记忆某种对象的必要特征，才能真正的理解它。例如，中国要求学生背诵"九九表"，在年幼的时候就要完成。西方的数学教育，则不强调背诵"九九表"，而把精力放在"理解乘法是加法的累计结果上，结果是中国学生在数字计算上有明显的优势。又如负负得正的运算，中国数学教学中也是先操作，记住会用，以后慢慢理解，而不是等学生理解了这一法则再开始运用。我国教育理论认为理解是逐步完成的，因而不能等完全理解，才能操作运用。应该是理解要操练，一时不理解的，也要操练，在操练中加深理解。教育实践证明，要求学生完全理解后再运用的教学模式

① 章建跃. 对数学教育改革的一些认识. 数学教育学报，2003. 3(33).

并不是任何情况下都能行得通的，而在运用中不断加深理解却是一条有效的教学途径。

3. 适度形式化的逻辑要求

尽管数学具有形式化的特点，但是中小学的学生，不可能也不必要全盘形式化，应该进行一定的"非形式化"。但是，中国数学在20世纪50年代苏联数学的影响下，强调尽量的形式化，反对用大量"白开水式"的材料代替数学，造成学生在理解数学知识、形成数学能力和正确认识数学等方面的困难。没有形式化的数学不成其为数学，过度形式化的数学会给学生带来理解上的难以逾越的障碍，因此关键是"适度"。中国数学教育理论认为，应该按中学生的思维特点来设计中学数学教材。

但中国的数学教学有时在逻辑严谨性上要求过严。如1991年全国高等院校统一招生考试中的试题：①

问题15. 下列哪个是假命题?

(A) 存在α、β的值，使得$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

(B) 不存在α、β的无穷多个值，有$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

(C) 对于任意的α、β的值，总有$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

(D) 没有α、β的值，使得$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

正确的选项是(A)。

这是一个咬文嚼字式的考题，中国数学教育对逻辑严谨性的重视可见一斑。

4. 重复训练

中国的数学教学强调反复训练，注意进行一定的重复以形成"技能"。但是，中国的重复并非简单的重复，而是具有"变式"训练的特征，这对训练学生解决数学问题的能力是有帮助的。

数学双基教学具有深刻的中国文化底蕴。小农经济的稻作文化，精耕细作的要求，养成重视操作技能的传统；儒家文化中收敛性的思维模式，强调严格地遵从经典；严酷的考试文化，只要求基本功和八股程式，无关创造；这些文化传统为双基的教学奠定了思想基础。

中国数学双基教学，以重视逻辑演绎为主要特征。包括该概念的辨析；不重不漏的分类；主要公式的记忆；知识之间逻辑链接；数学解题的程式的掌握；数学解题套路的熟悉。这些都是必要的。但是数学毕竟不是逻辑，不能像有些教师那样把培养逻辑思维作为数学教学的核心。把逻辑思维搞过了头，缺乏活泼的数学思维和数学意识，就缺乏了数学的灵魂。因此如何把握一个度的问题是"双基数学教学"的一个重要课题。

① 张奠宙.中国数学双基教学.上海：上海教育出版社，2006.5(62).

中国数学双基教学，赢得了时间。中国教师的主导作用，防止了学生漫无边际的瞎闯，赢得了基本技能训练的强度，在一定程度上是对的。但是，教学效率的过度要求，制约了让学生进行自主“探究”、“发现”、“活动”等教学策略的使用。这种教学给学生的后继学习带来一定的困难。如，有研究表明[①]，刚入大学的学生，对数学有一种神圣感，尤其对数学的逻辑性和严密性推崇备至，学习数学的热情也同样很高，但很快就陷入迷茫，因为他们在中学学习数学的过程就是按给定的套路做题，而在进入大学后，很快发现数学不再像中学时的样子，对那些需要理解、讨论、探究的问题感到格格不入，题目一时做不出来，就很容易感到束手无策，并陷入恐慌。学生们选择解决这个问题的方法，就是四处寻找习题解答，厌学和不学的学生与时俱增，成为大学教育中的棘手问题。因此把握两者之间的平衡，也是双基教学的任务。

12.5.2 TIMSS 显示的结果[②]

1. 学业成绩与自信心的不对称性

TIMSS 表示 Trends in Mathematics and Science Study。为了解世界各国学生在数学与科学方面的成绩状况，以及影响成绩的相关因素，国际教育成就评价协会在 1995 年开始了这项研究，每四年进行一次测试。这项研究由笔试和录像研究两部分组成，笔试部分主要通过测试及问卷来收集学生的学业成绩和学习态度、课程设置、教材管理以及教学资源等。

1999 年对学习数学的态度是否积极，以及对数学学习是否有自信心的测试结果显示，一方面，华人地区学生的数学成绩优异，另一方面，他们对数学学习的态度相对消极。

培养学生对数学的积极态度是许多国家数学课程的共同目标之一，学者通常认为好的学业成绩与积极的学习态度密切相关。但上述结果却显示了一个不对称现象，这一现象值得注意，虽然华人学生相对消极的数学学习态度似乎没有影响学生的数学成绩，但是负面态度说明，如果获得好的成绩的代价是引起学生憎恨这门学科，那么所付出的代价就太大了，因为一旦成绩不具有意义了，学生将远离数学。

2. 繁难且无意义的习题影响学生对数学的认识

注意变式训练，但不能故意出一些刁钻古怪的题目来刁难学生，使学生愤恨

① 郇中丹. 对提高中学数学教师数学修养的思考和尝试. 数学教育学报，2006.2(5).

② 梁贯成. 第三届国际数学及科学研究结果对华人地区数学课程改革的启示. 数学教育学报，2005.1(7).

数学。有一则叫做“免予起诉”的笑话可以间接反映出某些人对数学的态度①：

法官：你被控殴打你的老师，有这事吗？

被告：有，不过我要澄清一些事实。

法官：什么事实？

被告：他见到我时，总是为难我。例如，他前天又问我：“如果一只半母鸡一天半下一个半鸡蛋，那么两又四分之三只母鸡15天下多少鸡蛋？”

法官：明白了，你被免予起诉，可以回家了。

虽然这是一则笑话，如果把老师说成是白挨打的对象就是不公允了。但这一笑话却反映了一些人对数学理解的偏差。这一问题的出现，一方面要归咎于应试教育，一些高考模拟试题的设计者正在将数学问题研究引向歧途，长此以往，数学题目便以其偏、难、怪、假的丑陋形象令人恐惧厌恶并敬而远之；另一方面，这则笑话从一个侧面折射出某些人对被异化了的数学知识的厌倦。

3. 教学重点未注意教育

数学教育包括两个不可分割的方面，即数学方面和教育方面。从我国多年的数学教育的实践可以观察到，我国的数学教育，重点放在“数学”上，而不重视“教育”。主要表现在我国的数学教育是以传授数学定义、公式、法则为主，强调严格的练习速度和熟练程度。

这种偏重于“数学”的现象给教师和学生一种误导：解题能力强就是数学好。这对哪些解题能力比较弱的学生的自信心有一定的伤害，也容易使学生将数学学习与“吃苦”等同起来，与解决难题等同起来，对学生的学习兴趣的培养是不利的。

4. 效率意识薄弱

中国的教育应该说是追求效率的，追求的是课堂教学的效率，讲究高速度，大容量。但是从整体数学教育来看，教育效率是低的。② 比如，中考、高考，讲究“分数面前人人平等”，然而获得这个分数所花的时间、精力和其他代价，则不予考虑。一个时期以来，在普遍地“三年课，两年完”的情况下，“减负”的叫喊声却此起彼伏，这已经够怪了。更奇怪的是，教育主管部门不调查研究，就确信学生“不堪重负”，并认定是教学内容过多、过难，要求过高，于是一而再、再而三地删教学内容，降低难度要求。但高考并未多大改变，于是，教师和学生就只有靠资料和补课去填补空白，教和学的负担更重了。于是又删内容，如此恶性循环，成为中国数学教育的一大问题。

---

① 黄泰安．数学的伪应用和数学偏见及其对数学教育的影响．数学教育学报，2007．1(5)．

② 于新华，等．对“数学教学效率”研究的几点思考．数学教育学报，2006．1(28)．

12.5.3 对学生的问题意识培养不够[①]

中国传统的教学理念认为,教师的教学主要是向学生传授知识,而了解学生掌握知识的程度则是检查学生对问题(书本或教师提出的问题)的理解和解答情况。下课前教师问学生:“都听懂了吗?还有问题吗?”当学生回答没有问题了,教师才放心下课。长此以往无论教师还是学生都以“没有问题”作为衡量教学状况的标准。

关于教师的问题,这里举一个例子:1988 年一个美国教育代表团到上海访问,希望听一堂中国的科学教育课,中方为其安排了一个特级教师上课,课堂师生十分融洽,教师提出问题,学生思考回答,当下课铃响的时候,教师正好下课,大家为教师的教学鼓掌时,美国教师的 5 人却面无表情,当问及他们时,他们说,学生都能回答教师的问题,那这堂课还有必要上吗?

也就是说,中国的数学教育与某些国家相比,对学生的问题意识的重视不够,当课堂教学结束时,学生只要按教师的要求完成作业就可以了,没有任何遗留需要深入思考的问题,这对学生提出和分析解决问题的能力的培养不利。

总之,中国的双基教学既有优势又有不足,值得我们认真研究。

12.6 本次课程改革的特点

与历次改革一样,本次数学课程改革也有其自身的背景。从国际上来看,联合国教科文组织在 1994 年提交的报告《学习——财富蕴藏其中》指出,在当今信息时代,通过不断加重课程负担来满足社会对教育无止境的需求,既不可能也不合适。必须改革知识为本、学科为中心的课程教材体系。在这一报告的影响下,世纪之交世界范围内的课程改革,都将教育目标关注学生的整体发展,关注人才培养模式的调整,关注课程内容的调整。我国本次基础教育改革,也针对我国过去数学教育的不足,开展了与国际数学教育改革相统一的思考。

本次基础教育课程改革的一项突出举措,是用课程标准代替了以往的教学大纲。课程标准是什么,不同的国家定义不尽相同,但有一点是共同的,那就是用预期的学生学习结果来界定课程标准。与教学大纲相比,课程标准不但增加了教学的灵活性,而且符合因材施教的教学原则。

这次课程改革相对于过去的课程改革来说有许多特点,以下从课程目标、课程结构和教学方法等几个方面来进行说明。

---

① 吕传汉,等.论中小学“数学情境与提出问题”的教学.数学教育学报.2006.2(74).

12.6.1 课程目标

与以往基础教育课程的培养目标相比，我国新课程目标已发生了重大的突破和转变，体现了与时俱进的思想和时代的精神。

1. 更关注学生的学习情感

多年来，数学教学普遍重视考试分数，分数高就认为是学数学的苗子，否则就被认为是数学低能儿。大部分学生在分数面前以失败的心态面对数学，以失落的情感远离数学。这对数学教学造成了极大的内伤，这从一个侧面反映了数学教育中严重的情感缺失。另外，当我们为奥林匹克数学竞赛中，我国学生取得优秀成绩而深感欣慰时，又不得不面对这些学生没有能成为世界级的数学家的深深遗憾。究其根源，还是因为我们在进行数学教育时忽视了对数学情感的培养，学生并未因为数学成绩突出而热爱数学，因此情感作为学生精神生活的主宰，决不能再忽视了。为此，新的《数学课程标准》在具体目标中明确提出了情感目标，同时新课程标准在评价中也提出："既要评价学生数学学习的水平，更要评价学生数学学习的情感和态度"。所谓情感，是指影响学生学习的意志品质、态度心情、兴趣习惯等非智力因素。情感在数学教学中是一个不可忽视的因素，本次课程改革将情感作为与知识同等重要的学习因素，对学生学习兴趣的培养和学习成绩的提高都具有重要意义。

2. 价值取向发生了重大转变

我国以往的课程目标主要体现为社会本位的价值取向，即课程目标要求通过课程与教学活动以及学校教育的其他活动为国家、社会培养建设者和接班人，而没有对学生的个体成长或个性发展提出一定的要求，在一定程度上忽视了学生的自我发展。

新课程目标改变了以往过于强调社会本位的价值取向，以学生为核心，从学生发展的视角，对学生在与自我、自然和社会交互作用中所必需的素养进行了规定。在这些目标中，既有对学生社会性发展的要求，也有关于学生自我成长的要求，还有学生正确认识和处理人与自然关系的要求。大众化、活动化、生活化、个性化是世界各国新一轮数学课程改革的普遍取向，集中体现了国际上数学课程改革最为基本的一些共同理念。

因此，新课程的培养目标已经不再是偏执于某一种极端的价值取向，而是根据素质教育的理念，在新的历史阶段对学生的全面发展进行重新认识。

3. 对以往学生的发展要求进行了新的界定

以往的课程目标过于强调把"基础知识和基本技能"作为一项学生发展的重要指标。重视"双基"是我国基础教育，乃至整个教育体系的一个传统，但是，在新的社会发展背景下，那种试图以制造"知识容器"的方式让学生掌握全部知

识与技能,并希望能受用终身的思想已经不符合社会的现实要求了,"授之以鱼,不如授之以渔"应当成为教育的基本法则。

另外,发展了对双基的要求,丰富了双基的内涵,将那些随着社会的发展,对学生的学习生活有较大影响的内容,列为双基的内容。例如,统计是一个新近出现的数学分支,自20世纪初以来,由于技术革命的影响,它已经演化成为社会中应用最为广泛的,数学领域获取大量的信息资源都需要用到统计知识。因此概率统计就成为社会公民所必须具备的知识。由此可以看出,新课程的培养目标是基于谋求所有学生的发展而确定的,它不再是单纯为了培养某一类专业人员。

4. 强调的几个方面

根据时代发展对未来人才的成长提出了诸多新的要求,新一轮的国家基础教育改革以适切性的原则将这些要求转化为新课程的目标,充分体现了与时俱进的精神,强调了以下几个方面。

(1) 创新精神

江泽民同志多次强调:"创新是民族进步的灵魂,是国家兴旺发达的不竭动力……如果不能创新,一个民族就难以兴盛,难以屹立在世界民族之林。""教育是知识创新、传播和应用的主要基地,也是培养创新人才的重要摇篮。无论在培养高素质的劳动者和专业人才方面,还是在提高创新能力和提供知识,技术创新成果方面,教育都具有独特的重要意义。"因此,培养和发展学生的创新精神和能力理所当然地成为新课程目标的一个极其重要的组成部分。

中国数学教育最为重要的一个特点就是它的规范性,从而与西方强调的学生个性发展构成了鲜明的对照。这种对于规范性的突出强调集中地体现了这样一种基本的教育理念:只要教师教得得法,学生又作出了足够的努力,绝大多数学生都能够掌握基本的数学知识与技能,从而也就从这两个方面为将来进入社会做好必要的准备。中国传统文化在"基础与创新"这一问题上的一个基本立场是,认为只有打好了基础才能谈得上创新,所以将"努力培养学生的创新意识"列为学校教育的主要目标之一应被看成对于中国传统教育思想的重要突破或发展。

(2) 实践能力(将数学教学与学生实际生活相联系)

我国以往的学校课程过分注重对学生心智的训练,却忽视了对学生实践能力,尤其是动手能力的培养。新课程重新回到"学习"的本义,将实践能力确定为学生发展的一项重要目标,试图改变学生"手脑"发展严重失衡的现状。

新的《数学课程标准》明确指出,"数学的内容应当是源于学生生活,适应未来生活需要和学生进一步发展需要的。"提倡数学与现实生活相联系,正是希望

给学生探索数学的机会,展示数学自身的价值。

数学家华罗庚曾经说过:"宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,日用之繁,无处不用数学。"这是对数学与生活的精彩描述。那么根据新课程理念,教学实施中应如何诠释"生活数学"这一观点呢?这就要求做到"数学问题生活化"和"生活问题数学化"。

(3) 科学与人文素养

科学与人文素养不仅包括科学知识和人文知识,而且包括科学精神和人文精神,即实事求是的态度,追求真理的信念,关爱和珍惜生命的意识,人与自然和谐统一的意识等。

具有健康的审美情趣和生活方式。新时期的人才不仅应具备为社会作贡献的各项能力,而且还应具有健康的审美情趣和生活方式。新课程将健康的审美情趣和生活方式作为学生发展的一项要求有着非同寻常的意义。首先,它表明课程开始关注人的个性教育和生活教育的一个开端。其次,它意味着学校课程将发生重大改变,一方面使得学校的课程体系中将会出现生活化的课程,另一方面也将使得传统的课程不同程度地走进学生的现实生活,进而使这些课程焕发出无限的活力。再次,它其实隐含了养成学生价值观的要求,因此,在塑造学生心灵方面具有重要价值。

12.6.2 课程结构

长期以来,学校的课程设置存在着较大的问题,这些问题主要表现在课程的结构不合理。具体来说:第一,几乎所有的课程都需要在教室中实施,尽管这样一来有助于维持课堂纪律,但是由于没有真正意义上的活动,学生的动手能力非常缺乏;第二,几乎所有的课程都要求学生学习,学生没有根据自己的实际情况选择课程的权利和机会,这样便形成了"千人一面"的现象;第三,每一个学校都有自己的学校文化和教育资源,但现在所有的学校开设的课程完全一样,学校不具备通过开发和开设课程展示本校办学特色的权利,"千校一面"在所难免;第四,学科之间相互独立和隔膜,被分割的知识在学生那儿不能有效整合,以至于造成学生在解决问题时首先对其中的知识进行科学定位,即"这种知识是化学的,那种知识是物理的",形成一种思维定式。学科知识不能整合就难以在实践中应用,也难以使学生从整体上认识客观世界.新课程的改革就是力求完善过去的课程结构,形成合理的课程结构。

课程结构调整主要围绕着增加或减少课程要素、确定各要素之间的比例关系进行。新课程通过课程结构调整,增加了综合课程,明确了校本课程的价值和地位。同时,活动课程、选修课程所占的比例也得到显著增加。

新课程按统筹规划,分段设计的原则,从整体上规划基础教育各个阶段的课

程。新的课程计划主要有两个:义务教育课程设置实验方案和普通高中课程实验方案。

1. 新课程结构的特点

(1) 体现了全新的课程结构原则

第一,均衡性原则。新课程在结构上所倡导和实现的均衡性试图改变以往学生动手实践能力低下,知识体系相互隔离,所学知识远离现实生活的状况,引导学生在掌握课程内容的同时,关注生活、关注社会发展和科技进步,能够积极开展探究活动,能够主动地参与社会生活,实现素质的均衡发展。

第二,综合性原则。课程综合化是新的课程结构调整的重要任务,主要通过三种途径完成:首先,开发并设置学科性的综合课程,如品德与生活、品德与社会、科学、艺术、历史与社会、综合实践活动等。这些课程实现了对特定学习领域内容和教育价值的统整;其次,开设综合实践活动课程,该课程由国家制定开发指导纲要并规定课时比例,其具体内容由学校自行开发;另外,在分科课程中实现课程内容的统整,即以综合的方式处理并实施分科课程的内容。

第三,选择性原则。新课程的选择性主要在如下几个层面上体现出来:首先,地方和学校依据其现实的教育状况,积极创造条件,有选择地实施国家课程。如地方或学校可选择艺术,历史与社会,科学与综合课程。也可选择音乐、美术、历史、地理、物理、化学、生物等分科课程;其次,在普通高中阶段增设选修课程,选修课程占总课时量的三分之一;另外,在地方课程和校本课程中,学生可以根据自己的兴趣和特长有选择地学习一定的课程,同时还可以在综合实践活动课程中选择不同的主题活动。

课程选择性的实现需要以课程的多样化为前提,为此,新课程通过对课程总体结构的调整和学科内在结构的改造,在很大程度上实现了课程的多样化。课程多样化和选择性的实现将使学校教育更富校本特色。同时也有利于学生制定自己的学习计划,有利于学生人生规划能力的培养。

(2) 形成了较严密的课程综合与分化的体系结构

新课程的总体结构是:小学阶段以综合课程为主,初中阶段综合课程与分科课程相结合,高中阶段以分科课程为主。显然,在整个基础教育阶段,综合课程与分科课程比重的变化并不是突变式的,而是渐进式的,这使得新课程的体系结构呈现出严谨、合理的特点。确定这一结构的依据是:低年级学生的认知尚未分化,伴随着年级的增高,学生的认知开始逐渐分化。同时,低年级所呈现的课程内容皆属于学科性不强的基础性知识,而高年级课程内容的学科性增强。

这一体系结构一方面体现了课程综合化的要求,另一方面符合学生的认知规律,有利于学生在形成自我、自然和社会整体认识的基础上,更好地把握具体

学科领域的专门知识。

2. 对一些传统课程进行了改革或整合

此次基础教育改革全面提升学生素质的要求,对一些传统的课程进行了改造或整合。经过改造或整合的课程主要有:品德与生活(1—2 年级),品德与社会(3—6 年级),科学(3—9 年级),综合实践活动(3—12 年级),艺术(1—12 年级),历史与社会(7—9 年级),体育与健康(7—12 年级),通用技术(10—12 年级)等,这些课程其实都属于综合课程的范畴。

3. 普通高中新课程设计呈现出三级结构

《普通高中课程方案(实验)》指出,普通高中新课程将适应社会需求的多样化和学生全面而有个性的发展,构建重基础、多样化、有层次、综合性的课程结构。新的高中课程结构分三个层次,最上层为学习领域,学习领域下设学科科目,科目下设模块。学习领域、科目和模块构成了新的高中课程的基本结构。

(1) 学习领域

学习领域由课程价值相同或相近的若干科目组成。设置学习领域有利于在学习领域的视野下研制各科课程标准,指导教师教学,防止陷入学科本位;有利于整体规划课程内容,体现学生全面发展的要求,提高学生的综合素质。

普通高中课程结构层次的上述变化,尤其是"学习领域"的划分,意味着新课程更加强调课程的综合化;在模块课程背景下的教学中,课程实施者将充分利用场地、设备等资源,为学生提供丰富多彩的课程,帮助学生自主选择并及时调整课程,形成有个性的课程修习计划。

(2) 科目

普通高中新课程开设:语文、数学、外语(英语、日语、俄语等)、政治、历史、地理、物理、化学、生物、艺术(或音乐、美术)、体育与健康、技术等科目。其中,技术和艺术是新增设的科目,艺术与音乐、美术并行设置,供学校选用。

(3) 模块

模块,即组成科目的各个组成部分。每一个模块都有明确的教育目标,并且对教师教学行为和对学生学习方式的要求。模块之间既相互独立又反映了学科内在的逻辑联系。

将科目分解为相互独立又相互联系的若干模块是普通高中课程改革在课程结构上的重大举措。每一个科目所包含的模块都有必修课与选修课之分,其中选修模块在数量上超过了必修课模块,使课程呈现出多样化的特征。学生的课程选择,个人化学习方案的形成都因此而变为现实。

高中新课程实行学分管理。要求学生每一学年在所有学习领域都获得一定学分,以防止学生过早偏科,避免科目过多,有利于学生全面发展。学生学习一

个模块并通过考核,可获得2学分(其中体育与健康、艺术、音乐、美术每个模块原则上分18学时,相当于1学分),学分由学校认定。技术的9个必修学分中,信息技术和通用技术各4学分。研究性学习活动是每个学生的必修课程,三年共计15学分。学生每学年必须参加1周的社会实践,获得2学分。三年中学生必须参加不少于10个工作日的社区服务,获得2学分。学生毕业的学分要求:学生每学年在每个学习领域都必须获得一定学分,三年中获得116个必修学分(包括研究性学习活动15学分,社区服务2学分,社会实践6学分),在选修二中至少获得6学分,总学分达到144学分方可毕业。学校和老师将按照学分管理的方式保障新课程的实施。

每学年教学时间40周,社会实践一周,假期(包括寒暑假、节假日和农忙假)11周。每学期分两段安排课程,每段10周,其中9周授课,一周复习考试。每个模块通常为36学时,一般按一周4学时安排,可在一个学段内完成。普通高中课程时间安排的变化,要求学校和老师改变以往主要是按学时备课的方式,加强学期备课和学段备课,以适应模块整体性的特点。

课改后,高中新课程结构的主要特点可以概括为:体现基础性,强调课程统整;体现选择性,突出多样化;体现均衡性,重视艺术类和技术类课程。

12.6.3 教学设计与教学行为的特点

教学设计是一个分析教学问题、设计解决方法并加以实施,进而进行评价和修改,直到获得解决问题的最优化方法的过程。新课程特别强调教师创造性的设计自己的教学,倡导信息技术在教学中的普遍应用,促进信息技术与学科课程的整合,逐步实现教学内容的呈现方式、教师的教学方式与师生互动方式的变革,充分发挥信息技术的优势,为学生的学习和发展提供丰富多彩的教育环境和有利的学习工具。

1. 新课程提倡的几种教学行为

新课程背景下的课堂教学以学生为本,强调生活课程的自主体验。学生是自主的,教师也是自主的,那种"课堂以外的专家牵着鼻子走"的现象将不存在,教师凭着自己的智慧和权利,用心设计与经营课堂,并在课堂舞台上实现自己的人生价值。协同教学、讨论教学、创意教学、探究教学是这种新型教学行为的有效尝试。

(1) 协同教学

协同教学(team teaching)是指教师小组相互合作而开展的教学形式。为了使学生能综合利用所学知识解决问题,新课程提倡在某些知识的教学过程中,教师进行协同教学,也就是围绕教学内容形成教师教学小组。如在进行三角函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的教学时,数学教师可以联合物理教师组成小组,由物理教师

给学生讲一些与周期、振幅、频率等相关的运动问题，再由数学教师与学生一起建立对这些运动进行研究的数学模型进行研究和运用，这样便形成了一个知识获得的全过程。

（2）讨论教学

讨论教学（discussion teaching）也就是在教学的过程中，针对适当的内容组织学生通过讨论获取知识的过程，这是能较好体现学生主体性的一种教学模式。

（3）创意教学

创意教学（originality teaching）指的是教师创造性地设计教学过程，达到教学目的。如为学生创设一个意想不到的教学情境，使学生在一种愉快的环境中学习，便是创意教学的一种方式。

（4）探究教学

探究教学（exploration teaching）指的是让学生自己发现数学（或其他学科）的定理、结论的教学过程。如教师介绍了指数函数的概念后，可以让学生通过自己探究发现指数函数的性质。

2. 新课程标准下的课堂教学设计

我们以一个教学设计案例来给出一些启示。

案例1

在教学统计中的概念，如众数、平均数、中位数、全距时，教师不是将这些概念直接告诉学生，然后举例说明让学生理解，而是创造一个情景，让学生在教师所创设的情景中自己给概念下定义，下面的创设方法可供参考。

教师将这6组数制成卡片，每个小组先发一张，研究完再发一张。然后教师给出另一组数据：10，14，12，10，10，16，要求每一个组，依据卡片的情况，制作一张像所发卡片一样的索引卡。这个案例体现了新课程的基本理念和所倡导的学习方式，在创造卡片的过程中，学生必须先给出平均数、中位数、众数、全距的定义，因此，必须反复研究所给的卡片。在研究的过程中，创造性地给出定义，从而解决问题，体现了主体性。

使用下面给出的数据集，推测平均数、中位数、众数和全距的意义	
集合 A：5，12，16，10，2 平均数：9 中位数：10 众数：无 全距：14	集合 E：8，6，7，8，9，10 平均数：8 中位数：8 众数：8 全距：4

续表

<table>
<tr><th colspan="2">使用下面给出的数据集，推测平均数、中位数、众数和全距的意义</th></tr>
<tr><td>集合 B:1,2,2,6,7,18
平均数:6
中位数:4
众数:2
全距:17</td><td>集合 F:8,0,5,0,12
平均数:5
中位数:5
众数:0
全距:4</td></tr>
<tr><td>集合 C:7,6,8,10,9,11
平均数:8.5
中位数:8.5
众数:无
全距:5</td><td>集合 G:6,9,9,6,8,5,9,4
平均数:7
中位数:7
众数:9
全距:5</td></tr>
</table>

3. 情境创设

改变数学教学方法最大困难之一，就是要让学生置身于适宜的数学学习过程中。为了达到这一目的教师有必要为学生创设一个情境，也就是说教师要用一些设计精巧，与重要概念相结合的活动去引导学生，创设情境要注意几个原则。

(1) 生活情境要有现实性；

(2) 现实情境的设计要生动有趣；

(3) 创设情境要设疑激趣，引起学生解决问题的渴望和兴趣；

(4) 创设情境一定要与教学内容有关。

案例2

探索规律的教学案例

3,5,7,________,________,________。

本问题从不同的角度出发，可以发现前三个数字的排列有不同的规律，从而后面三个空的填法也有不同的结果。这里就要用观察、分析、比较最后归纳猜测出数字变化的规律来，这里有三种添法：

(1) 如果将前三个数看成是奇数列，则后三个数依次填 9,11,13；

(2) 如果我们分析发现第三个数正是前两个数的和减 1，则后三个数依此应填 11、17,27；

(3) 如果我们分析发现第三个数正是前两个数之积减 8，则应用这个规律后三个数依次填为 27,181,4 879。

要使学生的学习在一定程度上转化为做数学，教师可以将学生过去的学习方法加以改进。

案例3

用示意图把下面的积表示出来，并写出结果：

1. $2x(x-1)$
2. $(x+1)(x+2)$
3. $(x-2)(3x+3)$
4. $(x-3)(x+3)$
5. $(2x+2)(2x-2)$
6. $(x+3)(x+3)$

这样的设计不仅是要求学生会将代数式或符号移来移去，而且要求学生真正知道代数式所表达的意义。

教师制作一些纸片发给学生（图 12.1），

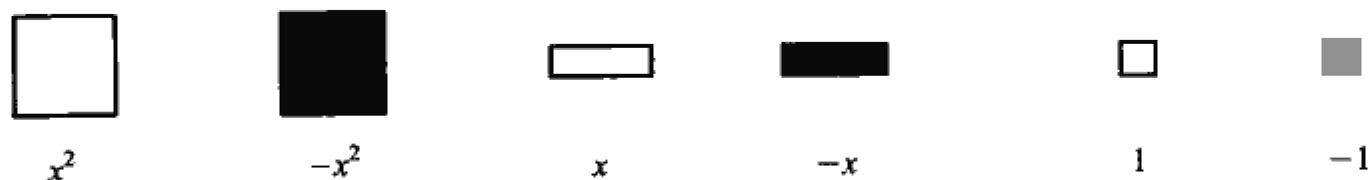


图 12.1 案例 3：教师制作的卡片

先全班一起完成例子 $(3x+2)(2x-1)$（图 12.2）

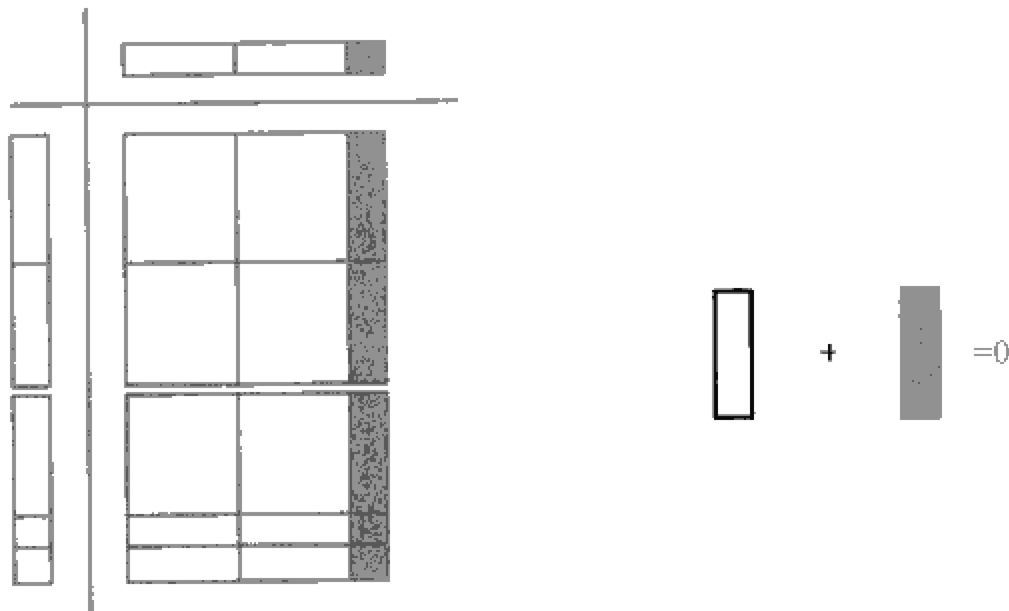


图 12.2 案例 3：用图表示 $(3x+2)(2x-1)$

$(3x+2)(2x-1)=6x^2-3x+4x-2=6x^2+x-2$

再让学生自己完成其余的问题，学生从不断的实验中，体会了表达式的含义。通过找到卡片，并将其摆成矩形，学生学会了做数学。

12.7 普通高中数学课程改革方案

本次课程改革对普通高中的课程进行了比较全面的改变，使高中的课程出现了全新的面貌，这里对其特点进行一些介绍。

12.7.1 基本理念

1. 构建共同基础，提供发展平台

高中教育属于基础教育，高中数学课程应具有基础性，它包括两方面的含义：第一，在义务教育阶段之后，为学生适应现代生活和未来发展提供更高水平的数学基础，使他们获得更高的数学素养；第二，为学生进一步学习提供必要的数学准备。高中数学课程由必修系列课程和选修系列课程组成，必修系列课程是为了满足所有学生的共同数学需求；选修系列课程是为了满足学生的不同数学需求，它仍然是学生发展所需要的基础性数学课程。

2. 提供多样课程，适应个性选择

高中数学课程应具有多样性与选择性，使不同的学生在数学上得到不同的发展。

高中数学课程应为学生提供选择和发展的空间，为学生提供多层次、多种类的选择，以促进学生的个性发展和对未来人生规划的思考。学生可以在教师的指导下进行自主选择，必要时还可以进行适当地转换、调整。同时，高中数学课程也应给学校和教师留有一定的选择空间，他们可以根据学生的基本需求和自身的条件，制定课程发展计划，不断地丰富和完善供学生选择的课程。

3. 倡导积极主动、勇于探索的学习方式

学生的数学学习活动不应只限于接受、记忆、模仿和练习，高中数学课程还应倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习数学的方式。这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。同时，高中数学课程设立“数学探究”、“数学建模”等学习活动，为学生形成积极主动的、多样的学习方式进一步创造有利的条件，以激发学生的数学学习兴趣，鼓励学生在学习过程中，养成独立思考、积极探索的习惯。高中数学课程应力求通过各种不同形式的自主学习、探究活动，让学生体验数学发现和创造的历程，发展他们的创新意识。

4. 注重提高学生的数学思维能力

高中数学课程应注意提高学生的数学思维能力，这是数学教育的基本目标之一。人们在学习数学和运用数学解决问题时，不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反

思与建构等思维过程。这些过程是数学思维能力的具体体现,有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和做出判断。数学思维能力在形成理性思维中发挥着独特的作用。

5. 发展学生的数学应用意识

20世纪下半叶以来,数学应用的巨大发展是数学发展的显著特征之一。当今知识经济时代,数学正在从幕后走向台前,数学和计算机技术的结合使得数学能够在许多方面直接为社会创造价值,同时,也为数学发展开拓了广阔的前景。我国的数学教育在很长一段时间内对于数学与实际、数学与其他学科的联系未能给予充分的重视,因此,高中数学在数学应用和联系实际方面需要大力加强。近几年来,我国大学、中学数学建模的实践表明,开展数学应用的教学活动符合社会需要,有利于激发学生学习数学的兴趣,有利于增强学生的应用意识,有利于扩展学生的视野。

高中数学课程应提供基本内容的实际背景,反映数学的应用价值,开展“数学建模”的学习活动,设立体现数学某些重要应用的专题课程。高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用、数学与日常生活及其他学科的联系,促进学生逐步形成和发展数学应用意识,提高实践能力。

6. 与时俱进地认识“双基”

我国的数学教学具有重视基础知识教学、基本技能训练和能力培养的传统,新世纪的高中数学课程应发扬这种传统。与此同时,随着时代的发展,特别是数学的广泛应用、计算机技术和现代信息技术的发展,数学课程设置和实施应重新审视基础知识、基本技能和能力的内涵,形成符合时代要求的新的“双基”。例如,为了适应信息时代发展的需要,高中数学课程应增加算法的内容,把最基本的数据处理、统计知识等作为新的数学基础知识和基本技能;同时,应删减繁琐的计算、人为技巧化的难题和过分强调细枝末节的内容,克服“双基异化”的倾向。

7. 强调本质,注意适度形式化

形式化是数学的基本特征之一。在数学教学中,学习形式化的表达是一项基本要求,但是不能只限于形式化的表达,要强调对数学本质的认识,否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里。数学的现代发展也表明,全盘形式化是不可能的。因此,高中数学课程应该返璞归真,努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质。数学课程要讲逻辑推理,更要讲道理,通过典型例子的分析和学生自主探索活动,使学生理解数学概念、结论逐步形成的过程,体会蕴涵在其中的思想方法,追寻数学发展的历史足迹,把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态。

8. 体现数学的文化价值

数学是人类文化的重要组成部分。数学课程应适当反映数学的历史、应用和发展趋势、数学对推动社会发展的作用、数学的社会需求、社会发展对数学发展的推动作用、数学科学的思想体系、数学的美学价值、数学家的创新精神。数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用,逐步形成正确的数学观。为此,高中数学课程提倡体现数学的文化价值,并在适当的内容中提出对“数学文化”的学习要求,设立“数学史选讲”等专题。

9. 注重信息技术与数学课程的整合

现代信息技术的广泛应用正在对数学课程内容、数学教学、数学学习等方面产生深刻的影响。高中数学课程应提倡实现信息技术与课程内容的有机整合(如把算法融入数学课程的各个相关部分),整合的基本原则是有利于学生认识数学的本质。高中数学课程应提倡利用信息技术来呈现以往教学中难以呈现的课程内容,尽可能使用科学型计算器、各种数学教育技术平台,加强数学教学与信息技术的结合,鼓励学生运用计算机、计算器等进行探索和发现。

10. 建立合理、科学的评价体系

现代社会对人的发展的要求引起评价体系的深刻变化,高中数学课程应建立合理、科学的评价体系,包括评价理念、评价内容、评价形式和评价体制等方面。评价既要关注学生数学学习的结果,也要关注他们数学学习的过程;既要关注学生数学学习的水平,也要关注他们在数学活动中所表现出来的情感态度的变化。在数学教育中,评价应建立多元化的目标,关注学生个性与潜能的发展。例如,过程性评价应关注对学生理解数学概念、数学思想等过程的评价,关注对学生数学地提出、分析、解决问题等过程的评价,以及在过程中表现出来的与人合作的态度、表达与交流的意识和探索的精神。对于数学探究、数学建模等学习活动,要建立相应的过程评价内容和方法。

12.7.2 课程改革的目标

新课程知识观认为,知识不仅具有客观性、确定性、普遍性和中立性等性质,还具有文化性、不确定性、情境性和价值性等基本性质。课程知识不是一种外在于个体或强加于个体的被管理、被灌输的“客观”的东西,而是一种可探询、可分析、可切磋的动态的探究过程,一种借助反思性实践来建构人生意义的活动过程。因此课程标准把“过程与方法”、“情感态度与价值观”作为与“知识与技能”同等重要的目标维度加以阐述。

高中数学课程的总体目标是:使学生在九年义务教育课程学习的基础上,进一步提高未来公民所需要的数学素养,满足个人发展和社会发展的需要。高中数学课程标准就明确指出:数学教育不仅应帮助学生学习数学知识和技能,还应

有助于学生了解数学的价值，把握数学的思想方法，体会数学的理性精神，欣赏数学的美学价值，领会数学家的创新精神以及数学文化的深刻内涵。这样看来，新课程更倾向于从文化层面去理解课程，强调课程的深层文化价值及其对儿童精神生命的关照与滋养，而不仅仅是知识技能的掌握或单纯的智力培养。具体地说，有以下几个方面的目标。

1. 获得必要的数学基础知识和基本技能，理解基本的数学概念和数学结论的本质，了解概念、结论产生的背景，体会其在后期学习中的作用，通过不同形式的自主学习和数学探究活动，体验数学发展和创造的历程；

2. 提高空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力；

3. 提高数学地提出、分析和解决问题（包括简单的实际问题）的能力；

4. 发展数学运用意识和创新意识，力求对现实世界中存在的一些数学模式进行思考和作出判断；

5. 提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度；

6. 具有一定的数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，形成批判性的数学思维习惯，崇尚数学的理性精神，体会辩证唯物主义和历史唯物主义世界观。

12.8 基础教育还应思考的问题

12.8.1 当前数学教育改革应关注的问题

1. 继承与发展的问题

数学教育改革应当建立在已有发展的基础上，改革不是另起炉灶，应当本着继承传统但又不完全依赖于传统的思想进行改革，没有继承就不会有高水平的创新与发展。这就需要对我国数学教育的历史和现状有正确认识，只有对我国数学教育的已有发展规律有正确定位，对哪些应当坚持，哪些应当改进，哪些应当革除等有一个清晰的认识，才能使我们的改革走向继承、发展与创新的良性循环，简单否定（或搞"抽象肯定，具体否定"），会造成改革的先天不足，给数学教育的发展规律带来隐患，甚至造成数学教育的混乱。

香港大学的梁贯成先生曾经说过："面对国际课程改革的趋势，我们面对的一种危险是落后于其他国家，进而在越来越激烈的全球经济竞争中落败。但是，另一种危险是我们简单地跟随国际潮流，结果丢掉了我们自己的优点。在我们的文化中，长期存在的弱点需要巨大的勇气来改变。但是我们需要更大的勇气来抵制那些在'发达'国家正在发生的变化，并且坚持一些传统价值来保持我们

的优点。最为困难的是区别什么应该改变,而什么又不应该改变!"[①]

2. 依据本国实际的问题

数学教育改革应当实事求是,根据我国的具体情况,通过一系列的深思熟虑,科学论证,精心组织的阶段性变革来适应社会发展对数学教育的挑战,一定要坚持"大改先研究,中改先实验,小改经常有"的方针。

这里我们引用数学大师陈省身先生的话来说明一些目前的问题:现在大家讲教育问题,很自然的一个模范是美国。我要说明的是美国的数学教育程度是很低的,中国的数学教育已经比美国强。不要听一些到美国参观了以后说美国降低了要求,我们就要降低;不要把我们的优势丢掉。在美国我也参加过一些数学教育问题的讨论,实际上就是水平越来越低。希望我们至少能维持原来的水平,使学生经过这样的六年或九年的时间,对数学有一定水平的训练。

因此,在数学教育改革中,我们一定要认真分析我国数学教育的实际情况,找出优势和不足,在保持本国特色的情况下向先进的国家学习,盲目乐观和全盘否定都是不可取的。

3. 精心处理好数学教育发展规律中的各种关系

"教改实践需要那种不走极端而达到顶点的集大成的智慧","矫枉必须过正,创新只能在否定过去的前提下进行"的观点是落后的,就像经济建设不能以牺牲生态环境为代价一样,在数学教育改革的思路上,我们也应当十分强调"原创性",而不能简单地模仿所谓的"国际趋势"、"世界潮流"。

在基础教育改革中,我们有一系列的关系需要认真分析和处理,如"国际发展趋势与本国特色"的关系、保留传统与创新发展的关系,教师的主导地位与学生的主体地位的关系等。我们应该创造出具有国际先进水平,又具有中国自身特点的数学教育模式。

4. "双基"教学的保留问题

"双基"是我国数学教育的立足之本,发展的根基。数学知识是数学能力发展的基础。认知心理学的研究表明,一个人不能"数学地"思考和解决问题的主要原因是缺乏必要的数学知识,所谓隔行如隔山就是这个道理。正是由于已掌握的数学知识的广泛迁移,个体才能形成系统化、概括化的数学认知结构,从而形成数学能力。在解决数学问题中体现出来的能力,其实质就是根据具体问题情景重组已有数学知识,能正确、迅速地检索、选择、提取相关数学知识并及时转化为适当的操作程序,从而使问题从初始状态转变为目标状态。显然,如果一个人的长时记忆中缺乏相关的数学知识,那么相应的知识检索、选择、提取、重组等活动就失去了基础。

---

① 郑毓信. 中国数学教育的界定和建设:综述与分析. 数学教育学报,2006. 2(12).

丰富系统的数学知识不仅是创新所不可缺少的材料，而且还能激发创新的直觉或灵感。只有具备了充分的数学知识，才能进行有目的、有方向、有成效的探究活动，数学学习效能才有保障，否则就只能是尝试错误。因此占有大量数学知识是形成数学能力的基础，离开数学知识的学习来培养数学能力，那是纸上谈兵，不切合实际。

实际上，我国数学教育中存在的许多问题，并不是出在强调了“双基”上，而是出在有些人对“双基”的内涵理解不到位，只把数学概念、公式等明确知识作为双基，而没有把数学思想方法等在数学研究过程中体现出来的“默会知识”也作为“双基”。

5. 坚持数学学习的高标准的问题

在满足学生的兴趣爱好，适应学生的个性特点，与学生的现实生活相联系的过程中，不能以降低数学学习标准为代价。我们应该在数学内容的广度和深度上取得平衡。

关于学生的学习兴趣问题，当问到陈省身先生怎么使每一个学生都对数学产生学习兴趣的时候，陈先生说：“这是不可能的。人和人不一样，总有不同程度，不同能力的区分，这不是改改教材所能补救的。实际上学生的程度不一样，有一部分学生不管我们的水平高在什么地方，他都能达到。……还有些学生，不管你水平怎样降，他也是不能学的。你们要编的教材，是一套还是两套？是要所有的学生都适用呢，还是大多数学生能适用？对于能力差一点儿的学生也许应该编一套更简单的教材。那些对数学不感兴趣的学生，怎么办？”

著名数学家项武义说，对基础数学要精中求简，然后要把基础数学教得“平实近人”，而且要讲得引人入胜。所以我们很多学生学数学，觉得数学不好学，最后讨厌数学的原因是因为教师教了他一大堆莫名其妙的东西，不能做到引人入胜的原因往往是我们低估了学生的能力。

王梓坤先生也认为，启发学生的兴趣，主要是理论体系很清楚，学完之后，脑子里有一个很完整的体系。

6. 以行政力量来推动课程改革是不可取的

有的数学家认为，目前借助行政力量所推行的新课程改革的标准是在降低中学数学教育的水平。课程改革应该成为数学教师的自觉行为，应该使教师明确改革的必要性和改革的目的。

7. 普及教育与精英教育的问题

目前有一种过分强调普及教育的倾向。项武义先生说，在中国的教育体制里，有一个欠缺的地方就是太过分强调普及，而对精英的教育往往是欠缺的。没有栋梁之材的教材，再者，现在要经过考试，所以一些学习优秀的学生高三一年根本就是浪费（在准备考试），所以教育的体制不能“一刀切”，中国要开始注意

精英教育。例如美国，一般的普及教育是不灵的，但他们注意到了精英教育，有一些特殊学校，其教学完全是开放式的因材施教，莫斯科也有这一类的高中。在这一方面中国应该想方设法赶上。

8. 教学形式与实际的问题

目前有的教师过分追求教学情境。为了学一点点数学，要展示很多实际的东西，一会儿是工业的，一会儿是农业的，把人搞得筋疲力尽，教师觉得负担过重，学生也很苦。教师必须认真思考形式与内容的关系问题，分清主次，才能将主要精力放在真正提高学生的基本数学素养上。

12.8.2 目前课程改革过程中存在的主要问题

1.《数学课程标准》的要求与实际操作的教师之间的差距有待缩短

目前，义务教育阶段的课程改革已经在我国大多数地区推广，高中也有一些省市开始了实验。参与实施新课程的学校和老师，对新课程改革的意义、目标和改革的方法的理解和行动表现出来很不平衡，主要表现在有的课堂教学是"穿新鞋，走旧路"；有的只满足于课堂的热热闹闹，忽视了最基本的双基教学。这主要参与新课程培训或学习的机会比较少而造成的。有的是还没有转变教学观念，有的是由于缺少相关的课程改革资料而造成的。

2. 合作学习如何从形式走向实质有待加强研究

在实践中我们发现，一些教师在小组合作学习中流于形式，缺乏学生的独立思考的时空；有的小组合作学习停留在很短的时间内讨论讨论，动动手，再让一个学生起来汇报，其他补充，为合作而合作，只考虑合作的形式而未能考虑合作的时机。这主要是对合作学习的内涵未能理解，片面追求表面的热闹而忽视了给予学生明确的目标和任务，在认识和把握合作学习本身也有一定的局限性问题。

3. 对学生的学习评价缺少个性化，因此造成一些评价失真

新课程提倡激励性评价，因此在课堂上，经常听到的是"啪，啪，表扬他！""嘿，嘿，你真棒！"的表扬声。如果这些学生确实提出了有创见的问题（从学生的角度），或者有明显的进步，这样的表扬是适当的。但有些学生仅仅是回答了一个简单的问题，或者重复别人的发言，那么这样的表扬就有违发展性评价的初衷了，更有些教师对一些学生的错误回答也不敢马上加以纠正，长此以往就会造成学生对表扬的"迷失"，就会造成评价的失真。这主要是未能掌握激励性评价的"度"而造成的。

12.8.3 几点建议

在面对一场前所未有的课程改革，出现这样或那样的问题是难免的，要解决

这些问题，就需要我们广大教师和各级教育工作者一起面向挑战，加强学习，勤于思考，转变观念，与时俱进，大胆实践。这里提出一些具体的建议。

1. 教师要处理好继承与创新的关系

新课程实施并不是要摒弃以往传统优良的教学方法和教学方式，这一点是我们作为教师要明确认识的重要观点。

2. 要处理好合作学习与独立思考的关系

合作学习是课程改革当中大力倡导的重要的学习方式，教师应该为学生提供合作交流的机会，让不同的学生表达自己的想法，听取别人的意见。但我们要注意小组合作的时机。一般来说，出现新知识，需要找出新的解决方法，可以让学生合作探讨；遇到了大家都希望解决的问题也有一定难度的时候，可以让学生合作探究；有争议的时候、而且意见不一致的时候，可以让学生讨论，在辩论中求真。

当然，我们在提倡小组合作学习的同时，也要注意引导学生独立思考，学生在现实情境中思考，在解决问题中交流，是获取更多信息，听取不同见解的途径。因此我们在小组合作学习之前给出明确的目标和任务，让学生先独立思考，也可以先把解法写下来，再进行小组合作交流，这样做既让学生有独立思考的空间，又有让学生倾听、交流的机会，汇报时一般要以小组的形式进行，再让其他小组代表补充。这种交流才不会让小组合作学习流于形式。

3. 对学生的评价提倡“真、善、美”

从培养人的发展目标来看，要让学生“实事求是、相互尊重、换位思考”。关注学生的发展比让学生掌握一些数学方法更为重要。因此对学生的评价要体现“真、善、美”。

真，对评价的学生和评价中所包含的事实的把握，必须是准确而又符合实际的。

善，对评价的学生教师要表现出善意和对学生的热爱与尊重。

美，对学生评价在真、善的基础上讲求语言的艺术性，即对不同学生的表现，评价的语言要适度，要关注不同学生的个性差异。这样的评价才能满足不同学生的发展需要，真正体现着眼学生的发展。

本章思考题

1. 历次数学教学改革都将平面几何作为改革的重点，对此你有什么看法？
2. “新数”运动对本次课程改革有什么启示？
3. 谈谈你对本次基础教育改革的基本理念的认识。
4. 对新课程高中的特点进行分析。

参考文献

第1章

[1] 王子兴.论数学教师专业化的内涵.数学教育学报,2002.11.

[2] 傅敏.论现代数学教师的能力结构.中学数学教与学,2005,7.

[3] 郭春彦.教育科学研究方法.北京:人民教育出版社,2005.

[4] 唐松林.教师行为研究.长沙:湖南师范大学出版社,2002.6.

[5] [美]Charles W. Case,Johu W. Brubacher著.成为反思型教师.北京:中国轻工业出版社,2005.1.

[6] 中国社会科学院语言研究所词典编辑室.现代汉语词典.北京:商务印书馆,1978.2.

[7] 林夏水.数学哲学.北京:商务印书馆.2003.7.

[8] 刘清华.教师知识的模型建构研究.北京:中国社会科学出版社,2004.5.

[9] 张大均.教育心理学.北京:人民教育出版社,1999,7.

[10] [苏]B. A.苏霍姆林斯基著.给教师的建议.北京:教育科学出版社,1984.6.

[11] 张维忠,汪晓勤等.文化传统与数学教育现代化.北京:北京大学出版社,2006,4.

[12] 曹才翰,章建跃.数学教育心理学.北京:北京师范大学出版社,1999.12.

[13] 郑毓信.数学教育哲学.四川:四川教育出版社,2001.9.

第2章

[1] 施良方.学习论.北京:人民教育出版社,2001.5.

[2] 张庆林,赵玉芳.心理发展与教育.重庆:重庆出版社,2006.9.

[3] 张大均.教育心理学.北京:人民教育出版社,1999.7.

第3章

[1] 十三院校.中学数学教材教法.北京:高等教育出版社,1985.

[2] 吕传汉等.论中小学"数学情境与提出问题"的教学.数学教育学报.

2006.2.

[3] 张艳霞.数学教学原则研究.数学教育学报,2007.2.

[4] [美]M·克莱因著,刘志勇译.数学与知识的探求.上海:复旦大学出版社,2007.2.

[5] 钱珮玲,邵光华.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999.7.

第4章

[1] 皮连生.实施《教育改革纲要(试行)》的心理学基础.上海:上海教育出版社,2004.4.

[2] 张有德等."数学双基"问题的相关研究与思考.数学教育学报,2004.4.

[3] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论.北京:高等教育出版社,2004.10.

[4] 皮连生.实施《基础教育课程改革纲要(试行)》的心理学基础.上海:上海教育出版社,2004.4.

[5] 钱珮玲,邵广华.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999.7.

第5章

[1] 张奠宙,戴再平.中学数学问题集.上海:华东师范大学出版社,1996.

[2] 中华人民共和国教育部.全日制义务教育数学课程标准(实验稿).北京:北京师范大学出版社,2001.

[3] 奚定华.数学教学设计.上海:华东师范大学出版社,2001.

[4] 于琛.数学问题的解决.长春:东北师范大学出版社,2000.

[5] 钱珮玲,邵光华.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999.

[6] 奥苏贝尔,等著.教育心理学——认知观点.佘星南等译.北京:人民教育出版社,1994.

第6章

[1] 管延禄.中学数学教育教学论.北京:科学出版社,2007.7.

[2] 钱珮玲,邵光华.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,1999.

第7章

[1] 华志远.辩证认识数学抽象,探索有效教学策略.数学通报,2004.11.

[2] [英]Paul Ernest 著,齐建华,张松枝译.数学教育哲学.上海:上海教育出版社,1998.11.

[3] 鲍曼.中学数学方法论.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2002.6.

[4] [美]James A. Middleton, Polly Goepfert 著,伍新春,张洁等译. 数学教学的创新策略. 北京:中国轻工业出版社,2003.6.

[5] 曹才翰,章建跃. 数学教育心理学. 北京:北京师范大学出版社,1999.12.

[6] 张雄,李得虎. 数学方法论与解题研究. 北京:高等教育出版社,2003.8.

[7] [美]R. 柯朗,H. 罗宾. 什么是数学. 上海:复旦大学出版社,2006.7.

[8] 郑毓信. 数学教育哲学. 成都:四川教育出版社,2001.9.

[9] 张奠宙,沈文选. 中学几何研究. 北京:高等教育出版社,2006.1.

[10] 张奠宙,张广祥. 中学代数研究. 北京:高等教育出版社,2006.1.

[11] 张大均. 教育心理学. 北京:人民教育出版社,1999.7.

第 8 章

[1] 张广祥. 代数教学中的模式直观. 数学教育学报,2006.1.

[2] 刘咏梅. 应注意培养学生的估算能力. 北京:中国人民大学复印报刊资料,小学各科教学,1998.3.

[3] 管延禄. 中学数学教育教学论. 北京:科学出版社,2007.1.

[4] 钱佩玲等. 数学思想方法与中学数学. 北京:北京师范大学出版社,1999.7.

第 9 章

[1] 肖川,胡乐乐. 论校本教研与教师专业成长. 教师教育研究,2007.1.

[2] 张大均. 教育心理学. 北京:人民教育出版社,1999.7.

[3] 郑东辉. 教师课程领导的角色与任务探析. 课程·教材·教法,2007.4.

[4] 施良方. 学习论. 北京:人民教育出版社,2001.5.

[5] 张红. 建设独具特色的学校文化. 天津:天津教育,2007.1.

[6] 李介. 论课堂话语权平等问题. 现代中小学教育,2007.2.

[7] 耿翠娥. 现代教学实践中"以学生为主体"的反思. 现代中小学教育,2007.1.

[8] 饶从满,张贵新. 教师合作:教师发展的重要途径. 教师教育研究,2007.1.

[9] 孟庆松. 基础教育:任重道远,负重前行. 天津教育,2007.1.

[10] 叶澜. "新基础教育"论. 北京:教育科学出版社,2006.9.

第 10 章

[1] 张士藻. 数学教育研究导论. 北京:中国科学技术出版社,2000.10.

[2] http://www.ls910.com

第 11 章

[1] [美]M. 克莱因著,张祖贵译,西方文化中的数学. 上海:复旦大学出版

社,2004.4.

[2] 郑毓信,王宪昌,蔡仲著.数学文化学.成都:四川教育出版社,2000.3.

[3] 曹一鸣,辛兴云.从数学本质解读数学课程改革.数学教育学报,2005.1.

[4] 骆洪才等,数学观的层面分析,数学教育学报,2004.3.

[5] 数学文化,张奠宙,http://www.kexuemag.com/artdetail.asp?name=565.

[6] 李文林 数学史概论.北京:高等教育出版社,2002.8.

[7] 张奠宙.中学几何教学研究.北京:高等教育出版社 2006.1.

[8] 林夏水.数学哲学.北京:商务印书馆.7(41).

[9] 郑毓信.数学教育哲学.成都:四川教育出版社.2004,3.

[10] Paul Ernest 著,齐建华等译.数学教育哲学.上海:上海教育出版社,1998.

[11] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论.北京:高等教育出版社,2004.10.

[12] 朱德生,李真.简明欧洲哲学史.北京:人民出版社,1979.1.

[13] 林夏水.数学哲学.北京:商务印书馆,2003.7.

第12章

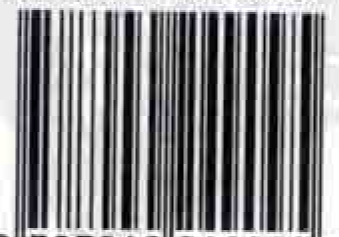
[1] 李海东.陈省身先生访谈录.数学通报 2005.3.

[2] 李建华.TIMSS2003 与美国数学课程评介.北京:数学通报,2005.3.

[3] 2005 年中国数学会教育工作委员会扩大会议实录.数学通报,2005.4.

[4] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论.北京:高等教育出版社,2004.10.

[5] 郑毓信,肖柏荣,熊萍.数学思维与数学方法论.成都:四川教育出版社,2001.4.


ISBN 978-7-04-024909-5
9 787040 249095 >
定价 36.20元